

Лекції з топології

Петров Є.В.

13 вересня 2025 р.

Зміст

1	Топологічний простір. Околи	2
2	Замкнені множини	7
3	Порівняння топологій	9
	Література	11

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що будуються за допомогою неперервних відображень, та інваріанти цих відношень. Стандартним підходом до введення цих концепцій є використання поняття топологічного простору.

1 Топологічний простір. Околи

Означення 1.1. Нехай X – довільна множина. *Топологією* на X зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин X , що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.
3. Порожня множина і сама множина X належать до $\mathcal{T}$: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини X , що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в X відносно топології $\mathcal{T}$).

Зауваження. У позначеннях вище A – множина індексів (довільної потужності), n – натуральне число. Перераховані вимоги 1.–3. часто називають *аксіомами топології*. Інколи аксіому 3. виводять з перших двох, використовуючи стандартні узгодження теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині X йдеться, ми будемо опускати її явне позначення і говорити просто про топологічний простір X . Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками*.

Означення 1.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина U (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

Твердження 1.1. *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

$\Leftarrow$ Перевіримо достатність. Нехай для кожної точки $x \in U$ множина U є околом x , тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в U , бо кожна з них міститься в U :

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup_{x \in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою 1. ■

Зауваження. У деяких джерелах поняття "окіл x " означає "відкритий окіл x ", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить x . Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна справа).

Наведемо деякі класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів.

Приклад 1.1. Нехай X – довільна множина. В якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ясно, що аксіоми 1–3 для такої сукупності виконані, тому вона утворює топологію на X , що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на X .

Приклад 1.2. Нехай X – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин X (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми 1–3 виконані, й система $\mathcal{T}$ утворює топологію на X . Її називають *дискретною* топологією на X .

Приклад 1.3. Нехай множина X складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин X , які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}, \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ зветься топологіями зв'язної двокрапки.

Вправа 1.1. Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

Приклад 1.4. Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0: (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким ε -околом. Перевіримо, що ця сукупність утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Тому $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$

тому

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

отже $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. нижче у розділі 7).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервалу $x \in (a, b)$ можна взяти $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, для напівнескінчених інтервалів усе ще простіше. З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ не міститься у $[a, b)$. Зауважимо, що $[a, b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Важливість інтервалу як прикладу відкритої підмножини стандартної прямої підкреслюється наступною теоремою:

Теорема 1.1 (Опис відкритих підмножин прямої). *Підмножина $U \subset \mathbb{R}$ дійсної прямої зі стандартною топологією є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються.*

Зауваження. Вираз "не більш ніж злічений" означає "скінченний або злічений". Об'єднання підмножин, що попарно не перетинаються, зазвичай називають *диз'юнктним* і позначають знаком $\sqcup$. Отже, в теоремі стверджується, що відкриті підмножини прямої – це в точності ті, що мають вигляд

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

де замість ∞ може стояти натуральне n або 0 – для порожньої U , інтервали можуть мати нескінченні межі, й $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Доведення. $\Leftarrow$ Достатність тут очевидна: ми вже встановили, що інтервали відкриті, а отже і їхні об'єднання.

$\Rightarrow$ Покажемо зворотнє. Нехай $U \subset \mathbb{R}$ – відкрита, й $x \in U$. За означенням, існує таке $\varepsilon_x > 0$, що $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U$. Покладемо:

$$a_x := \inf\{a \mid \exists (a, b): x \in (a, b) \subset U\};$$

$$b_x := \sup\{b \mid \exists (a, b): x \in (a, b) \subset U\}.$$

За побудовою, $a_x \leq x - \varepsilon_x < x$ і $b_x \geq x + \varepsilon_x > x$, тобто $x \in (a_x, b_x)$. З іншого боку, $(a_x, b_x) \subset U$. Дійсно, якщо $y \in (a_x, b_x)$ і, скажімо, $y \leq x$,

то з $a_x < y$ і означення інфімуму маємо, що існує інтервал (a, b) такий, що $x \in (a, b) \subset U$ і $a_x \leq a < y$. Тоді $y \in (a, x] \subset (a, b) \subset U$. Аналогічно отримуємо $y \in U$ і для випадку $y \geq x$ з властивостей супремума.

Вправа 1.2. Перевірити, що

$$(a_x, b_x) = \bigcup_{x \in (a, b) \subset U} (a, b),$$

і що (a_x, b_x) – найбільший за включенням інтервал, що містить x та міститься в U (це не буде потрібне для подальшого доведення).

Отже, оскільки для кожного $x \in U$ маємо $x \in (a_x, b_x) \subset U$, аналогічно до доведення попереднього твердження отримуємо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Нехай два таких інтервали (a_x, b_x) і (a_y, b_y) перетинаються, тобто мають спільний елемент $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Тоді, оскільки $z \in (a_x, b_x) \subset U$, $(a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$ за побудовою a_z і b_z . Зокрема, $x \in (a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$, тому, з аналогічних міркувань, $(a_z, b_z) \subset (a_x, b_x)$. Таким чином, $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$. Аналогічно, $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, тому $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$. Отже, ми показали, що будь-які два побудовані нами інтервали або не перетинаються, або збігаються. Зауважимо, що межі цих інтервалів не обов'язково скінченні: можливо $a_x = -\infty$ або $b_x = +\infty$, і для цих випадків усі попередні міркування залишаються вірними.

Згрупуємо інтервали, що збігаються, залишивши лише попарно різні (а отже такі, що не перетинаються), і перепозначимо їх за допомогою множини індексів A . Отримаємо диз'юнктне об'єднання:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Залишилося помітити, що в кожному з цих інтервалів, що попарно не перетинаються, є раціональне число, тому потужність $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, тобто A не більш ніж зліченна. Це й означає, що множина U має потрібний вигляд.

■

Приклад 1.5. Знову покладемо $X = \mathbb{R}$, а в якості системи підмножин в X розглянемо

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Неважко пересвідчитися у тому, що це топологія на $\mathbb{R}$:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, +\infty) = (\inf\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}, +\infty)$. Це виконується й для випадку, коли одна з лівих меж дорівнює $+\infty$ (тобто відповідна множина порожня) або $-\infty$ (тобто це вся пряма) – перевірте це!
2. $\bigcap_{i=1}^n (a_i, +\infty) = (\max\{a_i\}_{i=1}^n, +\infty)$. Це теж справедливо й для нескінченних меж. Як і у минулому прикладі, скінченність перетину тут є суттєвою (чому?).
3. виконана за побудовою.

Така $\mathcal{T}$ зветься *топологією напівнескінченних інтервалів* на прямій.

2 Замкнені множини

Означення 2.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ зветься *замкнутою*, якщо доповнення до неї $X \setminus V$ відкрите (тобто $X \setminus V \in \mathcal{T}$).

Властивості замкнених підмножин топологічного простору дуальні до властивостей відкритих:

Твердження 2.1 (Властивості замкнених множин). *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір.*

1. *Перетин будь-якої сукупності замкнених підмножин замкнений, тобто якщо $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ замкнені, то $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ замкнена.*
2. *Об'єднання будь-якої скінченної сукупності замкнених підмножин замкнене, тобто якщо $\{V_i\}_{i=1}^n$ замкнені, то $\bigcup_{i=1}^n V_i$ замкнена.*
3. *Порожня множина та X замкнені.*

Доведення. Ці властивості випливають з означень топології, замкненої множини та формул де Моргана:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus V_\alpha);$$

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus V_i).$$

■

Повернемося до наших прикладів топологій:

Приклад 2.1. У тривіальній топології є лише дві відкритих підмножини $\emptyset$ та X , тому в точності вони є і замкненими. У подальшому ці дві одночасно відкриті й замкнені у кожній топології множини ми будемо називати *тривіальними*.

Приклад 2.2. Відносно дискретної топології будь-яка підмножина X є відкритою і замкненою одночасно.

Приклад 2.3. У топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$ на двоточковій множині $X = \{x, y\}$ єдиною нетривіальною замкненою підмножиною є $\{y\}$. Аналогічно для топології $\mathcal{T}_4$ (у позначеннях прикладу 1.3) на цій множині.

Приклад 2.4. Приклади замкнених підмножин прямої $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією суб'єктивно різноманітніші, ніж відкритих. Зокрема, до них відносяться:

- Відрізки $[a, b]$ (зокрема, одноточкова множина $\{a\} = [a, a]$), бо доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ відкрите в даній топології. Аналогічно для напівнескінчених напівінтервалів $[a, +\infty)$ і $(-\infty, b]$.
- Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, бо доповнення $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ відкрите (і аналогічно для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$).
- Множина Кантора утворюється з відрізка $[0, 1]$ послідовним викиданням інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ і т.д. Вона замкнена, бо її доповнення є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються. Також її можна описати як множину дійсних чисел від 0 до 1, записаних у трійковій системі числення не містить одиниць, лише нулі та двійки (відтворіть деталі самостійно). Як відомо з курсу аналізу, ця множина, зокрема, континуальна. Її більш детальний опис можна знайти у [8, с. 57-58].

З іншого боку, скінченний напівінтервал $[a, b)$ не є замкненим, оскільки його доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не відкрите в цій топології (чому?). При цьому $[a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ (де n_0 – натуральне число достатньо велике для того, щоб ці відрізки існували), тож умова скінченності об'єднання у властивості 2. твердження 2.1 суттєва.

Вправа 2.1. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є замкненою в цій топології.

Приклад 2.5. У прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінчених інтервалів нетривіальні замкнені підмножини мають вигляд $(-\infty, a]$.

Дуальність властивостей відкритих і замкнених множин підказує нам, що топологію можна визначати за допомогою сукупності замкнених підмножин:

Твердження 2.2. Нехай $\mathcal{C}$ – система підмножин деякої множини X , що задовольняє умовам 1.–3. з твердження 2.1. Тоді

$$\mathcal{T} := \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$$

є топологією на X , а $\mathcal{C}$ – сукупністю підмножин, що замкнені у цій топології.

Доведення. Як і твердження 2.1, це безпосередній наслідок означень і формул де Моргана.

■

Приклад 2.6. Нехай X – довільна множина, а $\mathcal{C}$ складається з усіх скінченних підмножин X і (за потреби) самої X . Умови 1.–3. твердження 2.1 для такого $\mathcal{C}$, очевидно, виконані, бо перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченної кількості скінченних підмножин скінченні. Отже, доповнення до скінченних підмножин (і $\emptyset$ за потреби) утворюють топологію на X , що зветься *кофінітною*. Якщо X скінченна, то ця топологія збігається з дискретною.

3 Порівняння топологій

Означення 3.1. Нехай X – деяка множина, а $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – топології на X . Кажуть, що $\mathcal{T}$ *слабша (грубша)* за $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ *сильніша (тонша)* за $\mathcal{T}$, якщо будь-яка підмножина, що відкрита відносно топології $\mathcal{T}$, є відкритою й відносно топології $\mathcal{S}$. Це позначається $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ або $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}$.

Зауваження. Звичайно, це просто включення двох систем підмножин: $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ означає $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Зокрема, воно встановлює *відношення (часткового) порядку* на множині топологій X , що задовольняє відповідним аксіомам:

- $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$ для будь-якої $\mathcal{T}$ (*рефлексивність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ (*антисиметричність*);

- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}$, то $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ (транзитивність).

Замість топологій можна порівнювати сукупності замкнених множин, як у прикладі 3.4 нижче (чому?).

Приклад 3.1. Тривіальна топологія на довільній множині слабша за будь-яку іншу, тобто є найслабшою.

Приклад 3.2. Дискретна топологія на довільній множині сильніша за будь-яку іншу, тобто є найсильнішою.

Приклад 3.3. На двоточковій множині $X = \{x, y\}$ топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ (див. позначення вище) знаходяться між тривіальною $\mathcal{T}_1$ і дискретною $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3 \prec \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_4 \prec \mathcal{T}_2$. При цьому вони непорівнювані між собою, бо у кожній з них є відкрита множина, якої немає у іншій ($\{x\}$ та $\{y\}$ відповідно).

Приклад 3.4. На прямій $\mathbb{R}$ крім тривіальної (найслабшої) та дискретної (найсильнішої) маємо три приклади топологій: стандартну, напівнескінченних інтервалів і кофінітну. При цьому топологія напівнескінченних інтервалів та кофінітна топологія слабші за стандартну: у кожній з них відкриті множини є, очевидно, об'єднанням інтервалів, а отже відкриті у стандартній. Але між собою ці дві топології непорівнювані. Наприклад, множина $(-\infty, 0]$ є замкнутою у топології напівнескінченних інтервалів, але не у кофінітній (бо нескінченна і не збігається з усією прямою), а $\{0\}$ – навпаки.

Література

- [1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.
- [2] Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2025.
- [3] M.A. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.
- [4] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995.
- [5] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980.
- [6] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2012 (at www.topologywithouttears.net).
- [7] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.
- [8] L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Dover Publications, 1995.