

(адельсові групи)
Лем. 1. Показати, що $\forall n \in \mathbb{Z}_+, p \geq 2$

$$\text{rank } \mathbb{Z}^n = \text{rank } (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_p) = n.$$

(Таким чином, $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n = \mathbb{Z}^{\oplus n}$; $\mathbb{Z}^{\oplus n} \oplus \mathbb{Z}_p$).

Ці групи очевидно містять $\mathbb{Z}^n$, отже їхній ранг $\leq n$.
 $\nearrow \text{rank } \mathbb{Z}^n > n : \exists G \subset \mathbb{Z}^n - \text{підгр.} : G \cong \mathbb{Z}^m, m > n$. Ксепай
 $a_1, \dots, a_m$ - її твірні, тоді образи $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^m$
Тоді $\exists k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^m k_i a_i = 0$ і $\sum_{i=1}^m k_i^2 > 0$ (наприклад,
замінемо $a_1, \dots, a_m$ як рядки $m \times n$ -матриці і використаємо
метод Гаусса; також можна просто поспостерігати на те, що
 $\dim \mathbb{Q}^n = n$ і у відг. лінійній комбінації дорівнює нулю коефіцієнти
на основній одиниці). Але $\sum k_i (0, \dots, 1, \dots, 0) \neq 0 \nmid$
Тоді само для $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_p$: тут достатньо, щоб усі k_i
ділилися на p , тоді $\mathbb{Z}_p$ -скаляр $\sum k_i a_i$ має $= 0$.
2 Показати, що $\text{rank } \mathbb{Q} = 1$.

Так само, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (натур.) $\Rightarrow \text{rank } \mathbb{Q} > 1$. А $\text{rank } \mathbb{Q} > 1$,
тоді вона містить образи примітивних векторів:
 $(1, 0, \dots, 0) \mapsto \frac{p}{q} \neq 0, (0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto \frac{r}{s} \neq 0$. Але $\frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} - p \cdot \frac{r}{s} = 0$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $q, s \neq 0 ; p, r \neq 0$

3. Навести приклад абелевої групи нескінченного рангу.

$\mathbb{Z}^{\oplus \infty} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$ - група послідовностей цілих чисел, у
 яких скінченна кількість ел-тів $\neq 0$. Містить $\mathbb{Z}^n \simeq \{ (z_1, \dots,$
 $\dots, z_n, 0, \dots) \mid z_i \in \mathbb{Z} \} \quad \forall n$.

$\mathbb{Z}^{\infty} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots$ - група усіх посл. цілих чисел. Містить $\mathbb{Z}^{\oplus \infty}$
 (пряма сума добутків)
 $\lambda_i \neq 0 \in \text{лінійно незалежні}$
 $\lambda_i \neq \text{коэф. з } \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$. Дійсно, $\forall n$ візьмемо $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall i$

Тоді $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1 + \sum_{i=2}^n z_i \lambda_{i-1}$ - ін'я гом-з'єм,
 тобто його образ $\simeq \mathbb{Z}^n$.

Впр. 1.2. Побудувати за морфізмами ланцюгових комплексів

$f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ морфізм ланцюгових $\text{Hom}(C_*^2, G) \rightarrow \text{Hom}(C_*^1, G)$.

Отже, ми маємо $C_*^i : \dots \xrightarrow{\partial_{k+1}^i} C_k^i \xrightarrow{\partial_k^i} C_{k-1}^i \xrightarrow{\partial_{k-1}^i} C_{k-2}^i \xrightarrow{\partial_{k-2}^i} \dots$, $i = 1, 2$, G — деяка абелева група, $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\text{Hom}(C_k^i, G) = \{ \varphi : C_k^i \rightarrow G \mid \varphi \text{ — лін. зм.} \}$.
 Якщо G — абелева група: $\forall \varphi, \psi \in \text{Hom}(C_k^i, G)$, $a \in C_k^i$ $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$.
 Дійсно, $\forall a, b \in C_k^i$ $(\varphi + \psi)(a + b) = \varphi(a + b) + \psi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) + \psi(a) + \psi(b) = [\varphi(a) + \psi(a) + \varphi(b) + \psi(b)]$ (бо G абелева) $= (\varphi + \psi)(a) + (\varphi + \psi)(b)$, тому $\varphi + \psi \in \text{Hom}(C_k^i, G)$. Аналог. власт. має і $- \varphi : a \mapsto -\varphi(a) \forall a \in C_k^i$.

На лекції показали, що

$$d_{i-1}^k : \text{Hom}(C_k^i, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}^i, G) : d_{i-1}^k \varphi(a) = \varphi(\partial_{k+1}^i a)$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, $\varphi \in \text{Hom}(C_k^i, G)$, $a \in C_{k+1}^i$ — ком-значки

и задать спаривания комплексов $\text{Hom}(C_*^i, G)$:

$$\dots \xrightarrow{d_{i-1}^{k-2}} \text{Hom}(C_{k-1}^i, G) \xrightarrow{d_{i-1}^{k-1}} \text{Hom}(C_k^i, G) \xrightarrow{d_{i-1}^k} \text{Hom}(C_{k+1}^i, G) \rightarrow \dots$$

Теперь $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{A}}$ — морфизм.

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & C_k^1 & \xrightarrow{\partial_k^1} & C_{k-1}^1 \rightarrow \dots \\ f_k \downarrow & & & & f_{k-1} \downarrow \\ \dots & \rightarrow & C_k^2 & \xrightarrow{\partial_k^2} & C_{k-1}^2 \rightarrow \dots \end{array}$$

комутативна, тобто $\partial_k^2 \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^1 \quad \forall k$ (і f_k - $20k$ -зм).

Потреба побудувати $g^* = \{ g_k^k : \text{Hom}(C_k^2, G) \rightarrow \text{Hom}(C_k^1, G) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ -

морфізм, тобто g_k^k - $20k$ -зм $\dots \rightarrow \text{Hom}(C_k^2, G) \xrightarrow{d_2^k} \text{Hom}(C_{k+1}^2, G) \xrightarrow{d_1^k} \text{Hom}(C_{k+1}^1, G) \xrightarrow{d_2^k} \dots$
 $\dots \rightarrow \text{Hom}(C_k^1, G) \xrightarrow{d_1^k} \text{Hom}(C_{k+1}^1, G) \xrightarrow{d_2^k} \dots$

комутативна. Покладемо для $\varphi \in \text{Hom}(C_k^2, G)$, $a \in C_k^1$:

$g^k \varphi(a) := \varphi(f_k a)$. Тоді $g^k \varphi(a+b) = \varphi(f_k a + f_k b) =$
 $= g^k \varphi(a) + g^k \varphi(b) \quad \forall a, b$, тобто $g^k \varphi \in \text{Hom}(C_k^1, G)$, і

$g^k(\varphi + \psi)(a) = \varphi(f_k a) + \psi(f_k a) = (g^k \varphi + g^k \psi)(a) \quad \forall \varphi, \psi, a$,

тобто g^k - $20k$ -зм. Нарешті, $\forall a \in C_{k+1}^1$ за означеннями

$d_1^k(g^k \varphi)(a) = g^k \varphi(\partial_{k+1}^1 a) = \varphi(f_k(\partial_{k+1}^1 a)) = [f_k\text{-морф}] =$
 $= \varphi(\partial_{k+1}^2(f_{k+1} a)) = d_2^k \varphi(f_{k+1} a) = (g^{k+1}(d_2^k \varphi))(a)$, що

доводить комутативність, тобто g^* - дійсно морфізм. Т.ч.

$\text{Hom} : \begin{cases} C_* \mapsto \text{Hom}(C_*, G) \\ f_* \mapsto g^* \end{cases}$ - контраваріантний функтор

з категорії ланцюгових комплексів у cat. комплексів .

Впр. 1.3. Послідовність

$$0 \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\gamma} H \rightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{коротка точна} \\ \text{послідовність} \end{array} \right)$$

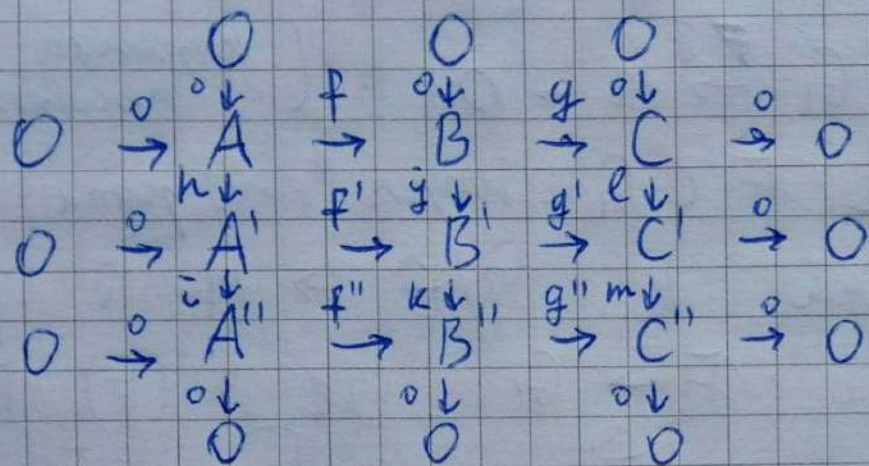
точна $\Leftrightarrow H \cong G/\hat{F}$, де $\hat{F} \subset G$ - норм. підгрупа, що ізом. F .
Доведемо $\Rightarrow$ ^{Отже} $\exists$ ізоморфізми $h: G/\hat{F} \rightarrow H$ і $i: F \rightarrow \hat{F}$.

Можна вважати, що $i: F \rightarrow G$, де $i(F) = \hat{F}$ (візьмемо композицію з фізюр. вкладення $\hat{F}$ у G). Тоді i - ін'є (мономорфізм). Векай $p: G \rightarrow G/\hat{F}$ - канон. проєкція. Покладемо $g := h \circ p: G \rightarrow H$ - еп'є (епіморфізм). Для $f := i$, g маємо точності у $F \subset G$. Карешні, у G : $\text{Im } f = \hat{F} = \text{Ker } p = \text{Ker } g$.

$\Rightarrow$ Тепер маємо точність, зокрема, f - ін'є, g - еп'є.
1) $\text{Im } f = \text{Ker } g$. За л. Коотер про ізоморфізми:

$G/\text{Ker } g \cong \text{Im } g = H$, і $\hat{F} := \text{Ker } g = \text{Im } f \cong F$,
(вона нормальна, бо єдро завжди нормальне)

Замр. 1.7. 3×3 - лема:



Стовпчики точні, 2 і 3 рядки точні, Також 1 рядок точний (Ал-но: 1 і 2 рядки точні $\Rightarrow$ 3 рядок точний - самоствірно).

Точність у A. Нехай $a \in A$: $f(a) = 0$. Також $f'(h(a)) =$
 $= j(f(a)) = 0 \Rightarrow [2 \text{ р. точний}] \Rightarrow h(a) = 0 \Rightarrow [1 \text{ ст. точний}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 0$, Тк.ч., f - ін'ю.

Точність у C. Нехай $c \in C$, 2 р. точний $\Rightarrow \exists b' \in B'$:
 $l(c) = g'(b')$, $g''(k(b')) = m(g'(b')) = m(l(c)) = [3 \text{ ст. м.}] = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow [3 \text{ р. м.}] \Rightarrow \exists a'' \in A''$: $k(b') = f''(a'') \Rightarrow [1 \text{ ст. м.}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists a' \in A'$: $a'' = i(a')$, $k(f'(a')) = f''(i(a')) = f''(a'') = k(b') \Rightarrow$

$$\Rightarrow k(f'(a') - b') = 0 \Rightarrow [2 \text{ cm. m.}] \Rightarrow \exists b \in B: \bar{y}(b) = f'(a') - b',$$

$$\ell(g(b)) = g'(\bar{y}(b)) = g'(f'(a')) - g'(b') = [2 \text{ p. m.}] = -g'(b') =$$

$$= -\ell(c) \Rightarrow [3 \text{ cm. m.}] \Rightarrow c = -g(b) = g(-b), \text{ П.ч., } g - \text{sur.}$$

Понимание $\bar{y}$ и B .

$$b \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g(b) = 0 \Rightarrow g'(\bar{y}(b)) = \ell(g(b)) = 0 \Rightarrow [2 \text{ p. m.}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A': \bar{y}(b) = f'(a'), f''(\bar{i}(a')) = k(f'(a')) = k(\bar{y}(b)) =$$

$$= [2 \text{ cm. m.}] = 0 \Rightarrow [3 \text{ p. m.}] \Rightarrow \bar{i}(a') = 0 \Rightarrow [1 \text{ cm. m.}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists a \in A: a' = h(a), \bar{y}(f(a)) = f'(h(a)) = f'(a') = \bar{y}(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 \text{ cm. m.}] \Rightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b \in \text{Im } f.$$

$$b \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists a \in A: b = f(a), \bar{y}(b) = \bar{y}(f(a)) = f'(h(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 \text{ p. m.}] \Rightarrow \ell(g(b)) = g'(\bar{y}(b)) = g'(f'(h(a))) = 0 \Rightarrow [3 \text{ cm. m.}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(b) = 0 \Leftrightarrow b \in \text{Ker } g.$$

П.ч., $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

$\mathbb{D}/\mathbb{Z}$ (необов'язково): Воп. 1.1, 1.4 (групи Вундгофа),

1.5. лекції.