

Лекції з топології

Петров Є.В.

6 вересня 2025 р.

Зміст

1	Топологічний простір. Околи	2
	Література	6

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що будуються за допомогою неперервних відображень, та інваріанти цих відношень. Стандартним підходом до введення цих концепцій є використання поняття топологічного простору.

1 Топологічний простір. Околи

Означення 1.1. Нехай X – довільна множина. *Топологією* на X зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин X , що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.
3. Порожня множина і сама множина X належать до $\mathcal{T}$: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини X , що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в X відносно топології $\mathcal{T}$).

Зауваження. У позначеннях вище A – множина індексів (довільної потужності), n – натуральне число. Перераховані вимоги 1.–3. часто називають *аксіомами топології*. Інколи аксіому 3. виводять з перших двох, використовуючи стандартні узгодження теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині X йдеться, ми будемо опускати її явне позначення і говорити просто про топологічний простір X . Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками*.

Означення 1.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина U (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

Твердження 1.1. *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

$\Leftarrow$ Перевіримо достатність. Нехай для кожної точки $x \in U$ множина U є околом x , тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в U , бо кожна з них міститься в U :

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup_{x \in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою 1. ■

Зауваження. У деяких джерелах поняття "окіл x " означає "відкритий окіл x ", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить x . Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна справа).

Наведемо деякі класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів.

Приклад 1.1. Нехай X – довільна множина. В якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ясно, що аксіоми 1–3 для такої сукупності виконані, тому вона утворює топологію на X , що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на X .

Приклад 1.2. Нехай X – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин X (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми 1–3 виконані, й система $\mathcal{T}$ утворює топологію на X . Її називають *дискретною* топологією на X .

Приклад 1.3. Нехай множина X складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин X , які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}, \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ зветься топологіями зв'язної двокрапки.

Вправа 1.1. Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

Приклад 1.4. Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0: (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким ε -околом. Перевіримо, що ця сукупність утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Тому $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$

тому

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

отже $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (*природною, натуральною, евклідовою*) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. нижче у розділі 7).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервалу $x \in (a, b)$ можна взяти $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, для напівнескінчених інтервалів усе ще простіше. З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ не міститься у $[a, b)$. Зауважимо, що $[a, b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Література

- [1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.
- [2] Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2025.
- [3] М.А. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.
- [4] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995. Переклад: Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
- [5] С. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.
- [6] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2012 (at www.topologywithouttears.net).
- [7] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.