

Дотичний простір і диференціал

Нехай  $M$  -  $k$ -мгний многовид,  $k \geq 1$ ,  $n = \dim M$ .

деф. Дотичним вектором  $M$  в  $p \in M$  будемо називати відображення

$$\nu : \left\{ \begin{array}{l} \text{карти } (U, \varphi) \text{ з} \\ \text{мгної структури } M \\ \text{такі, що } p \in U \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

таким, що якщо  $\nu((U, \varphi)) = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ , а  $\nu((\tilde{U}, \tilde{\varphi})) =$

$(\tilde{\nu}^1, \dots, \tilde{\nu}^n)$ , то  $\forall \bar{i} = \overline{1, n}$

$$\tilde{\nu}^{\bar{i}} = \left( \sum_{\bar{j}=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (p) \right) \nu^{\bar{j}}$$

де  $\tilde{\nu}^{\bar{i}}$  не  
число

(\*)

де  $(x^1, \dots, x^n), (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$  - локал. коорд. що відгн.

$(U, \varphi)$  і  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  відповідно, а  $\frac{\partial \tilde{x}^{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (p) := \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (\varphi(p))$

часткові похідні відображень переходу.

Лем. Тоді  $(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (\tilde{x}^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \tilde{x}^n(x^1, \dots, x^n))$

Лем. 3 (\*) випливає, що значення  $\mathcal{V}$  достатньо задати в  
(при цьому значення в  $\mathcal{V}$  при карт узгоджені за правилом (\*)) - Вопр. 1 -  
одній карті, і зокрема, якщо це значення  $= 0$  в одній  
карті, то  $= 0$  і  $\forall$  інших (і в цьому випадку мимовісно  $\mathcal{V} = 0$ )

Лем. Лінійні операції над дотичними векторами в  $P$   
задаються наступним чином:

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})(u, \varphi) := \mathcal{V}(u, \varphi) + \mathcal{W}(u, \varphi),$$

$$(\lambda \mathcal{V})(u, \varphi) := \lambda \cdot \mathcal{V}(u, \varphi),$$

де  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  - дот. вектори в  $P$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(u, \varphi)$  - карта з  $p \in U$ .

Лем. В силу лінійності (\*)  $\mathcal{V} + \mathcal{W}$  і  $\lambda \mathcal{V}$  - також  
дотичні вектори в  $P$  (коректно визначені).

Сол. Дотичні вектори в  $P$  утворюють векторний простір  
(підпростір у просторі всіх відображень з підскаби  
карт в околі  $P$  у  $\mathbb{R}^n$ )

Лем. Цей простір зветься дотичним простором (до)  $M$  у

$p$  і позначається  $T_p M$ .

Ех. Нехай  $\chi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$ ,  $p \in M$ ,  $(U, \varphi)$ -карта з  $p \in U$  і лок. коорд.  $(u^1, \dots, u^n)$ .

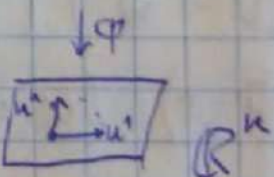
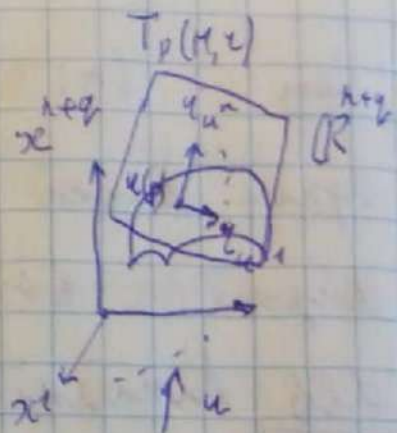
Тоді  $\text{id} \circ \chi \circ \varphi^{-1} = \chi \circ \varphi^{-1}$  - лок. задання  $\chi$ :  
 $(u^1, \dots, u^n) \mapsto (x^1(u^1, \dots, u^n), \dots, x^{n+q}(u^1, \dots, u^n))$ .

Позначимо

$$\chi_{u^i}(p) := \frac{\partial(\chi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \left( \frac{\partial x^1}{\partial u^i}(u_0^1, \dots, u_0^n), \dots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(u_0^1, \dots, u_0^n) \right)$$

де  $(u_0^1, \dots, u_0^n) = \varphi(p)$  - координати  $p$  ( $\chi_{u^i}(p) \in \mathbb{R}^{n+q}$ ).

Будемо розглядати такі  $\chi$ , для яких  $\forall p \in M$  і  $\forall$  карти  $(U, \varphi)$  в околі  $p$  вектори  $\{\chi_{u^1}(p), \dots, \chi_{u^n}(p)\}$  лінійно незалежні в  $\mathbb{R}^{n+q}$ . У цьому випадку  $\chi$  зветься регулярним (або зануреним), а пара  $(M, \chi)$  - підмноговидом у  $\mathbb{R}^{n+q}$  (насаме ми дамо відповідні загальні означення). Наприклад, при  $n=2$ ,  $q=1$  це означає



еквівалентна  $[ \chi_{u^1}(p), \chi_{u^2}(p) ] \neq 0$ . } закл. Внаслідок того  
також еквівалентна умові член  $\left( \frac{\partial x^a}{\partial u^i} (\varphi(p)) \right)_{\substack{a=\overline{1,n} \\ i=1,n}} = n$   
(м-ця Якобі лок. задання  $\chi$ ).

Нехай тепер  $p \in U \cap \tilde{U}$ , де  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  - якась інша карта  
з лок. коорд.  $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ . Тоді  $\forall \quad i = \overline{1, n}$   

$$\chi_{\tilde{u}^i}(p) = \frac{\partial (\chi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i} (\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial (\chi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i} (\tilde{\varphi}(p)) = \left[ \begin{matrix} \text{похідна} \\ \text{непрерывно} \\ \text{функції} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\partial (\chi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^j} (\varphi(p)) \frac{\partial (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^j}{\partial \tilde{u}^i} (\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} (\tilde{u}_0^1, \dots, \tilde{u}_0^n) \cdot \chi_{u^j}(p)$$
 де  $(\tilde{u}_0^1, \dots, \tilde{u}_0^n) = \tilde{\varphi}(p)$  - нові координати  $p$ , і  $\left( \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} (\tilde{\varphi}(p)) \right)_{i,j=1}^n$  -

м-ця Якобі відобр. переходу  $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  у  $\tilde{\varphi}(p)$ . Оскільки це  
відобр. - диффеоморфізм, ця м-ця не вироджена. Тому  
система  $\{ \chi_{\tilde{u}^1}(p), \dots, \chi_{\tilde{u}^n}(p) \}$  також лін. незалежна  
(тобто умову регулярності достатньо перевірити в  
одній карті), і лінійна оболонка

$\text{span} \{ \chi_{u^1}(p), \dots, \chi_{u^n}(p) \} = \text{span} \{ \chi_{u^1}(p), \dots, \chi_{u^n}(p) \}$  —  
 залежить лише від  $(M, \epsilon)$  і  $p$ . Назвемо цей  
 підпростір  $\mathbb{R}^{n+q}$   $T_p(M, \epsilon) := \text{span} \{ \chi_{u^i}(p) \}_{i=1}^n$  дотичним  
 підпростором  $(M, \epsilon)$  у  $p$ . Відповідний афінний  
 підпростір, що проходить через  $\chi(p)$ , назвемо аф.  
 дотичним підпростором  $(M, \epsilon)$  у  $p$ . Поді  $\{ \chi_{u^i}(p) \}_{i=1}^n$  — доп. базис.

Для  $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$  і кривої  $\gamma = \delta \in C^k((a, b), \mathbb{R}^{n+q})$   
 $\chi_t(t_0) = \delta'(t_0) = ((\delta^1)'(t_0), \dots, (\delta^{n+q})'(t_0))$  — дотичний вектор,  
 і умова неперпендикулярності означає  $\delta'(t_0) \neq 0 \ \forall t_0 \in (a, b)$ .  
 Поді  $T_{t_0}((a, b), \delta)$  — це пряма, паралельна до  $\delta'(t_0)$ ,  
 а відп. аф. підпростір — дотична до  $\delta$  у  $\delta(t_0)$ .

Зауважимо, що  $\chi_{u^i}(p)$  — це дотичний вектор до  
 кривої  $t \mapsto (u_0^1, \dots, t, \dots, u_0^n) \xrightarrow{\chi \circ \varphi^{-1}} (x^1(u_0^1, \dots, t, \dots, u_0^n), x^{n+q}(u_0^1, \dots, t, \dots, u_0^n))$   
 ( $i$ -та координатна лінія  $(M, \epsilon)$  у відп. лок. коорд.)

$\gamma(t_0) = u_0$ . Кожна крива  $\gamma \in C^k((a, b), M)$  — крива в  $M$ .  
 Тоді  $\psi \circ \gamma \in C^k((a, b), \mathbb{R}^{n+q})$  (за композиційних властивостей) —  
 крива в  $\mathbb{R}^{n+q}$ . Кожна  $\gamma(t_0) = p$ . Тоді лок. задання  
 $\gamma: (\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma'(t), \dots, \gamma^n(t))$  (боно визначене на  
 $\gamma^{-1}(u) \ni t_0$ ). Для  $t \in \gamma^{-1}(u)$   $(\psi \circ \gamma)(t) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)(t) =$   
 $= (x^1(\gamma'(t), \dots, \gamma^n(t)), \dots, x^{n+q}(\gamma'(t), \dots, \gamma^n(t)))$ , тоді  
 $(\psi \circ \gamma)'(t_0) = \left( \frac{\partial x^1}{\partial u^i}(\gamma'(t_0), \dots, \gamma^n(t_0)) (\gamma^i)'(t_0), \dots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(\gamma'(t_0), \dots, \gamma^n(t_0)) (\gamma^i)'(t_0) \right)$   
 $= (\gamma^i)'(t_0) \psi_{u^i}(p) \in T_p(M, \psi)$

Вис. Перевіряючи, що вірне і обернене включення, маємо

$$T_p(M, \psi) = \{ (\psi \circ \gamma)'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a, b), M) : \gamma(t_0) = p \}$$

Отже, дотичний підпростір — це множина всіх дотич-  
 них векторів до кривих, що проходять через  $p$  у  $M$ .  
 Вірно, адр. дот. підпростір — це об'єднання  
 дотичних до цих кривих.

Нехай  $v \in T_p(M, \tau)$ . Розкладемо його по базису:

$$v = v^i \tau_{u^i}(p) = \tilde{v}^i \tau_{\tilde{u}^i}(p) \Leftrightarrow$$

~~З~~ співвідношень вище:

$$\Leftrightarrow \tilde{v}^i \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p) \tau_{u^j}(p)$$

(тут повинно бути  $\tilde{\tau}(p)$ , але ми спростили позначення)

Приймаючи коеф. при базисних векторах, отримуємо:

$$v^j = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p) \tilde{v}^i \quad j = \overline{1, n}$$

$$\text{у ан-но: } \tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}(p) v^i$$

Ми отримали правило (\*). Це мотивує наше означення і демонструє, що можна встановити

ліній. ізоморфізм між  $T_p M$  і  $T_p(M, \tau)$  для будь-якого регулярного  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ : якщо  $(u, \varphi)$  - якась

карта в околі  $p$  з лок. коорд.  $(u^1, \dots, u^n)$ , і  $v((u, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$ , то  $v \mapsto v^i \tau_{u^i}(p)$ .

Повернемося до загального випадку і розглянемо принцип дотичного вектора:

Есл. Нехай  $(\psi, \varphi)$  - карта в околі  $p$  з лок. коорд.

$(x^1, \dots, x^n)$ . Позначимо  $\forall i = \overline{1, n}$  через  $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$  вектор,

що ставить у відповідність карті  $(\psi, \varphi)$  набір

$(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  (як ми зауважили, значення  $\varphi$

будь-якій іншій карті знаходиться майже за допомогою  $(x)$ ).

Реш. Якщо тепер  $v \in T_p M$  і  $v((\psi, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n) =$

$= v^1(1, \dots, 0) + \dots + v^n(0, \dots, 1)$ , то  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , у якого

$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ , то, розглянувши значення цього вектора

в  $(\psi, \varphi)$ , отримавши  $v^1 = \dots = v^n = 0$ . Побудуємо  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$

повна і лін. незалежна в  $T_p M$ .

Соч.  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  - базис  $T_p M$ . Зокрема,  $\dim T_p M = n$ .

Рем.  $T_p(M, \varphi)$  векторы  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  образуют  $\mathcal{U}_i(p)$ .  
def Похигносо функция  $f \in C^k(M)$  и направленный вектор

$v \in T_p M$  (в точке  $p$ ) задается

$$v(f) := v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R}, \text{ где } \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

где  $(x^1, \dots, x^n)$  - локальные координаты карты  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$   
 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  (где мы считаем, что  $v^i \Leftrightarrow v((U, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$ )

$$v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \text{ - простое обозначение.}$$

Рм. Все означенные корректны, то есть не зависят от выбора карты в окрестности  $p$ .

Пусть  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  - другая карта с локальными координатами  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$

$$\begin{aligned} v &= v^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \text{ тогда} \\ v^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) &= [X] = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = \left[ \begin{array}{l} \text{пересчет} \\ \text{обозначения} \end{array} \right] = \\ &= v^j \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \left[ \begin{array}{l} \text{группа} \\ \text{композиции} \end{array} \right] = \\ &= v^j \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \quad \triangle \end{aligned}$$

Лем. Зокрема,  $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \delta^j_i \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ .

Лем.  $\forall v \in T_p M$  визначає відображення  $C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$f \mapsto v(f)$ , що має наступні властивості:

1. Лінійність:  $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$ ;

2. Правило Лейбніца:  $v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$ ;

$\forall f, g \in C^k(M)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Це випливає з деф. і власт. частк. похідних.

Можна показати, що лінійне простором таких відображень  $i T_p M$  є відповідність всеспрямоване природний ізоморфізм (тому ще говорять, що детермінант вектор-це диференціювання), див. нижче.

Ел. Якщо  $M = \mathbb{R}^n$  або  $M = U$  - відкрита підмножина  $\mathbb{R}^n$ , то  $\forall p \in M$  у околі  $p$  існують глобальні координати  $(x^1, \dots, x^n)$  простору і відп. базис  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$   $T_p M$ . Тоді отождествлю  $T_p M$  з  $\mathbb{R}^n$ :  $v \in \frac{\partial}{\partial x^i} \Leftrightarrow (v^1, \dots, v^n)$ .

def. Крива  $\gamma \in C^k((a, b), M)$  — гладкая кривая в  $M$ ,  
 $t_0 \in (a, b): \gamma(t_0) = p$ . Тогда касательным вектором  $\gamma$  в  
 $t_0$  зовутся

$$\gamma'(t_0) := (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M,$$

где  $(x^1, \dots, x^n)$  — локальные координаты некоторой карты  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ ,  
 $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) := \varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — локализация  $\gamma$   
 относительно  $\varphi$ . Если  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , то  $\gamma$  невырождена в  $t_0$  (и регулярна, а также является кривой).  
л.з. Не очевидно корректно, можно не зависеть от выбора

карты в окрестности  $p$ .

Пусть  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  — другая карта в окрестности  $p$  с локальными координатами

$$(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n), \text{ и } (\tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^n) := \tilde{\varphi} \circ \gamma = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma. \text{ Тогда}$$

$$\forall i = \overline{1, n}$$

$$(\tilde{\gamma}^i)'(t_0) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(\gamma(t_0))) ((\varphi \circ \gamma)^j)'(t_0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) (\gamma^j)'(t_0)$$

можно  $\gamma'(t_0): (U, \varphi) \mapsto ((\gamma^1)'(t_0), \dots, (\gamma^n)'(t_0))$  заданная

$(x)$  и определяет элемент  $T_p M$  с разложением по  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  зависит

Рем. Для  $f \in C^k(M)$  (і задане лок. коорд. в околі  $\gamma(t_0)=p$ ):

$$\gamma'(t_0)(f) = (\gamma \circ \bar{\gamma})'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t_0)) = [\text{похідна композиції}] = \\ = ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) \quad (\text{тут } f \circ \gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R})$$

Рн.  $T_p M = \{ \gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p \}$ .

Рем. Для опису  $T_p(M, \alpha)$  вище: вектору  $\gamma'(t_0) \in T_p M$  відповідає  $(\psi \circ \gamma)'(t_0) \in T_p(M, \alpha)$ .

► Потім треба довести, що  $\forall v \in T_p M$  має такий вигляд. Дійсно, нехай  $(\psi, \varphi)$ -карта в околі  $p$  з лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  і  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Покладемо

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0^1 + v^1 t, \dots, x_0^n + v^n t), \quad \boxed{\gamma \in C^k(\mathbb{R}, M)}$$

де  $(x_0^1, \dots, x_0^n) = \varphi(p)$ . Тоді  $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p$ , і  $\gamma'(0) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v$  за означенням ( $\gamma^i(t) = x_0^i + v^i t$ ).  $\triangle$

Рем. Зокрема,  $T_p M$  можна природним чином отождествити з множиною класів еквівалентності векторів

кривая, что проходят через  $p$ : мы ввасяемо  $\gamma \sim \mu$ , ажно  $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p \quad \text{и} \quad \forall f \in C^k(M)$   
 $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$ .

Тодто  $\in$  3 способи означення дотичного вектору через лок. координати, через дифференцирование  $\dot{\gamma}$  через криві.

def. Нехай  $M, N$  -  $k$ -матри,  $F \in C^k(M, N)$ ,  $k \geq 1$ .

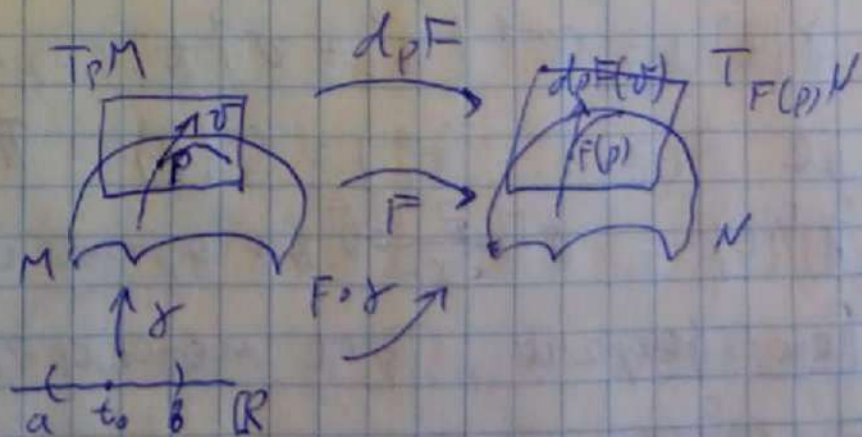
Для  $p \in M$  дифференциал  $F$  у  $p$   $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  визначається наступним чином:

$\forall v \in T_p M$  нехай  $v = \gamma'(t_0)$ ,  
 де  $\gamma \in C^k((a, b), M)$  з  $\gamma(t_0) = p$ .

Тоді

$$d_p F(v) := (F \circ \gamma)'(t_0)$$

Rem.  $\gamma$  існує в силу лем. Р4.



Лем. Нехай  $(u, \varphi) \in (U, \Psi)$  - карта з  $p \in u$ ,  $F(p) \in V$

(зокрема,  $p \in u \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ ) з лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^m)$  і

$(y^1, \dots, y^n)$  відповідно,  $\Psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (F^1, \dots, F^n)$  - лок.

задача  $F$ . Нехай  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . За умовою маємо

$v^i = \overline{v^i}$ ,  $v^i = (\gamma^i)'(t_0)$ , де  $(\gamma^1, \dots, \gamma^m) = \varphi \circ \gamma$  - лок. задача

$\gamma$ . Можемо лок. задачу  $F \circ \gamma$ :  $\Psi \circ F \circ \gamma = (\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ ,

тому

$$d_p F(v) = (F \circ \gamma)'(t_0) = ((F \circ \gamma)^a)'(t_0) \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) \cdot (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial y^a} =$$

$$= \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) v^i \frac{\partial}{\partial y^a} \quad \text{де}$$

$$\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (\Psi \circ F \circ \varphi^{-1})^a}{\partial x^i}(\varphi(p)), \quad \text{і змінюється від 1 до } m,$$

а  $a$  - від 1 до  $n$ . Помітимо, що цей вираз не залежить

від  $\gamma$ , а є інваріантним дєв. - від координат.

~~Між~~ Крім того, він лінійний по  $v^i$ . Тому:

Сог.  $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  корректно определено, линейно  
и узапасено  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\} \mapsto \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$  этих пространств  
имеет матрицу  $\left( \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) \right)_{\substack{a=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}}$  (м-ая строка мен.  
задания  $F$ ).

Лем. Топ. с означенным дифференциалом вогнуто.  $\text{img} -$   
многообразие  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  (при этом для  $U \subset \mathbb{R}^m$   $T_p U \cong \mathbb{R}^m$ ).

Лем. (правило дифференцирования композиции, лангранжево правило)  
Для  $F \in C^k(M, N)$ ,  $G \in C^k(L, M)$ ,  $\forall p \in L$

$$d_p (F \circ G) = d_{G(p)} F \circ d_p G.$$

►  $\forall v \in T_p L: v = \gamma'(t_0)$ ,  $\gamma \in C^k((a, b), L)$ ,  $\gamma(t_0) = p$ :

$$\begin{aligned} (d_p (F \circ G))(v) &= ((F \circ G) \circ \gamma)'(t_0) = (F \circ (G \circ \gamma))'(t_0) = \\ &= (d_{(G \circ \gamma)(t_0)} F)((G \circ \gamma)'(t_0)) = (d_{G(p)} F)(d_p G(v)) \quad \triangle \end{aligned}$$

Ex. 1. Дад крива  $\gamma \in C^k((a,b), M)$  и  $t_0 \in (a,b)$ :

$$d_{t_0} \gamma: T_{t_0}(a,b) \rightarrow T_{\gamma(t_0)} M$$

$\downarrow \uparrow$   
 $\mathbb{R}$

Термин  $\gamma$  елих простором омономорфизмо з  $\mathbb{R}$  на  $M$ .

$$v \leftrightarrow v \frac{\partial}{\partial t} = \mu'(0), \text{ где } \mu(t) = t_0 + vt, \mu(0) = t_0.$$

$$\text{Тако } d_{t_0} \gamma(v) = (\gamma \circ \mu)'(0) = v \gamma'(t_0).$$

2. Дад  $q$ -гиз  $f \in C^k(M)$ ,  $p \in M$ :

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

$\downarrow \uparrow$   
 $\mathbb{R}$

Термин  $f$  глуми простором омономорфизмо з  $\mathbb{R}$ . В сврх инваријанци мога  $d_p f \in T_p M^*$  - лн. функционал на  $T_p M$ .

$$\text{Локално гда } v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ мога } d_p f(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v(f).$$

3. Дад к-л:  $M \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $p \in M$  зновы омономорфизмо:

$$d_p \psi: T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} \mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbb{R}^N$$

Для лн. коорг.  $(u^1, \dots, u^n)$  в ескі  $P$  моги  $\forall i=1, n$

$$d_P \psi \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} (P) \frac{\partial}{\partial x^a} = \psi_{u^i} (P) \quad (\text{при стандартній})$$

$\psi$  позначеннях, що ми вважали вище. Тут все недов'язково  $N \geq n$  і недов'язково виконується умова регулярності, але в дугі-ахому разі

$$d_P \psi (T_P M) = \text{span} \{ \psi_{u^i} (P) \}_{i=1}^n.$$

Але не умова регулярності виконується, то отже дугі  $T_P(M, \psi)$  і  $d_P \psi: T_P M \rightarrow T_P(M, \psi)$  — лн. ізоморфізм, що встановлює описану вище відповідність. Зокрема, згідно з означенням,  $\forall \gamma \in C^1((a, b), M)$  з  $P = \gamma(t_0)$

$$d_P \psi (\gamma'(t_0)) = (\psi \circ \gamma)'(t_0).$$

Отже,  $\forall T_P(M, \psi)$  для закрива  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$  — це ізоморфізм образи "абстрактного" дотичного простору  $T_P M$ .

Рем. Нехай  $(u, \varphi)$  - якась карта в околі  $p \in M$  (тобто  $p \in u$ ) з лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$ . Зокрема,  $x^i \in C^k(u)$  - ф-ції на  $u$ , і-та. Їх можна диференціювати так само, як і ф-ції на  $M$  у напрямках векторів  $v \in T_p M$ , а також знаходити диференціал (взагалі  $\forall$  відкр.  $V \subset M \forall p \in V \exists$  канонічний ізоморфізм між  $T_p V \subset T_p M$ , бо карти  $M$  в околі  $p$  відновлюють карти  $V$  - Впр.). Для фіксованої точки далі позначатимемо  $dx^i := d_p x^i \in T_p^* u \simeq T_p^* M$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Зокрема,  $\forall i, j = \overline{1, n} \quad dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} (x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} (p) = \delta_j^i$ .

Сол.  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  - це базис  $T_p^* M$ , дуальний до базису  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$   $T_p M$ .

Рем. Зокрема,  $\forall f \in C^k(M)$ ,  $v \in T_p M$  якщо  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ :

$$d_p f(v) = v(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i(v),$$

$$\text{бо } dx^i(v) = dx^i \left( v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = v^j dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = v^j \delta_j^i = v^i. \text{ Тому}$$

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i - \text{розкладена } d_p f \text{ за цим базисом.}$$

Дотимли вектори як диференціювання

$M$  -  $k$ -м. мношвид,  $k \geq 1$ ,  $\dim M = n$ .

def (2) Дотимлими векторами (го)  $M$  у точці  $p \in M$  зветься лінійне відображення (функціонал)

$v: C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , що задов. правило Лейбніца:

$$v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \quad \forall f, g \in C^k(M).$$

При цьому  $v(f)$  зветься похідною  $f$  за  $v$  (у напрямку  $v$ ).

Рем. Нагадаємо, що лінійність (тобто те, що  $v \in C^k(M)^*$  - лін. функціонал) означає, що

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \forall f, g \in C^k(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

На  $C^k(M)^*$   $\exists$  лінійна структура:  $\forall v, w \in C^k(M)^*$ ,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f \in C^k(M) \quad (\lambda v + \mu w)(f) := \lambda v(f) + \mu w(f)$

задає  $\lambda v + \mu w \in C^k(M)^*$  (Впр.), причому правило л.

зберігається: якщо тут  $v, w$  - дов. в-ри  $M$  у  $P$ , то

$\forall f, g \in C^k(M)$

$$\begin{aligned} (\lambda v + \mu w)(fg) &= \lambda v(fg) + \mu w(fg) = \lambda v(f) \cdot g(P) + \lambda f(P) \cdot v(g) + \\ &+ \mu w(f) \cdot g(P) + \mu f(P) \cdot w(g) = (\lambda v + \mu w)(f) g(P) + f(P) \cdot (\lambda v + \mu w)(g). \end{aligned}$$

Соч. Множина довільних векторів  $M$  у  $P$  утворює векторний підпростір у  $C^k(M)^*$ .

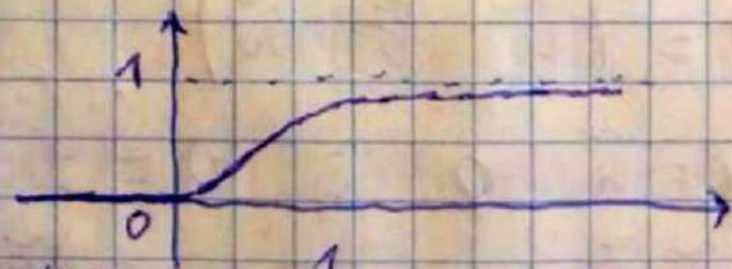
def. (2). Вект. пр-р довільних векторів  $M$  у  $P$  зветься довільним простором (до)  $M$  у  $P$  і позначається  $Tr M$ .

Рл.  $\forall P \in M \quad \forall$  довільн.  $U \ni P \quad \exists$  відкриті  $V, W : P \in W, \overline{W} \subset V$   
 $\overline{V} \subset U$  і  $\exists \varphi \in C^k(M) : \varphi(M) = [0, 1], \varphi(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M \setminus V$  та

$$\varphi(q) = 1 \Leftrightarrow p \in \overline{W}$$

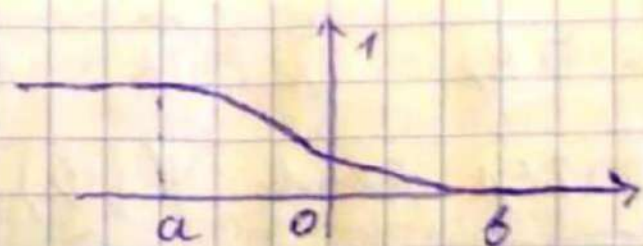
Реш. Це РЧ. Вірно і при  $k=0$ . Також  $\varphi$ -ці  $\varphi$  інаше з'являть  
мажорити  $\varphi$ -ці Грисона, то це  $\varphi$ -ці Грисона парі  
замкнених множин  $\overline{W}$ ,  $M \setminus V$  у загальноположіннєвій секції.

▷ Попробуем 3 функции  
 $\alpha(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$



Основной  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  покажем  $(e^{-\frac{1}{t}})^{(k)} = e^{-\frac{1}{t}} p_k(\frac{1}{t}) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$  (где  $p_k$  - некоторый полином),  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Кроме того,  $\alpha(+\infty) = 1 - 0$ .  
Для  $a < b \in \mathbb{R}$  введем

$$\beta_{a,b}(t) := \frac{\lambda(b-t)}{\lambda(b-t) + \lambda(t-a)}$$



3 властивостей  $\lambda$ :

$\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\beta(\mathbb{R}) = [0, 1]$ ,  $\beta(t) = 0 \Leftrightarrow t \geq b$ ,  $\beta(t) = 1 \Leftrightarrow t \leq a$ .

Отже, дані  $p \in U \ni p$ . Нехай  $(\tilde{U}, \psi)$  - карта  $M$  з  $p \in \tilde{U}$ .

Тоді  $\psi(\tilde{U} \cap U)$  - відкр. окіл  $\psi(p)$  у  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(\psi(p)) \subset \psi(\tilde{U} \cap U)$  (евклідова куля, як завжди,  $n = \dim M$ ).

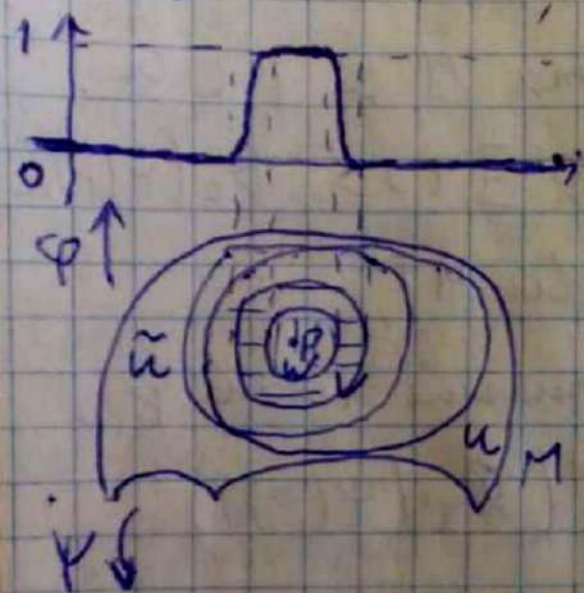
Позначимо  $\tilde{B}_\epsilon(p) := \psi^{-1}(B_\epsilon(\psi(p)))$  - відкритий окіл  $p$ ,  
 $\tilde{B}_{\epsilon'}(p) \subset U \cap \tilde{U} \quad \forall \epsilon' \in (0, \epsilon]$ ;  $\tilde{D}_\epsilon(p) := \psi^{-1}(D_\epsilon(\psi(p)))$ .

Оскільки  $D_\epsilon(\psi(p))$  - компакт в  $\mathbb{R}^n$ ;  $\psi$  - гомео-зм.,  
 $\tilde{D}_\epsilon(p)$  - компакт (у індукованій топ.  $\tilde{U}$ , а отже і у  $M$ ),

в силу хаусдорфовості,  $\tilde{D}_\epsilon(p)$  - замкнена, тому  
 $\tilde{B}_\epsilon(p) \subset \tilde{D}_\epsilon(p)$  (бо, звичайно,  $\tilde{B}_\epsilon(p) \subset \tilde{D}_\epsilon(p)$ ).

Доведено обернене включення:  $\forall q \in \bullet \tilde{D}_\epsilon(p)$  і

$\forall$  вікр.  $\tilde{u} \ni q$   $\tilde{u} \cap \tilde{u}$  - вікр. олії  $q$ , тому  
 $\Psi(\tilde{u} \cap \tilde{u})$  - вікр. олії  $\Psi(q) \in \mathcal{D}_\psi(\Psi(P))$  у  $\mathbb{R}^n$ . Оскільки  
 $\mathcal{D}_\psi(\Psi(P)) = \overline{B_\psi(\Psi(P))}$ ,  $\Psi(\tilde{u} \cap \tilde{u}) \cap B_\psi(\Psi(P)) \neq \emptyset$ , за сто-  
 совності  $\Psi^{-1}$ , отримуємо  $\tilde{u} \cap \tilde{u} \cap \tilde{B}_\psi(P) \neq \emptyset$ . Оскільки  
 $\tilde{u} \cap \tilde{B}_\psi(P)$



$\tilde{u}$  - довільний вікр. олії  $q$ , де і означає  
 $q \in \tilde{B}_\psi(P)$ .

Отже,  $\forall u' \in \mathcal{U}$   $\tilde{\mathcal{D}}_{u'}(P) = \tilde{B}_{u'}(P) \subset \tilde{B}_\psi(P) \subset \tilde{u} \cap \tilde{u}$ .

Поклинемо:

$$W := \tilde{B}_{\frac{\psi}{3}}(P), \quad V := \tilde{B}_{\frac{2\psi}{3}}(P).$$

За побудовою, вони вікриті,  $P \in W$  і  
 $\overline{W} = \tilde{\mathcal{D}}_{\frac{\psi}{3}}(P) \subset \tilde{B}_{\frac{2\psi}{3}}(P) = V$ ,  $\overline{V} = \tilde{\mathcal{D}}_{\frac{2\psi}{3}}(P) \subset \tilde{u}$ .

Нарешті, побудуємо  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\varphi(q) := \begin{cases} \beta_{\frac{\psi}{3}, \frac{2\psi}{3}}(|\Psi(q) - \Psi(P)|), & q \in \tilde{u}; \\ 0, & q \notin \tilde{u} \end{cases}$$

$\nwarrow$  1.1 - свм. норма

Оскільки  $\tilde{U} \subset M \setminus \bar{V}$  утворюють відкр. покриття  $M$ ,  
 $\varphi$   $k$ -магма на  $\tilde{U}$  (бо  $\psi$  -  $k$ -магний функто-р, а  $\beta$  і  
 $|\cdot|$  -  $\infty$ -магні) і  $\varphi = 0$  на  $M \setminus \bar{V}$  за побудовою - то макс.  
 магності  $k$ ,  $\varphi$  неперервна і  $k$ -магма на  $M$  (бо це  
 локальні властивості). З властивостей  $\beta$  випливає, що  
 $\varphi(M) = [0, 1]$ ,  $\varphi = 1$  в точності на  $\tilde{\Phi}_{\frac{1}{3}}(P) = \bar{U}$  і  $= 0$  в  
 точності на  $M \setminus \tilde{B}_{\frac{2}{3}}(P) = M \setminus V$ .  $\triangle$

Рл. 1. (локальність диференціювання). Нехай  $f, g \in C^k(M)$ ,  
 $U$  відкр. і  $f|_U = g|_U$ . Тоді  $\forall p \in U \forall v \in T_p M \quad v(f) = v(g)$ .

► Застосуємо до  $p \in U$  попереднє Рл. і отримавши  
 $V, W, \varphi$  як у теоремі. Тоді  $\varphi$ -ція  $h := \varphi(f - g) = 0$ , бо  
 $f - g = 0$  на  $U$  і  $\varphi = 0$  на  $M \setminus U$ . В силу лінійності,

$$0 = v(h) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{(правило Лейбніса)}}}{=} v(\varphi) \cdot \underbrace{(f(p) - g(p))}_0 + \underbrace{\varphi(p)}_1 \cdot (v(f) - v(g)) \Rightarrow v(f) = v(g) \quad \triangle$$

Рем.  $\sigma(f) = 0$  не тільки для  $f = 0$  (за лінійністю), а й для  $\forall$  постійної  $\sigma$ -ф-ції  $f = C \in \mathbb{R}$ . Дійсно, для  $f = g = 1$  за пр. 1.  $\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1) \cdot 1 + 1 \cdot \sigma(1) = 2\sigma(1) \Rightarrow \sigma(1) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  [лінійність]  $\Rightarrow \sigma(C) = C \sigma(1) = 0$ .

Рл. 2. Нехай  $U$ -відкр.,  $f \in C^k(U)$ . Тоді  $\forall p \in U \exists \bar{f} \in C^k(M)$  і відкр.  $W \subset U : p \in W$  і  $f|_W = \bar{f}|_W$ .

▷ Знову застосуємо Рл. до  $U$  і  $p$ , візьмемо  $V, W$  та  $\varphi$  згідно.

Покладемо 
$$\bar{f}(q) := \begin{cases} \varphi(q) f(q), & q \in U \\ 0, & q \notin U \end{cases}$$

Помітимо, що  $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi f = 0$  на  $U \setminus V$ , зокрема на відкритій  $U \setminus \bar{V}$ . Оск.  $\{U, M \setminus \bar{V}\}$  - відкр. покриття  $M$ ,  $\varphi f$  і  $0$  неперервні на цих множинах відносно та рівні на  $U \cap (M \setminus \bar{V}) = U \setminus \bar{V}$ ,

$\bar{f}$  коректно визначена і неперервна:  $\bar{f} \in C(M)$  (Впр.) Більше того, оск.  $\varphi f, 0 \leq k$ -м. на  $\text{figr. } U, M \setminus \bar{V}$   $\text{figr.}$ ,  $\bar{f} \in C^k(M)$ , то магість - локальна властивість. При  $q \in W$   $\varphi(q) = 1 \Rightarrow \bar{f}(q) = f(q)$   $\triangle$

Рем. Подімо для  $f$   $\varphi$ -ція  $\bar{f} \in C^k$  "частковий продовження" на  $M$ : вона  $= f$  на  $U$ , локально, деяким  $W \subset U$   $\bar{f}$  області  $\text{figr.}$  Показано для  $v \in \text{Tr} M$   $v(f) := v(\bar{f})$ . В силу л. 1.,  $v(f)$  не залежить від вибору (часткового) продовження  $\bar{f}$ . При цьому  $v: f \in C^k(U) \mapsto v(f)$  задов. def (2), тобто це  $k$ -м  $\text{Tr} U$ , що відповідає  $v \in \text{Tr} M$  (Впр.) і навпаки: для  $v \in \text{Tr} U$  і  $f \in C^k(M)$  покладено  $v(f) := v(f|_U)$ , де  $f|_U \in C^k(U)$ . Ця відповідність  $\text{figr.}$  та лінійна (Впр.).

Соч.  $\exists$  природний (канонічний) лін. ізоморфізм між  $T_p M$  і  $T_p U$   $\forall p \in M$  та відкр.  $U \ni p$ .

Еск. 2. Для кожної  $p \in M$ ,  $(U, \varphi)$ -карта з  $U \ni p$  і лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  для  $f \in C^k(M)$ ,  $i = \overline{1, n}$  покладемо  $\frac{\partial}{\partial x^i} (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i} (p)$  (тобто  $\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi(p))$ ). Тоді  $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$  в силу властивостей частинних похідних.

Рз. 3.  $\forall p \in M$ , карти  $(U, \varphi)$  з  $U \ni p$  і лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  та  $v \in T_p M \exists!$   $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ :  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Д. Якщо відомо, що  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , то  $\forall j = \overline{1, n}$   $v(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} (p) = v^i \delta^j_i = v^j$  однозначно визначає  $v^1, \dots, v^n$  (тут використали Соч. вище, ототожнюючи  $T_p M$  і  $T_p U$ ).

З. Покладемо тепер  $v^i := v(x^i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  (знову ототожнюючи  $T_p M$  і  $T_p U$ ).

Лем. (Агмар)  $\forall f \in C^k(M) \exists f_1, \dots, f_n \in C^{k-1}(U)$ :

$$f|_U = f(p) + f_i \cdot (x^i - x_0^i),$$

де  $(x_0^1, \dots, x_0^n) = \varphi(p)$  - координати точки  $p$ .

$\Rightarrow \forall (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$$(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) - \underbrace{(f \circ \varphi^{-1})(x_0^1, \dots, x_0^n)}_{f(p)} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( (f \circ \varphi^{-1})(tx^1 + (1-t)x_0^1, \dots, tx^n + (1-t)x_0^n) \right) dt = (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\dots) dt. \text{ Покладемо}$$

для  $i = \overline{1, n}$   $f_i(q) := \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (t\varphi(q) + (1-t)\varphi(p)) dt, q \in U$ ,  
отримасмо потрібне (Впр.  $f_i \in C^{k-1}(U) \forall i$ ). Лем.

Застосуємо цю Лем. (враховуючи отождествлення  $T_p M$  і  $T_p U$ ):

$$\nu(f) = \nu(f|_U) = [\underline{\text{det. (2.1)}}] = \underbrace{\nu(f(p))}_{\text{до } f(p) \in \mathbb{R}\text{-конст.}} + \nu(f_i) \cdot \underbrace{(x^i(p) - x_0^i)}_{\text{до конст.}} + f_i(p).$$

$\cdot (\underbrace{\nu(x^i)}_{\text{до конст.}} - \underbrace{\nu(x_0^i)}_{\text{до конст.}}) = \nu^i f_i(p)$ . Оскільки  $f_i - (k-1)$ -л., для цього  
доведення формально потрібно  $k \geq 2$ . Впр. що буде при  $k=1$ ?

Зокрема, при  $v = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$ ,  $\bar{j} = \overline{1, n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}} (f) = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}} (x^{\bar{i}}) f_{\bar{i}}(p) = \delta_{\bar{j}}^{\bar{i}} f_{\bar{i}}(p) = f_{\bar{j}}(p), \text{ тобто у зм. вим.}$$

$$v(f) = v^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} (f) \quad \forall f \Rightarrow v = v^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}. \quad \triangle$$

Соч.  $\forall$  лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  в околі  $p$   $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$  - базис  $T_p M$ . Зокрема,  $\dim T_p M = n = \dim M$ .

Вп. 4. Нехай  $p \in M$ ,  $p \in U \cap \tilde{U}$ , де  $(U, \varphi)$ ,  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  - карти з лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  і  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$  вим.,  $v \in T_p M$  - дов. в. і  $v = v^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} = \tilde{v}^{\tilde{i}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}$  - його координатний розкладення за вим. базисами. Тоді

$$\tilde{v}^{\tilde{i}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (p) v^{\bar{j}} \quad \forall \bar{i} = \overline{1, n} \quad (*)$$

де, як і раніше,  $\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (p) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^{\tilde{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} (\varphi(p))$  - частк. пох. коорд.  $\varphi$ -їм віднош. переносу.

► За гомеоморфізм Рч. 3.,  $\forall i = \overline{1, n}$   
 $\tilde{v}^i = v(\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p)$

(тут ототожнюємо  $T_p M, T_p U \leftarrow T_p \tilde{U}$ ).  $\triangle$

Лем. Ан-но або як наслідок (Вопр.):  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j}, i = \overline{1, n}$ .

Сол. Означення дотичних вектора і простору def( $z$ ),  
 з цього розгляду і дане нарисе def еквівалентні, маємо  
 $\exists$  призначити лін. ізоморфізм

$T_p M$  (у сенсі def( $z$ ))  $\leftrightarrow T_p M$  (у сенсі def, маємо вибір.  
 $\{ \text{карти в околі } p \} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  
 що задов. (\*)).

► Дійсно,  $\forall v \in T_p M$  у сенсі def( $z$ ) (маємо диференціювання)  
 і карти  $(U, \varphi)$  з  $U \ni p$  і лок. коорд.  $(x^1, \dots, x^n)$  розглянемо  
 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  (Рч. 3.) і покладемо  $v((U, \varphi)) := (v^1, \dots, v^n)$ .

В силу Р.4., при переходе до иной карты в ок. (\*),  
 можно однозначно  $v \in T_p M$  и сенси диф.  $\gamma$  наложить,  
 $\forall v \in T_p M$  и сенси диф. гиперопределенная  $v: C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  
 $f \mapsto v(f)$  и сенси равномерно диф. загов. диф. (2). При этом  
 актуально  $v((u, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$  для карты в окрестности  $p$  с лок. коорд.  
 $(x^1, \dots, x^n)$ , то  $\forall i = \overline{1, n}$   $v(x^i) = v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} (p) = v^j \delta^i_j = v^i$ ,  
 можно также визуализировать — одержана до равномерно

Рем.  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  могут визуализировать равномерно подготовлено (Р.4)  
Рем. Равномерно актуально визуализировать, что визуализировать  $\gamma \in C^k([a, b], M)$ ,  
 $t_0 \in (a, b)$  вектор  $\gamma'(t_0) \in T_p M$  где  $\gamma$  сенси диф. (2) визуализировать.  
 $\gamma'(t_0): C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$ .  
 Звучит, что можно визуализировать за диф.  $\gamma'(t_0)$  и сенси

def. (2). , Безпосередньо перевіривши вимогання умов (Впр.),  
і так само маємо  $T_p M = \{ \gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a, b), M) : \gamma(t_0) = p \}$ .

Впр. Аналогічно до попереднього Соч. показати еквіва-  
лентність між раніше запропонованим третім означен-  
ням вектора

(def. (3). Будемо називати <sup>м.</sup>криві  $\gamma \in C^k((a, b), M)$  і  $\mu \in C^k((c, d), M)$  еквівалентними у  $p \in M$ , якщо  $\exists t_0 \in (a, b)$ ,  $s_0 \in (c, d)$  такі, що  $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$  і  $\forall f \in C^k(M)$   
 $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$ . Клас екв-нті <sup>м.</sup>кривих у  $p$   
назвемо тангентним вектором  $M$  у  $p$ .)

і def. (2). :

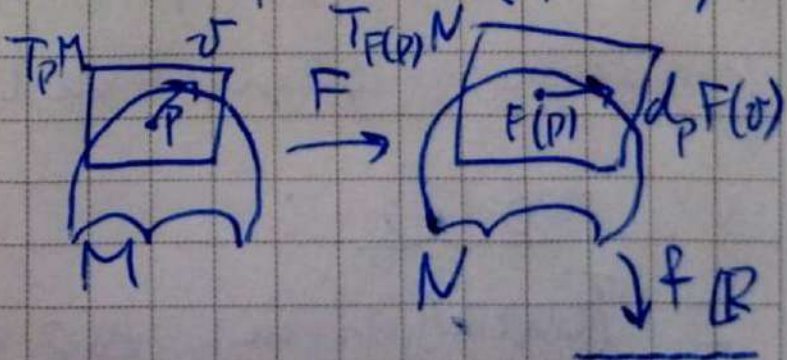
1. Показати, що це дійсно впр. екв-нті.

2. Ввести на множині класів єв-ті структуру вект. простору.
3. Побудувати природний лім. із-м між цим пр-ком і  $T_p M$  у сенсі def. (2).

Впр. Побудувати природний лім. із-м між просторами  $T_{(p,q)} M \times N : T_p M \oplus T_q N \quad \forall (p,q) \in M \times N$  (у сенсі будь-якого з означень).

def. (2). Нехай  $M, N$  -  $k$ -м. многовиди,  $F \in C^k(M, N)$  ( $k \geq 1$ ). Диференціалом  $F$  у  $p \in M$  зветься  $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N : v \mapsto (d_p F(v) : f \mapsto v(f \circ F))$ .

Рем. Нумо  $f \in C^k(N) \Rightarrow f \circ F \in C^k(M)$ , тому  $d_p F(v) : C^k(N) \rightarrow \mathbb{R}$  коректно визначене.



Визн. Керівництвом визначено, що  $d_p F(v) \in T_{F(p)} N$   
у сенсі def. (2), можна лінійне й задоволює праву  
лейбніца, і що  $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  лінійне.

Це також викликає зі встановленого раніше і на-  
ступного спостереження:

Роз. Представимо  $v \in T_p M$  як дотичний до кривої:  
 $v = \gamma'(t_0)$ ,  $\gamma \in C^k(a, b, M)$ ,  $\gamma(t_0) = p$ . Тоді  $\forall f \in C^k(N)$   
 $d_p F(v)(f) = v(f \circ F) = \gamma'(t_0)(f \circ F) = ((f \circ F) \circ \gamma)'(t_0) =$   
 $= (f \circ (F \circ \gamma))'(t_0) = (F \circ \gamma)'(t_0)(f)$ , тобто  $d_p F(v) = (F \circ \gamma)'(t_0)$ .

Спр. def. (2) збігається з раніше даним def. функціо-  
нала  $d_p F$ , якщо ототожнити  $T_p M$  і  $T_{F(p)} N$  у  
сенсі def. (2) і раніше def. в даній нотат. Спр.

(Більше точно, диференціали в сенсах цього вфос означають  
комутують з ізоморфізмами з понер. Сон.

Впр. Записати і показати це точно.)

Рем. Звідси не отримуюємо і запис  $d_p F$  у лок. Записках.

Впр. Довести ланцюгове правило  $d_p(F \circ G) = d_{G(p)} F \circ d_p G$   
для  $G \in C^k(M, N)$ ,  $F \in C^k(N, L)$ ,  $p \in M$ , використовуючи def. (2).

Рем.  $d_p F$  це означають  $(F_*)_p$ ,  $dF_p$ ,  $\mathbb{Q}F_p$ , ...

Впр. Чи може диференціали кривої  $\gamma \in C^k(a, b, M)$ :  
функції  $f \in C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$  з точни зору def. (2)?