

1. Топології та коомології алгебраїчних комплексів

Топології (точніше топології та коомології) - це цілий клас алгебраїчних ^{гомоморфізмів} об'єктів, що ставлять у відповідність топ. простору X (можливо, з певного класу) набір абелевих груп (кілець, модулів, векторних просторів...). Вони будуються за певними спільними правилами та мають спільні властивості, з якими потрібно познайомитися спочатку.

def. 1.1. Лапласовими (фігн., коларисовими) комплексом зв. набір абелевих груп $\{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$) та їх гомоморфізмів $\{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$) таких, що $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ ($d^{k+1} \circ d^k = 0$) $\forall k \in \mathbb{Z}$. Будемо позначати $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($C^* = \{C^k, d^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$):

$$C_* : \dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \rightarrow \dots$$

$$C^* : \quad \dots \xrightarrow{d^{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \xrightarrow{d^{k+2}} \dots$$

$C_k(C^*)$ зветься k -тою групою ланцюгів (кочланцюгів) (або (ко)ланцюговою групою) комплексу, $\partial_k(d^k)$ - k -тий ^{(ко)гратинг} гомоморфізм, $k \in \mathbb{Z}$. Комплекс зветься скінченним, якщо $C_k \neq \{0\}$ ($C^k \neq \{0\}$) лише для скінченного числа k . Комп. зв. невід'ємним, якщо $C_k = \{0\}$ ($C^k = \{0\}$) для всіх $k < 0$ (ан-но можна визначити додатний, недодатний ...).

Рем. Далі всієї за змислування - саме такі позначення.

Лем. 1.2. k -тою групою (ко)циклів (ко)ланцюгового комплексу $C_*(C^*)$ зветься $Z_k(C_*) := \ker \partial_k$ ($Z^k(C^*) := \ker d^k$). k -тою групою (ко)границь $C_*(C^*)$ зв. $B_k(C_*) := \text{Im } \partial_{k+1} = \partial_{k+1}(C_{k+1})$ ($B^k(C^*) := \text{Im } d^{k-1} = d^{k-1}(C^{k-1})$), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Рем. За власт. $\ker$ та Im , $Z_k(C_*)$, $B_k(C_*) \subset C_k(Z^k(C^*))$.

$B^k(C^*) \subset C^k$ - підгрупи $\forall k$. Оскільки $d^k \circ d^{k+1} = 0$
 ($d^k \circ d^{k+1} = 0$), $B_k(C^*) \subset Z_k(C^*)$ ($B^k(C^*) \subset Z^k(C^*)$) і
 є підгрупами в них $\forall k$. Оскільки групи абелеві, усі
 ці підгрупи нормальні.

def. 1.3. k -та група (короткоточка) (ко)ланцюгового комплексу
 $C_*(C^*)$ для $k \in \mathbb{Z}$ зветься

$$H_k(C^*) := Z_k(C^*) / B_k(C^*) \quad \left(H^k(C^*) := Z^k(C^*) / B^k(C^*) \right).$$

Рем. За побудовою, це теж абелеві групи. Дати означення
 про ланцюгові комплекси, на коланцюгові це все пере-
 носиться зрозумілим чином.

def. 1.4. Морфізми ланцюгових комплексів $C_*^1 = \{C_k^1, d_k^1\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 і $C_*^2 = \{C_k^2, d_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ зв. парі гомоморфізмів $f_* = \{f_k: C_k^1 \rightarrow$
 $\rightarrow C_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (будемо писати $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$) таких, що $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\partial_k^2 \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^1$ побто діаграма (взаємні компати, комутативна)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \partial_{k+1}^1 & & \partial_k^1 & & \partial_{k-1}^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & C_k^1 & \xrightarrow{\partial_k^1} & C_{k-1}^1 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & C_k^2 & \xrightarrow{\partial_k^2} & C_{k-1}^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

$\in$ комутативного. Лем. Тоді, комплекси і морфізми — це теж категорія!

Лем. 1.1. Нехай $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ — морфізм ланцюгових комплексів. Тоді $f_k(Z_k(C_*^1)) \subset Z_k(C_*^2)$, $f_k(B_k(C_*^1)) \subset B_k(C_*^2)$, а відображення $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2): a + B_k(C_*^1) \mapsto f_k(a) + B_k(C_*^2)$ коректно визначене і $\in$ гомоморфізмом груп $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Лем. Оскільки групи абелеві, для суміщення класів за рівнянням використовується адитивна позначення.

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}: a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow \partial_k^2 f_k(a) = f_{k-1}(\partial_k^1 a) = 0$, бо $\partial_k^1 a = 0$, тому $f_k(a) \in Z_k(C_*^2)$.

$$a \in B_k(C_*^1) \Rightarrow \overset{\exists b:}{\forall} a = \partial_{k+1}^1 b, \quad b \in C_{k+1}^1 \Rightarrow f_k(a) = f_k(\partial_{k+1}^1 b) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(b) \in B_k(C_*^2).$$

Коректність: $a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1) \Rightarrow a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow f_k(a) \in Z_k(C_*^2) \Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) \in H_k(C_*^2)$ за гомоморфізму.

$$a + B_k(C_*^1) = b + B_k(C_*^1) \Rightarrow \exists c \in C_{k+1}^1 : a - b = \partial_{k+1}^1 c,$$

f_k -гом-зм $\Rightarrow f_k(a) - f_k(b) = f_k(a - b) = f_k(\partial_{k+1}^1 c) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(c) \in B_k(C_*^2)$ (повторили гомоморфізм вище) $\Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) = f_k(b) + B_k(C_*^2).$

Гомоморфізм, бо f_k -гом-зм: $\forall a, b \in Z_k(C_*^1)$

$$f_{k*}((a + B_k(C_*^1)) + (b + B_k(C_*^1))) = f_{k*}(a + b + B_k(C_*^1)) = f_k(a + b) + B_k(C_*^2) = f_k(a) + f_k(b) + B_k(C_*^2) = (f_k(a) + B_k(C_*^2)) + (f_k(b) + B_k(C_*^2)) = f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) + f_{k*}(b + B_k(C_*^1)). \quad \triangle$$

лев. 1.5. Товариство, що гом-зм груп гомологій $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2)$, $k \in \mathbb{Z}$ (як у поперед. лв.) індукують морфізми $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$.

Лем. За побудовою, якщо $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ і $g_*: C_*^2 \rightarrow C_*^3$ - морфізми, то $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (g_k \circ f_k)_* = g_{k*} \circ f_{k*}$. Якщо $f_*: C_* \rightarrow C_*$ - тождествний морфізм, тобто $f_k = \text{id}_{C_k}$ $\forall k$, то $f_{k*} = \text{id}_{H_k(C_*)}$.

Лем. 1.6. Алгебраїчного гомоморфізму між морфізмами ланцюгових комплексів f_* і $g_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ зветься набір гомоморфізмів $\{\Phi_k: C_k^1 \rightarrow C_{k+1}^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такий, що $\forall k \in \mathbb{Z}$
 $f_k - g_k = \partial_{k+1}^2 \circ \Phi_k + \Phi_{k-1} \circ \partial_k^1$ або $\partial_{k+1}^2 \circ \Phi_k - \Phi_{k-1} \circ \partial_k^1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \partial_{k+2}^1 & & 1 & \partial_{k+1}^1 & & 1 & \partial_k^1 & & 1 & \partial_{k-1}^1 & & \dots \\
 \dots & \rightarrow & C_{k+1}^1 & \xrightarrow{\quad} & C_k^1 & \xrightarrow{\quad} & C_{k-1}^1 & \rightarrow & \dots & & & \\
 & & \searrow \Phi_k & & \downarrow f_k, g_k & & \swarrow \Phi_{k-1} & & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}^2} & C_{k+1}^2 & \xrightarrow{\partial_{k+1}^2} & C_k^2 & \xrightarrow{\partial_k^2} & C_{k-1}^2 & \rightarrow & \dots & & &
 \end{array}$$

$$(f_k - g_k)_* =$$

Лем. 1.2. Якщо $\exists$ алг. гомоморфізм між f_* і g_* , то
 $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f_{k*} = g_{k*}$.

► Діємо, $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1)$ (зокр., $a \in Z_k(C_*^1)$):

$$\begin{aligned} (f_{k*} - g_{k*})(a + B_k(C_*^1)) &= (f_k - g_k)(a) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{Q}_k(a) \pm \\ &\pm \mathcal{Q}_{k-1}(\underbrace{\partial_k^1 a}_0) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{Q}_k(a) + \underbrace{B_k(C_*^2)}_{=0} = 0 + B_k(C_*^2), \end{aligned}$$

тобто $f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) = g_{k*}(a + B_k(C_*^2))$. $\triangle$