Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Є. В. Петров

ТОПОЛОГІЯ
Базовий курс

Навчальний посібник з топології
для студентів математичних факультетів університетів

Харків – 2025

УДК 515.12 (075.8)
П23

Автор:

Є.В. Петров – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

Рецензенти:

Д. В. Болотов – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу геометрії і диференціальних рівнянь Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Вєркіна Національної академії наук України;

О. Л. Ямпольський – доктор фізико-математичних наук, професор закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № ___ від __.__.2025 р.)

Петров Є. В.

П23 Топологія. Базовий курс: навчальний посібник з топології для студентів математичних факультетів університетів /Є. В. Петров. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – 221 с.

Навчальний посібник присвячено викладенню основних теоретичних відомостей з курсу топології для студентів математичних спеціальностей. Він містить інформацію із загальної топології, елементи алгебраїчної топології (фундаментальна група і накриття), топології многовидів та поверхонь.

Посібник включає достатню кількість вправ та задач різного рівня складності. Його матеріал доповнюють короткий вступ до теорії груп, предметний покажчик та список літератури.

Навчальний посібник відповідає програмі курсу топології факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Посібник призначено для використання при читанні лекцій, проведенні практичних занять та для самостійної роботи з топологічних курсів.

УДК 515.12(075.8)

Зміст

Вступ

Топологія, як загальна дисципліна, що вивчає неперервність та пов'язані з нею інваріанти, займає одне з центральних місць у математиці та сучасній математичній освіті. Посібник заснований на кількарічному досвіді викладання базового курсу топології студентам факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна та містить детальне викладення тем цього курсу, що включають загальну топологію, елементи алгебраїчної та геометричної топології в об'ємі, якій необхідний для вивчення подальших аналітичних та геометричних курсів. Зміст посібника, що детально буде описаний нижче, відповідає робочій програмі курсу "Топологія" освітньої програми "Математика" ХНУ імені В.Н. Каразіна, а також містить додаткові теми з загальної та алгебраїчної топології. Тому посібник можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей для вивчення курсів топології, об'єднаних курсів диференціальної геометрії та топології, а також частково для курсів, що пов'язані з алгебраїчною топологією.

Розділ 1 присвячений основним поняттям: топологічним та метричним просторам, неперервним відображенням, гомеоморфності, ідеї топологічного інваріанта й першим прикладам таких інваріантів. Розділ 2 починається з розгляду прикладів та варіантів найважливіших топологічних конструкцій: добутку та факторпростору. Після цього ми детально зупиняємося на загальнотопологічних інваріантах з трьох основних груп: відокремлюваності, компактності та зв'язності, розглядаючи їхні властивості та приклади застосування. Зокрема, у зв'язку з аксіомами відокремлюваності ми доводимо лему Урисона та виводимо з неї теореми Тітце про продовження, Урисона про вкладення і метризацію. На жаль, цей складніший матеріал при реальному викладанні часто доводиться пропускати. У розділі 3, що може бути використаний як у базовому, так і у спеціалізованих курсах з алгебраїчної топології, розглянуті дві, на нашу думку, дуже суттєві для математичної культури (зокрема, для подальшого загального курсу комплексного аналіза) теми: фундаментальна група та накриття. Детально розбираються питання обчислення фундаментальної групи за допомогою універсальних накрить, а також її застосування для доведень таких класичних фактів, як теореми Брауера (у двовимірному випадку) та Борсука – Уляма. Ми з самого початку використовуємо поняття дії групи на множині при побудові прикладів факторпросторів (зокрема, торів та дійсних проєктивних просторів), що дозволяє на цьому етапі відносно нескладно описати їхні універсальні накриття і обчислити фундаментальні групи. Деякі більш складні результати, що стосуються накрить, наведені без доведень. Нарешті, у розділі 4 ми викладаємо основні факти про многовиди, наводячи їх приклади та ілюстрації застосування до дослідження многовидів методів, що були розвинені у попередніх розділах. Після цього ми формулюємо класичну теорему класифікації компактних зв'язних поверхонь, коротко обговорюємо ідею її доведення та необхідні для цього поняття і надаємо посилання на різні способи доведення.

Викладення у посібнику орієнтується на діючі навчальні плани освітньої програми "Математика", тому вважаються відомими лише поняття з теорії множин, першого року вивчення математичного аналіза, лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Зокрема, спираючись на досвід, ми не очікуємо попереднього знайомства студентів з поняттями та прикладами теорії груп і тому викладаємо їх у необхідному обсязі (без доведень, але з посиланнями на літературу) у доповненні. Детальний предметний покажчик, що включає також стандартні позначення для просторів та груп, що розглядаються, доповнює довідковий апарат посібника. Список літератури містить підручники зі згаданих базових курсів, книги з топології та інші джерела, що можна використовувати як додатковий матеріал. Всюди, де це можливо, ми посилаємося на тексти українською, в інших випадках використовуємо англомовні. Номери сторінок і розділів у книжках дані за цитованими виданнями. Детальніші літературні рекомендації наведені у вступах до розділів. Окремо хотілося б згадати книгу члена-кореспондента НАН України Олександра Борисенка "Диференціальна геометрія і топологія", що є першим підручником з цих предметів у сучасній Україні та з якої почалося викладення курсу топології у ХНУ імені В.Н. Каразіна, на традиції котрого ми спиралися.

Посібник містить певну кількість вправ та задач до усіх розглянутих тем. Найпростіші з них знаходяться у тексті доведень та прикладів та позначені примітками у дужках на кшталт "чому?" або "покажіть це". Такі примітки означають, що у цьому місці читачу треба зупинитися й відтворити пропущений елемент доведення. Інші завдання виділені у окремі вправи з номерами. Вони можуть бути доволі різної складності, включно з нетривіальними задачами. Ми не збираємо вправи разом, а розміщуємо у тих місцях текста, до якого вони відносяться, як це зазвичай робиться при читанні лекцій. Деякі складніші задачі містять підказки або посилання на розв'язки.

Автор волів би висловити подяку Олександру Ямпольському за попереднє обговорення посібника, цінні поради та зауваження, а також Шону Нго, Олексію Колупаєву та їх одногрупникам за детальні конспекти та підготовку першої електронної версії цих нотаток.

Розділ 1

Основні поняття: простори та неперервні відображення

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що пов'язані з неперервними відображеннями, та інваріанти цих відношень. У наш час стандартним підходом до введення цих концепцій є використання топологічних просторів. Даний розділ присвячений ознайомленню з цим та безпосередньо пов'язаними з ним поняттями, формулюванню умов неперервності відображення у термінах топологічних просторів, а також важливому окремому класу топологічних просторів – метричним просторам. Розділ завершується розглядом гомеоморфності, що є одним з найголовніших відношень еквівалентності у топології, та топологічних інваріантів. У якості підручників, що покривають весь матеріал даного курсу або його більшу частину, рекомендуються [2], [7], [8] (українською), [20] та [24] (англійською). Також корисним є альтернативний підхід до викладення курсу основ топології у книзі [10], що містить багато цікавого матеріалу.

1.1 Топологічний простір. Околи. Замкнені множини. Порівняння топологій

У цьому курсі ми будемо користуватися стандартними поняттями, позначеннями та концепціями (наївної) теорії множин, за замовчуванням вважаючи виконаними усі додаткові умови, що можуть знадобитися у конкретних означеннях чи доведеннях (такі як аксіома вибору). Почнемо з базових понять:

Означення 1.1.1. Нехай X – довільна множина. *Топологією* на X зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин X, що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$,

тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

<u>3.</u> Порожня множина і сама множина X належать до $\mathcal{T}$: $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини X, що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в X відносно топології $\mathcal{T}$).

У позначеннях вище A – множина індексів (довільної потужності), n – натуральне число. Перераховані вимоги <u>1.</u>–<u>3.</u> часто називають *аксіомами топології*. Інколи аксіому <u>3.</u> виводять з перших двох, використовуючи стандартні домовленості теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині X йдеться, ми не будемо згадувати її явно і говоритимемо просто про топологічний простір X. Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками*.

Означення 1.1.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина U (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

Твердження 1.1.3. *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

Доведення. <u>$\Rightarrow$</u> Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

<u>$\Leftarrow$</u> Перевіримо достатність. Нехай для кожної $x \in U$ множина U є околом x, тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в U, бо кожна з них міститься в U:

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup\limits_{x \in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою <u>1.</u>

∎

У деяких джерелах поняття "окіл x" означає "відкритий окіл x", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить x. Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна вправа).

Наведемо деякі прості класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів:

Приклад 1.1.4. Нехай X – довільна множина. У якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Ясно, що аксіоми 1.–3. для такої сукупності виконані, тому вона утворює топологію на X, що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на X.

Приклад 1.1.5. Нехай X – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин X (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми 1.–3. виконані, і система $\mathcal{T}$ утворює топологію на X. Її називають *дискретною* топологією на X.

Приклад 1.1.6. Нехай множина X складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин X, які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{x\}, \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ звуться топологіями *зв'язної двокрапки*.

Вправа 1.1.7. Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

Приклад 1.1.8. Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall\, x \in U \ \exists\, \varepsilon > 0\colon (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким ε-околом. Перевіримо, що ця сукупність дійсно утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$
Тому $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1,n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1,n}$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$

тому

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (*евклідовою*, *натуральною*, *природною*) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. далі у параграфі 1.5).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервала $x \in (a, b)$ можна взяти $\varepsilon \coloneqq \min\{x - a, b - x\}$, для напівнескінченних інтервалів провести перевірку ще простіше (як саме?). З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ не міститься у $[a, b)$. Зауважимо, що $[a, b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a, b) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Важливість інтервала як прикладу відкритої підмножини стандартної прямої підкреслюється наступною теоремою:

Теорема 1.1.9 (Опис відкритих підмножин прямої)**.** *Підмножина $U \subset \mathbb{R}$ дійсної прямої зі стандартною топологією є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються.*

Вираз *"не більш ніж зліченний"* тут і далі означає "скінченний або зліченний". Об'єднання підмножин, що попарно не перетинаються, зазвичай називають *диз'юнктним* і позначають знаком $\sqcup$. Отже, в теоремі стверджується, що відкриті підмножини прямої – це в точності ті, що мають вигляд

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

де замість ∞ може стояти натуральне n або 0 – для порожньої U, інтервали можуть мати нескінченні межі, й $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут очевидна: ми вже встановили, що інтервали відкриті, а отже і їхні об'єднання.

$\underline{\Rightarrow}$ Покажемо зворотне. Нехай $U \subset \mathbb{R}$ – відкрита, і $x \in U$. За означенням, існує таке $\varepsilon_x > 0$, що $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U$. Покладемо:

$$a_x \coloneqq \inf\{a \mid \exists\, (a, b) \colon x \in (a, b) \subset U\};$$

$$b_x \coloneqq \sup\{b \mid \exists\, (a, b) \colon x \in (a, b) \subset U\}.$$

За побудовою, $a_x \leqslant x - \varepsilon_x < x$ і $b_x \geqslant x + \varepsilon_x > x$, тобто $x \in (a_x, b_x)$. З іншого боку, $(a_x, b_x) \subset U$. Дійсно, якщо $y \in (a_x, b_x)$ і, скажімо, $y \leqslant x$, то з $a_x < y$ і означення інфімума маємо, що існує інтервал (a, b) такий, що $x \in (a, b) \subset U$ та $a_x \leqslant a < y$. Тоді $y \in (a, x] \subset (a, b) \subset U$. Аналогічно отримуємо $y \in U$ і для випадку $y \geqslant x$ з властивостей супремума.

Вправа 1.1.10. Перевірити, що

$$(a_x, b_x) = \bigcup_{x \in (a,b) \subset U} (a, b),$$

і що (a_x, b_x) – найбільший за включенням інтервал, що містить x і міститься в U (це не буде потрібне для подальшого доведення).

Отже, оскільки для кожного $x \in U$ маємо $x \in (a_x, b_x) \subset U$, аналогічно до доведення твердження 1.1.3 отримуємо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Нехай два таких інтервали (a_x, b_x) і (a_y, b_y) перетинаються, тобто мають спільний елемент $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $z \in (a_x, b_x) \subset U$, $(a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$ за побудовою a_z і b_z. Зокрема, $x \in (a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$, тому з аналогічних міркувань $(a_z, b_z) \subset (a_x, b_x)$. Таким чином, $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$. Аналогічно, $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, тому $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$. Отже, ми показали, що будь-які два побудовані нами інтервали або не перетинаються, або збігаються. Зауважимо, що межі цих інтервалів не обов'язково скінченні: можливо $a_x = -\infty$ або $b_x = +\infty$, і для цих випадків усі попередні міркування залишаються вірними.

Згрупуємо інтервали, що збігаються, залишивши лише попарно різні (а отже такі, що не перетинаються), і перепозначимо їх за допомогою множини індексів A. Отримаємо диз'юнктне об'єднання:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Залишилося помітити, що в кожному з цих інтервалів, що попарно не перетинаються, є раціональне число, тому потужність $|A| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, тобто A не більш ніж зліченна. Це й означає, що множина U має потрібний вигляд.

■

Приклад 1.1.11. Знову покладемо $X = \mathbb{R}$, а в якості системи підмножин в X розглянемо

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Неважко пересвідчитися у тому, що це топологія на $\mathbb{R}$:

1. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} (a_\alpha, +\infty) = (\inf\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}, +\infty)$. Це виконується й для випадку, коли одна з лівих меж інтервалів дорівнює $+\infty$, тобто відповідна множина порожня, або $-\infty$, тобто це вся пряма (перевірте це).

2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (a_i, +\infty) = (\max\{a_i\}_{i=1}^{n}, +\infty)$. Це теж справедливо й для нескінченних меж інтервалів. Як і у попередньому прикладі, скінченність перетину тут є суттєвою (чому?).

3. виконана за побудовою.

Така $\mathcal{T}$ зветься *топологією напівнескінченних інтервалів* на прямій.

Означення 1.1.12. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ зветься *замкненою*, якщо доповнення до неї у X відкрите, тобто $X \setminus V \in \mathcal{T}$.

Властивості замкнених підмножин топологічного простору дуальні до властивостей відкритих:

Твердження 1.1.13 (Властивості замкнених множин)**.** *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір.*

1. *Перетин будь-якої сукупності замкнених підмножин замкнений, тобто якщо $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ замкнені, то $\bigcap\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ замкнена.*

2. *Об'єднання будь-якої скінченної сукупності замкнених підмножин замкнене, тобто якщо $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ замкнені, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ замкнена.*

3. *Порожня множина та X замкнені.*

Доведення. Ці властивості випливають (як саме?) з означень топології, замкненої множини та формул де Моргана:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus V_\alpha);$$

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus V_i).$$

■

Повернемося до попередніх прикладів топологій:

Приклад 1.1.14. У тривіальній топології є лише дві відкритих підмножини $\varnothing$ та X, тому в точності вони є і замкненими. У подальшому ці дві одночасно відкриті й замкнені у кожній топології множини ми будемо називати *тривіальними*.

Приклад 1.1.15. Відносно дискретної топології будь-яка підмножина X є відкритою і замкненою одночасно.

Приклад 1.1.16. У топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{x\}\}$ на двоточковій множині $X = \{x, y\}$ єдиною нетривіальною замкненою підмножиною є $\{y\}$. Аналогічно для топології $\mathcal{T}_4$ (у позначеннях прикладу 1.1.6) на цій множині.

Приклад 1.1.17. Приклади замкнених підмножин прямої $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією суб'єктивно різноманітніші, ніж відкритих. Зокрема, до них відносяться:

- Відрізки $[a, b]$ (зокрема, одноточкова множина $\{a\} = [a, a]$), бо доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ відкрите в даній топології. Аналогічно для напівнескінченних напівінтервалів $[a, +\infty)$ і $(-\infty, b]$.
- Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, бо доповнення $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ відкрите (і аналогічно для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$).
- *Множина Кантора* утворюється з відрізка $[0, 1]$ послідовним викиданням інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ і т. д. Вона замкнена, бо її доповнення є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються. Також її можна описати як множину дійсних чисел від 0 до 1, запис яких у трійковій системі числення не містить одиниць, лише нулі та двійки (відтворіть деталі самостійно). Як відомо з курсу аналіза, ця множина, зокрема, континуальна. Її більш детальний опис можна знайти у [26, с. 57-58].

З іншого боку, скінченний напівінтервал $[a, b)$ не є замкненим, оскільки його доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не відкрите в цій топології (чому?). При цьому $[a, b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ (де n_0 – натуральне число достатньо велике для того, щоб ці відрізки існували), отже умова скінченності об'єднання у властивості <u>2.</u> твердження 1.1.13 суттєва.

Вправа 1.1.18. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є замкненою в стандартній топології $\mathbb{R}$.

Приклад 1.1.19. У прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів нетривіальні замкнені підмножини мають вигляд $(-\infty, a]$.

Дуальність властивостей відкритих і замкнених множин підказує нам, що топологію можна визначати за допомогою сукупності замкнених підмножин:

Твердження 1.1.20. *Нехай $\mathcal{C}$ – система підмножин деякої множини X, що задовольняє умовам 1.–3. з твердження 1.1.13. Тоді*

$$\mathcal{T} := \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$$

є топологією на X, а $\mathcal{C}$ – сукупністю усіх підмножин, що замкнені у цій топології.

Доведення. Як і твердження 1.1.13, це безпосередній наслідок означень і формул де Моргана (покажіть це).

■

Приклад 1.1.21. Нехай X – довільна множина, а $\mathcal{C}$ складається з усіх скінченних підмножин X і (за потреби) самої X. Умови 1.–3. твердження 1.1.13 для такого $\mathcal{C}$, очевидно, виконані, бо перетин будь-якої кількості і об'єднання скінченної кількості скінченних підмножин скінченні. Отже, доповнення до скінченних підмножин (і $\varnothing$ за потреби) утворюють топологію на X, що зветься *кофінітною*. Якщо X скінченна, то ця топологія збігається з дискретною. Зауважимо, що для $X = \mathbb{R}$ скінченні підмножини й уся пряма – це в точності множини коренів деяких поліномів, тобто $V = \{x \mid f(x) = 0\}$ для $f \in \mathbb{R}[x]$. Дійсно, множині $V = \{a_i\}_{i=1}^n$ відповідає $f = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, порожній множині – $f = 1$, а всій прямій – $f = 0$. Узагальнимо це спостереження на випадок довільної вимірності у наступному прикладі.

Приклад 1.1.22. Розглянемо у $X = \mathbb{R}^n$ систему *алгебраїчних* підмножин

$$\mathcal{C} := \big\{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in S\ f(x) = 0\}\big\}_{S \subset \mathbb{R}[x^1,\dots,x^n]}$$

тобто спільних коренів для усіх множин (систем) S поліномів від n змінних (додаткова вправа для читачів, що знайомі з теорією кілець: перевірити, що замість довільних множин S достатньо розглядати ідеали кільця поліномів $\mathbb{R}[x^1, \dots, x^n]$).

Вправа 1.1.23. Показати, що $\mathcal{C}$ задовольняє умовам 1.–3. твердження 1.1.13.

Тобто $\mathcal{C}$ є сукупністю замкнених підмножин деякої топології на $\mathbb{R}^n$. Вона називається *топологією Зариського* і є природним вибором для багатьох задач *алгебраїчної геометрії* – дисципліни, що вивчає алгебраїчні множини. Зауважимо, що $\mathbb{R}$ тут можна замінити на довільне поле.

Означення 1.1.24. Нехай X – деяка множина, а $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – топології на X. Кажуть, що $\mathcal{T}$ *слабша* (*грубша*) за $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ *сильніша* (*тонша*) за $\mathcal{T}$, якщо будь-яка підмножина, що відкрита відносно топології $\mathcal{T}$, є відкритою й відносно топології $\mathcal{S}$. Це позначається $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ або $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}$.

Звичайно, це просто включення двох систем підмножин: $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ означає $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Зокрема, воно встановлює *відношення (часткового) порядку* на множині топологій X, що задовольняє відповідним аксіомам:

- $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$ для будь-якої $\mathcal{T}$ (*рефлексивність*);

- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ (*антисиметричність*);

- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}$, то $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ (*транзитивність*).

Замість топологій можна порівнювати сукупності замкнених множин, як робиться у прикладі 1.1.28 нижче (чому?).

Приклад 1.1.25. Тривіальна топологія на довільній множині слабша за будь-яку іншу, тобто є найслабшою.

Приклад 1.1.26. Дискретна топологія на довільній множині сильніша за будь-яку іншу, тобто є найсильнішою.

Приклад 1.1.27. На двоточковій множині $X = \{x, y\}$ топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ (див. приклад 1.1.6 і позначення у ньому) знаходяться між тривіальною $\mathcal{T}_1$ і дискретною $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3 \prec \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_4 \prec \mathcal{T}_2$. При цьому вони непорівнювані між собою, бо у кожній з них є відкрита множина, якої немає у іншій ($\{x\}$ та $\{y\}$ відповідно).

Приклад 1.1.28. На прямій $\mathbb{R}$ крім тривіальної (найслабшої) та дискретної (найсильнішої) маємо три приклади топологій: стандартну, напівнескінченних інтервалів і кофінітну. При цьому топологія напівнескінченних інтервалів та кофінітна топологія слабші за стандартну: у кожній з них відкриті множини є, очевидно, об'єднанням інтервалів, а отже відкриті у стандартній. Але між собою ці дві топології непорівнювані. Наприклад, множина $(-\infty, 0]$ є замкненою у топології напівнескінченних інтервалів, але не у кофінітній (бо нескінченна і не збігається з усією прямою), а $\{0\}$ – навпаки.

1.2 База топології. Аксіоми зліченності

Згадаємо, що у стандартній топології числової прямої $\mathbb{R}$ відкриті множини є об'єднаннями інтервалів: це випливає з теореми 1.1.9 або просто з означення цієї топології. Це дає нам ідею "економного" описання топології за допомогою об'єднань множин з деякого "стандартного набору", що формалізована у наступному означенні:

Означення 1.2.1. Деяка сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *базою* топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої її точки $x \in U$ існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

Перш за все, переформулюємо це означення і покажемо, що воно відповідає викладеній вище ідеї:

Твердження 1.2.2. *Система відкритих множин $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ є базою деякої топології $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли будь-яка відкрита множина $U \in \mathcal{T}$ представляється у вигляді об'єднання деякої сукупності множин, що належать до $\mathcal{B}$: існує $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}$ така, що $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ – база, то для кожної відкритої U і кожної $x \in U$ знайдеться $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U$. Тоді $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$ (аналогічно, наприклад, до доведення твердження 1.1.3).

$\underline{\Leftarrow}$ І навпаки, якщо будь-яка відкрита множина має вигляд $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, де усі $V_\alpha \in \mathcal{B}$, то для кожної точки $x \in U$ цієї множини існує $\alpha \in A$ таке, що $x \in V_\alpha \subset U$.

■

Приклад 1.2.3. Тривіальним прикладом бази топології $\mathcal{T}$ для довільного топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ є сама топологія: означення, очевидно, виконується для $\mathcal{B} := \mathcal{T}$. Звичайно, про жодну економію опису відкритих множин у цьому випадку не йдеться.

Приклад 1.2.4. Повернемося до стандартної топології $\mathbb{R}$. Як було зазначено вище, інтервали складають деяку базу цієї топології

$$\mathcal{B} := \big\{(a, b)\big\}_{a,b \in \mathbb{R},\, a<b},$$

бо за побудовою між кожною відкритою множиною $U \subset \mathbb{R}$ і кожною її точкою $x \in U$ можна вставити інтервал: $x \in (a, b) \subset U$ (наприклад, $(a, b) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$). Але тоді, у свою чергу, з властивостей раціональних чисел випливає існування $q, r \in \mathbb{Q}$ таких, що $a < q < x$ і $x < r < b$, тобто $x \in (q, r) \subset (a, b) \subset U$. Це означає, що (строго) менша система

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \big\{(q, r)\big\}_{q,r \in \mathbb{Q},\, q<r} \subset \mathcal{B}$$

інтервалів з раціональними кінцями також є базою цієї топології. До того ж, вона є зліченною на відміну від $\mathcal{B}$ (і $\mathcal{T}$). Отже, ми бачимо, що база топології не визначається однозначно: одна й та сама топологія може мати кілька баз різної потужності.

Означення 1.2.5. Сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$, що містять точку $x \in X$, зветься *базою в точці* x його топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$, що містить x, існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

База і база в точці пов'язані наступним очевидним чином:

Твердження 1.2.6. *Нехай $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$, і $x \in X$. Тоді сукупність*

$$\mathcal{B}_x := \{V \in \mathcal{B} \mid V \ni x\} \subset \mathcal{B}$$

усіх елементів $\mathcal{B}$, що містять x, є базою $\mathcal{T}$ в x.

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень: для будь-якої відкритої $U \ni x$ існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді $V \in \mathcal{B}_x$.

■

Вправа 1.2.7. Як побудувати базу топології з баз у точках (тобто як виглядає конструкція, зворотня до твердження 1.2.6)?

Наступні властивості топологічного простору є нашими першими змістовними прикладами *топологічних інваріантів* (чому вони так називаються, буде зрозуміло з подальшого, див. параграф 1.10).

Означення 1.2.8. Говорять, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$

- задовольняє *першій аксіомі зліченності*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$ в x;

- задовольняє *другій аксіомі зліченності*, якщо існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$.

Наслідок 1.2.9. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Це наслідок твердження 1.2.6: якщо $\mathcal{B}$ не більш ніж зліченна, то й $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ не більш ніж зліченна для кожної $x \in X$.

■

Топологічні простори, що задовольняють другій аксіомі зліченності, також звуть просторами *з не більш ніж зліченною базою*, причому "не більш ніж" часто пропускають. Аналогічна термінологія використовується й для бази в точці. Обернене до попереднього наслідку твердження, взагалі кажучи, невірне: це демонструється, зокрема, у прикладах 1.2.12 і 1.3.2 нижче.

Приклад 1.2.10. Як було встановлено у прикладі 1.2.4, інтервали з раціональними кінцями утворюють зліченну базу $\widetilde{\mathcal{B}}$ стандартної топології числової прямої $\mathbb{R}$, тобто вона задовольняє другій аксіомі зліченності, а отже й першій. Зауважимо, що крім $\widetilde{\mathcal{B}}_x$ у якості бази в довільній $x \in \mathbb{R}$ можна розглядати, наприклад, теж зліченну $\left\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ (чому?).

Вправа 1.2.11. Чи задовольняють аксіомам зліченності інші топології на $\mathbb{R}$, що були розглянуті у попередньому параграфі? Показати, зокрема, що кофінітна топологія не задовольняє першій аксіомі зліченності (а отже й другій), більш того, це так для кофінітної топології на будь-якій незліченній множині.

Приклад 1.2.12. Розглянемо довільну множину X з дискретною топологією. Для кожної $x \in X$ одноточкова підмножина $\{x\}$ відкрита, і для будь-якої $U \ni x$ маємо $x \in \{x\} \subset U$. Це означає, що система з однієї множини $\{x\}$ утворює базу в x, отже X задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, якщо $\mathcal{B}$ – якась база цієї топології, то з тієї ж відкритості $\{x\}$ випливає, що для кожної $x \in X$ повинна існувати $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset \{x\}$, тобто $V = \{x\}$. Отже, $\mathcal{B}$ повинна містити усі одноточкові підмножини $\{x\}$ (і навпаки, система усіх одноточкових підмножин, очевидно, буде базою). Тому X задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли X не більш ніж зліченна.

Означення 1.2.13. Система підмножин $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множини X зветься *покриттям* її підмножини $V \subset X$, якщо об'єднання елементів $\mathcal{U}$ містить V: $V \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Якщо менша сукупність $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B} \subset \mathcal{U}$ (для деякої $B \subset A$) також є покриттям V, її називають *підпокриттям* $\mathcal{U}$. Зокрема, сама $\mathcal{U}$ зветься своїм *тривіальним* підпокриттям. У топологічному просторі X покриття називається *відкритим*, якщо кожна з його множин U_α відкрита.

Якщо у попередньому означенні $V = X$, то його умова перетворюється на $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Виявляється, що відкриті покриття просторів з не більш ніж зліченною базою мають наступну корисну властивість (яка також дещо нагадує означення компактного простору, див. далі параграф 2.7):

Теорема 1.2.14 (Ліндельоф)**.** *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то у будь-якого його відкритого покриття існує не більш ніж зліченне підпокриття.*

Доведення. Отже, нехай X – простір, $\mathcal{B}$ – його не більш ніж зліченна база, а $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – деяке відкрите покриття. За означенням покриття, для будь-якої $x \in X$ існує таке $\alpha_x \in A$, що $x \in U_{\alpha_x}$. За означенням бази, тоді існує $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Залишимо лише елементи бази, що виникають у цій конструкції, тобто розглянемо сукупність

$$\widetilde{\mathcal{B}} \coloneqq \{V \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \colon V \subset U_\alpha\} \subset \mathcal{B}$$

усіх елементів бази, що містяться принаймні у одному елементі покриття. Вона також не більш ніж зліченна, тобто її елементи можна перенумерувати: $\widetilde{\mathcal{B}} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість ∞ може стояти натуральне n. Для кожного i тоді оберемо $\alpha_i \in A$ таке, що $V_i \subset U_{\alpha_i}$.

Тепер повернемося до початку: для будь-якої $x \in X$ ми знайшли $V_x \in \mathcal{B}$ таку, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Це означає, що $V_x \in \widetilde{\mathcal{B}}$, тобто існує i таке, що $V_x = V_i$, а отже

$$x \in V_i \subset U_{\alpha_i} \subset \bigcup_i U_{\alpha_i}.$$

Це означає, що $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (або до n) – потрібне нам не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$.

■

1.3 Критерій бази. Передбаза

Виявляється, що топологія визначається своєю базою однозначно і може бути за нею побудована. У наступній теоремі наведені властивості, що є необхідними та достатніми для того, щоб система підмножин була базою деякої топології.

Теорема 1.3.1 (Критерій бази). *Нехай X – множина, а $\mathcal{B}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{B}$ – база деякої топології на X, то вона має наступні властивості:*

B1. $\mathcal{B}$ – покриття X: $X = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}} V$.

B2. Для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ та $x \in U \cap V$ існує $W \in \mathcal{B}$ така, що $x \in W \subset U \cap V$.

І навпаки, якщо $\mathcal{B}$ має властивості B1. і B2., то на X існує єдина топологія, базою якої є $\mathcal{B}$.

Аналогічно до переформулювання означення бази у твердженні 1.2.2, властивість B2. еквівалентна наступній: для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ їхній перетин $U \cap V$ можна представити у вигляді об'єднання множин, що належать до $\mathcal{B}$.

Доведення. Властивість B1. випливає з твердження 1.2.2, оскільки X – відкрита множина і тому повинна дорівнювати об'єднанню деяких (а отже й усіх) множин $\mathcal{B}$. B2. випливає безпосередньо з означення бази, бо $U \cap V$ – відкрита множина як перетин відкритих.

Тепер нехай $\mathcal{B}$ має зазначені властивості. Побудуємо систему $\mathcal{T}$ підмножин X, що складається з усіх можливих об'єднань множин з $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} := \left\{ U = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta \right\}_{\{V_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{B}}.$$

Зауважимо, що $\varnothing$ також належить до $\mathcal{T}$ як об'єднання порожньої сукупності підмножин. Перевіримо, що $\mathcal{T}$ – топологія на X:

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$. За побудовою, кожен елемент цієї сукупності має вигляд $U_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$ для деякої $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta\in B_\alpha} \subset \mathcal{B}$, що індексована множиною B_α, власною для кожного $\alpha \in A$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A,\, \beta\in B_\alpha} V_{\alpha\beta} \in \mathcal{T}$$

за побудовою $\mathcal{T}$.

2. Нехай $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$. Перш за все, зауважимо, що належність перетину цих множин до $\mathcal{T}$ достатньо перевірити для $n = 2$ з індуктивних міркувань: якщо $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$, то й $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = (U_1 \cap U_2) \cap U_3 \in \mathcal{T}$, бо ми вже знаємо, що це вірно для двох множин, і так далі до $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} U_i\right) \cap U_n \in \mathcal{T}$.

   Отже, маємо $U_1 = \bigcup\limits_{\beta\in B_1} V_{1\beta}$ і $U_2 = \bigcup\limits_{\beta\in B_2} V_{2\beta}$ для деяких сукупностей $\{V_{1\beta}\}_{\beta\in B_1}$, $\{V_{2\beta}\}_{\beta\in B_2} \subset \mathcal{B}$. Тоді з дистрибутивності перетинів і об'єднань випливає, що

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2} V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2}.$$

   Оскільки для будь-якого вибору індексів $\beta_1 \in B_1$ і $\beta_2 \in B_2$ множини $V_{1\beta_1}$ і $V_{2\beta_2}$ належать до $\mathcal{B}$, з її властивості <u>B2.</u> і зауваження вище випливає, що $V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2} = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma}$, де $\{W_{\beta_1\beta_2\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} \subset \mathcal{B}$ (для якоїсь індексуючої множини $\Gamma_{\beta_1\beta_2}$, що залежить від β_1 і β_2). Тому

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2,\, \gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma} \in \mathcal{T}$$

   за побудовою.

3. Як ми зауважили вище, $\varnothing \in \mathcal{T}$. Множина X належить до $\mathcal{T}$ в силу властивості <u>B1.</u>

Відносно топології $\mathcal{T}$ усі множини з $\mathcal{B}$ відкриті (як об'єднання сукупності з одної множини). Те, що $\mathcal{B}$ – база цієї топології, тоді випливає з побудови $\mathcal{T}$ і твердження 1.2.2.

Залишилося перевірити, що така топологія єдина. Нехай $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з базою $\mathcal{B}$. Тоді в силу твердження 1.2.2 будь-яка $U \in \mathcal{S}$ є об'єднанням елементів $\mathcal{B}$, а отже належить до $\mathcal{T}$: $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$. З іншого боку, усі елементи $\mathcal{B}$ повинні бути відкритими відносно $\mathcal{S}$, а отже і їхні об'єднання, тому $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Це й означає єдиність.

■

Приклад 1.3.2. Згадаємо, що одною з баз стандартної топології $\mathbb{R}$ є сукупність інтервалів (див. приклад 1.2.4). Розглянемо тепер аналогічну систему з напівінтервалів:

$$\mathcal{B} := \{[a,b)\}_{a,b\in\mathbb{R},\, a<b}\,,$$

Вона задовольняє умовам теореми 1.3.1. Дійсно, всю пряму можна представити у вигляді, наприклад, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n,n)$, а непорожній перетин двох напівінтервалів також є напівінтервалом. Тому цій базі відповідає деяка топологія. Вона зветься *топологією Зоргенфрея*, а пряма $\mathbb{R}$ з нею – *прямою Зоргенфрея*.

Перш за все, зауважимо, що будь-який інтервал можна представити у вигляді об'єднання напівінтервалів: $(a,b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b)$ (для деякого достатньо великого натурального n_0), а тому й будь-яка відкрита в стандартній топології множина є об'єднанням напівінтервалів, отже відкритою в прямій Зоргенфрея. Таким чином, топологія Зоргенфрея сільніша за стандартну (причому строго, оскільки самі напівінтервали не є відкритими у стандартній топології). Також цікавим є те, що в цій топології напівінтервали є не лише відкритими (як елементи бази), але й замкненими: доповнення $\mathbb{R}\setminus[a,b) = (-\infty,a)\cup[b,+\infty) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}[-n,a)\cup\bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty}[b,n)$ відкрите.

Для будь-якої $x\in\mathbb{R}$ зліченна сукупність $\left\{[x,x+\frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ є базою топології Зоргенфрея в x (перевірте це), тому пряма Зоргенфрея задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, будь-яка база її топології для кожної $x\in\mathbb{R}$ повинна містити V_x таку, що $x\in V_x\subset[x,x+1)$. Зокрема, $\min V_x = x$, а тому різним точкам відповідають різні множини: $V_x \neq V_y$ для $x\neq y$. З цього випливає, що потужність будь-якої бази топології Зоргенфрея не менша за потужність $\mathbb{R}$, тому у цієї топології немає не більш ніж зліченних баз. Таким чином, ми отримали ще один приклад простору, що задовольняє першій, але не другій аксіомі зліченності.

Вправа 1.3.3. Перевірити, що сімейство підмножин круга на площині, що складається з усіх його діаметрів і центра, є базою деякої топології.

Означення 1.3.4. Система $\mathcal{C}\subset\mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X,\mathcal{T})$ зветься *передбазою* його топології $\mathcal{T}$, якщо сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$ є базою $\mathcal{T}$.

Тут під скінченними перетинами маються на увазі перетини лише непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто ми не можемо отримати X, перетнувши "нульову кількість множин".

Приклад 1.3.5. Будь-яка база $\mathcal{B}$ довільної топології $\mathcal{T}$ (зокрема сама $\mathcal{T}$) є також її передбазою, бо одноелементні перетини вже утворюють $\mathcal{B}$, а додавання інших перетинів (що є відкритими множинами) ніяк не впливає на властивість $\mathcal{B}$ бути базою.

Приклад 1.3.6. Для стандартної топології на прямій $\mathbb{R}$ система усіх напівнескінченних інтервалів

$$\mathcal{C} := \{(-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{(a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$$

утворює передбазу. Дійсно, скінченними перетинами множин із $\mathcal{C}$ є усі інтервали, що утворюють базу $\mathcal{B}$ з прикладу 1.2.4, а також самі напівнескінченні інтервали та порожня множина. Таким чином, отримаємо сукупність перетинів $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \{\varnothing\}$, що теж є базою стандартної топології, оскільки напівнескінченні інтервали у ній відкриті. Якщо утворити систему $\widetilde{\mathcal{C}}$, замінивши в $\mathcal{C}$ дійсні межі $a \in \mathbb{R}$ на раціональні $q \in \mathbb{Q}$, то теж отримаємо передбазу цієї топології (меншу і тепер зліченну), бо перетини утворять об'єднання бази $\widetilde{\mathcal{B}}$ з того ж прикладу, $\widetilde{\mathcal{C}}$ та порожньої множини.

Приклад 1.3.7. Аналогічним чином, для топології прямої Зоргенфрея система проміжків

$$\mathcal{D} := \{(-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{[a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$$

є передбазою, оскільки їхні скінченні перетини – це об'єднання бази з прикладу 1.3.2, самої $\mathcal{D}$, множини якої відкриті у топології Зоргенфрея, а також порожньої множини.

Твердження 1.3.8 (Критерій передбази)**.** *Нехай X – множина, а $\mathcal{C}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{C}$ – передбаза деякої топології на X, то вона є покриттям X: $X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{C}} V$. І навпаки, якщо $\mathcal{C}$ є покриттям X, то на X існує єдина топологія, передбазою якої є $\mathcal{C}$.*

Доведення. За означенням, скінченні перетини множин передбази $\mathcal{C}$ утворюють деяку базу $\mathcal{B}$ топології. Тоді кожна множина $U \in \mathcal{B}$ включається до деякої $V \in \mathcal{C}$. Оскільки $\mathcal{B}$ є покриттям X за властивістю <u>B1.</u> теореми 1.3.1, ним є й $\mathcal{C}$:

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U \subset \bigcup_{V\in\mathcal{C}} V \subset X.$$

Тепер нехай $\mathcal{C}$ – покриття X. Побудуємо систему $\mathcal{B}$ підмножин X з усіх перетинів непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто

$$\mathcal{B} := \left\{\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right\}_{\{V_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathcal{C},\, n\in\mathbb{N}}.$$

Покажемо, що $\mathcal{B}$ – база деякої топології на X, перевіривши виконання умов теореми 1.3.1:

B1. За побудовою, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, бо усі множини $V \in \mathcal{C}$ є перетинами відповідних одноелементних підсистем $\{V\} \subset \mathcal{C}$. Тому $\mathcal{B}$ теж буде покриттям X.

B2. Будь-які два елементи $\mathcal{B}$ мають вигляд $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ та $\bigcap\limits_{j=1}^{m} W_j$ для підсистем $\{V_i\}_{i=1}^{n}$, $\{W_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{C}$. Тому їхній перетин є перетином усіх елементів скінченної сукупності $\{V_i\}_{i=1}^{n} \cup \{W_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{C}$, а отже й сам належить до системи $\mathcal{B}$.

Таким чином, існує топологія $\mathcal{T}$ на X з базою $\mathcal{B}$, передбазою якої за означенням є $\mathcal{C}$. Нехай тепер $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з передбазою $\mathcal{C}$. Тоді її базою повинна бути сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$, тобто $\mathcal{B}$. Це означає, що $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ в силу теореми 1.3.1, що й дає потрібну нам єдиність.

■

Приклад 1.3.9. Якщо з передбази $\mathcal{C}$ стандартної топології $\mathbb{R}$, що описана у прикладі 1.3.6, прибрати "половину" множин, залишивши

$$\widehat{\mathcal{C}} := \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}},$$

то ця система все ще буде покриттям $\mathbb{R}$, а отже утворюватиме передбазу деякої топології за попереднім твердженням. Будуючи базу $\mathcal{B}$ як у його доведенні та топологію $\mathcal{T}$ як у доведенні теореми 1.3.1, отримуємо $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{C}}$ і $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{C}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ – топологію напівнескінченних інтервалів, що (набагато) слабша за стандартну. Роблячи так само з "половиною"

$$\widehat{\mathcal{D}} := \{[a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}},$$

передбази топології Зоргенфрея з прикладу 1.3.7, що теж є покриттям, отримаємо базу $\widehat{\mathcal{D}}$ і топологію $\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{D}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ (чому?), що сильніша за топологію напівнескінченних інтервалів, (набагато) слабша за топологію Зоргенфрея і непорівнювана зі стандартною.

Вправа 1.3.10. Показати, що якщо $\mathcal{C}$ – передбаза (зокрема база) топології $\mathcal{T}$ на множині X, то $\mathcal{T}$ – найслабша топологія на X, що містить $\mathcal{C}$. Тому інколи також говорять, що $\mathcal{T}$ *породжується* системою $\mathcal{C}$. Більш того, показати, що будь-яке покриття $\mathcal{C}$ множини X з такою властивістю буде передбазою (але, взагалі кажучи, не базою) $\mathcal{T}$. Таким чином, отримали альтернативне означення передбази.

Вправа 1.3.11. Чи можна у термінах передбази переформулювати другу аксіому зліченності? А як щодо першої аксіоми зліченності (для цього, звичайно, доведеться визначити поняття передбази у точці)?

1.4 Метричний простір

Важливим класом топологічних просторів є метричні простори, що дуже часто зустрічаються в геометрії, аналізі та застосуваннях математики – всюди, де виникає можливість тим чи іншим чином задати відстань між елементами деякої множини.

Означення 1.4.1. Нехай X – довільна множина. *Метрикою* на X називається відображення $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, що задовольняє наступним умовам:

1. $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$ (*невиродженість*).
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для будь-яких $x, y \in X$ (*симетричність*).
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$ (*нерівність трикутника*).

Пара (X, ρ) з множини та метрики на ній зветься *метричним простором*.

Тут $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – традиційне позначення для множини невід'ємних дійсних чисел. Як і у випадку топологічного простору, якщо зрозуміло, про яку метрику на X йдеться, будемо говорити просто про метричний простір X. Елементи метричного простору також називають його *точками*, а $\rho(x, y)$ – *відстанню* між точками x та y.

Приклад 1.4.2. На довільній множині X введемо $\rho\colon X\times X \to \mathbb{R}_+$ наступним чином:

$$\rho(x, y) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{array}\right.$$

Це відображення є метрикою. Дійсно, перші дві умови означення випливають з побудови, а нерівність трикутника можна перевірити, виписавши всі варіанти взаємного розташування трьох точок (зробіть це). Така метрика на множині X зветься *дискретною*.

Приклад 1.4.3. Для $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо сімейство відображень ρ_p, що параметризоване дійсним числом $p \in [1, +\infty)$ і визначене для $x = (x^1, \ldots, x^n)$ та $y = (y^1, \ldots, y^n)$ формулою

$$\rho_p(x, y) \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Властивості невиродженості та симетричності випливають безпосередньо з цієї формули. Зокрема, якщо $\rho_p(x, y) = 0$, то з невід'ємності доданків маємо $x^i = y^i$ для усіх i, а отже $x = y$. Нерівність трикутника тут є наслідком нерівності Мінковського, що доводиться в курсі аналіза (див., наприклад, [4, с. 154]). Отже, це метрики на $\mathbb{R}^n$. Метрика ρ_1 зветься *манхетенською* (*вуличною*, *метрикою таксиста*), а ρ_2 – *евклідовою*. Крім перелічених, також розглянемо ρ_∞, що визначена наступним чином:

$$\rho_\infty(x, y) := \max\{|x^i - y^i|\}_{i=1}^n.$$

Знову невиродженість і симетричність випливають безпосередньо з побудови. Перевіримо нерівність трикутника: для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n

$$|x^i - y^i| = |x^i - z^i + z^i - y^i| \leqslant |x^i - z^i| + |z^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y).$$

Тоді й найбільше з цих значень $\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y)$.

Зауважимо, що при $n = 1$ (на прямій) всі ці метрики збігаються й дають $\rho_p(x, y) = |x - y|$, у т. ч. для $p = \infty$.

Приклад 1.4.4. Побудуємо метрику на множині $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку, використавши ідею, схожу до побудови ρ_∞ у попередньому прикладі:

$$\rho(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)|\}_{x\in[a,b]}.$$

Цей максимум існує в силу теореми Веєрштраса (далі ми будемо розглядати її узагальнення, див. теорему 2.9.9). Властивості метрики перевіряються аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це).

Вправа 1.4.5. Для довільного дійсного $p \in [1, +\infty)$ розглянемо множину ℓ_p дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ таких, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ збігається. Перевірити що на ℓ_p

$$\rho(x, y) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

коректно визначене і задає метрику.

Перевірити також що на множині ℓ_∞ *обмежених* дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (тобто тих, для яких існує C таке, що $|x_n| \leqslant C$ при будь-якому n)

$$\rho(x, y) := \sup\{|x_n - y_n|\}_{n=1}^\infty$$

коректно визначене і задає метрику. Пор. ці метрики з прикладом 1.4.3.

Означення 1.4.6. Нехай (X, ρ) та (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься

- *ізометрією*, якщо f – біекція, і для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y);$$

- *ліпшицевим* з *константою Ліпшиця* $C > 0$ (а також *нерозтягуючим* при $C = 1$), якщо для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y);$$

- *біліпшицевою еквівалентністю*, якщо f – бієкція, а f і f^{-1} – ліпшицеві.

Про відображення f метричних просторів з попереднього означення, яке задовольняє умові $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, говорять також, що воно *зберігає відстані між точками*. Зокрема, такі відображення ін'єктивні: з $f(x) = f(y)$ випливає $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) = 0$, отже $x = y$ в силу невиродженості. Тому в означенні ізометрії достатньо вимагати лише сюр'єктивності f. Якщо f – ізометрія, то й f^{-1} – ізометрія. Будь-яка ізометрія є біліпшицевою еквівалентністю, але, взагалі кажучи, не навпаки (приклад можна знайти нижче).

Приклад 1.4.7. Ізометрії $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ евклідового простору $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ на себе (рухи), як відомо з курсів лінійної алгебри та геометрії (принаймні для $n \leqslant 3$), є в точності ізометричними афінними перетвореннями, тобто мають вигляд $f(x) = Ax + b$, де $A \in \mathrm{O}(n)$ – ортогональна матриця (див. далі приклад 2.4.6) і $b \in \mathbb{R}^n$.

Означення 1.4.8. Метричні простори (X, ρ) і (Y, σ) звуться

- *ізометричними*, якщо існує ізометрія $f\colon X \to Y$;

- *біліпшицево еквівалентними*, якщо існує біліпшицева еквівалентність $f\colon X \to Y$.

Дві метрики ρ та σ на множині X звуться *біліпшицево еквівалентними*, якщо *тотожне* відображення $id_X\colon X \to X\colon x \mapsto x$, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, є біліпшицевою еквівалентністю метричних просторів (X, ρ) та (X, σ).

Твердження 1.4.9. *Метрики ρ та σ на X біліпшицево еквівалентні тоді й тільки тоді, коли існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$*

$$c\rho(x, y) \leqslant \sigma(x, y) \leqslant C\rho(x, y).$$

Доведення. Друга з цих нерівностей є просто умовою ліпшицевості для тотожного відображення $(X, \rho) \to (X, \sigma)$. Записуючи цю умову для оберненого відображення (теж, звичайно, тотожного), отримаємо першу нерівність. ■

Вправа 1.4.10. Показати, що усі еквівалентності з означення 1.4.8 дійсно є відношеннями еквівалентності (метричних просторів та метрик на множині відповідно).

Вправа 1.4.11. Метричний простір (X, ρ) зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ (тобто така, що має місце збіжність $\rho(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, див. [4, с. 67]) *збігається* (тобто існує $x \in X$ така, що $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, див. далі означення 1.9.1 і зауваження після нього). Перевірити, що якщо метричні простори біліпшицево еквівалентні (зокрема, ізометричні) та один з них повний, то й інший повний.

Приклад 1.4.12. Метрики ρ_p на $\mathbb{R}^n$ з прикладу 1.4.3 біліпшицево еквівалентні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а також $p = \infty$. Дійсно, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n за побудовою $|x^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x, y)$, тому для усіх $p \in [1, +\infty)$

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (n\rho_\infty(x, y)^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(x, y).$$

З іншого боку, оскільки $\rho_\infty(x, y)$ – це найбільше з $|x^i - y^i|$,

$$\rho_\infty(x, y) = (\rho_\infty(x, y)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho_p(x, y).$$

Це дає потрібні нам згідно з твердженням 1.4.9 нерівності. Отже, кожна ρ_p з $p \in [1, +\infty)$ еквівалентна ρ_∞, тому вони еквівалентні й одна одній в силу транзитивності.

1.5 Метрична топологія

Тепер покажемо, що метричні простори дійсно є окремим випадком топологічних. Для цього спочатку розглянемо деякі корисні класи підмножин, що очевидним чином узагальнюють відповідні поняття евклідової геометрії:

Означення 1.5.1. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Підмножина X

- $B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ називається *відкритою кулею* з центром у точці x радіуса ε;
- $D_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ називається *замкненою кулею* з центром у точці x радіуса ε;
- $S_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) = \varepsilon\}$ називається *сферою* з центром у точці x радіуса ε.

Очевидно, замкнена куля – це диз'юнктне об'єднання відкритої кулі та сфери з тими ж центром і радіусом. Зауважимо також, що $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$ для $\varepsilon \leqslant \delta$ – це безпосередньо випливає з означення. Так само для замкнених куль (але не для сфер).

Наступне означення узагальнює стандартну топологію прямої:

Означення 1.5.2. *Метричною топологією* метричного простору (X, ρ) (або метрики ρ) зветься сукупність його підмножин

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U\}.$$

Якщо для топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ існує така метрика ρ на X, що $\mathcal{T}$ – метрична топологія ρ, то цей простір зветься *метризовним*.

Доведемо коректність цього означення.

Твердження 1.5.3. *Метрична топологія є топологією на X. Сукупність усіх відкритих куль (X, ρ) є її базою.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом топології.

1. Для деякої сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ та довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тому $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ та довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$ виконується $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, тому $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$, отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $B_1(x) \subset X$, тому $X \in \mathcal{T}$.

Згідно з вправою 1.5.4 нижче, відкриті кулі належать до $\mathcal{T}$. Їх сукупність тоді задовольняє означенню бази $\mathcal{T}$ за побудовою цієї топології.

■

Це доведення повністю повторює доведення для стандартної топології прямої. Можна було провести його іншим способом, застосувавши критерій бази до сукупності відкритих куль (зробіть це). Отже, множина відкрита відносно метричної топології тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї разом з деякою відкритою кулею з центром у цій точці. У подальшому вважатимемо усі метричні простори наділеними цією топологією.

Вправа 1.5.4. Відносно метричної топології відкриті кулі є відкритими множинами, а замкнені кулі та сфери – замкненими.

Твердження 1.5.5. *Метричні топології біліпшицево еквівалентних метрик є рівними.*

Доведення. Отже, нехай ρ та σ – біліпшицево еквівалентні метрики на множині X. В силу твердження 1.4.9, тоді існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$

$$c\rho(x,y) \leqslant \sigma(x,y) \leqslant C\rho(x,y).$$

Будемо позначати відкриті кулі цих метрик через $B^\rho_\varepsilon(x)$ і $B^\sigma_\varepsilon(x)$ відповідно. Тоді з першої нерівності вище маємо, що $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x)$ для будь-яких $x \in X$ і $\varepsilon > 0$, бо з $y \in B^\sigma_{c\varepsilon}(x)$ випливає

$$\rho(x,y) \leqslant \frac{\sigma(x,y)}{c} < \varepsilon,$$

тобто $y \in B^\rho_\varepsilon(x)$. Аналогічно, друга нерівність означає, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset B^\sigma_{C\varepsilon}(x)$ для усіх x і ε.

Нехай тепер $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – метричні топології ρ і σ відповідно. Для кожної $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої $x \in U$ згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Згідно з показаним вище, тоді й $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Це доводить, що $U \in \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, тому $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

$\blacksquare$

Приклад 1.5.6. Для дискретної метрики на множині X згідно з означеннями маємо

$$B_\varepsilon(x) = \left[\begin{array}{ll} \{x\}, & 0 < \varepsilon \leqslant 1; \\ X, & \varepsilon > 1. \end{array}\right.$$

Тому для кожної $x \in X$ одноточкова множина $\{x\} = B_1(x) \subset \{x\}$, тобто усі $\{x\}$ є відкритими, а тоді й усі підмножини X відкриті як об'єднання одноточкових. Отже, відповідна метрична топологія є дискретною. До речі, як виглядають замкнені кулі та сфери цієї метрики?

Приклад 1.5.7. Повернемося до $X = \mathbb{R}^n$. При $n = 1$ метрика $\rho_p(x,y) = |x-y|$ (одна й та сама для усіх p) дає $B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $D_\varepsilon(x) = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, $S_\varepsilon(x) = \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}$. Згідно з означенням, відповідна метрична топологія – це стандартна топологія $\mathbb{R}$.

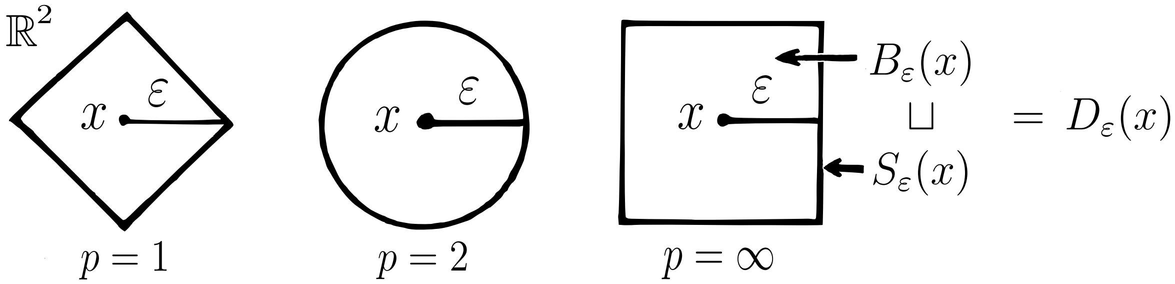


Рис. 1.1: Кулі метрик ρ_p на $\mathbb{R}^2$

Уявлення про різні ρ_p при більших n дає рис. 1.1, де зображені кулі цих метрик на площині $\mathbb{R}^2$ для $p = 1$, $p = 2$ і $p = \infty$.

У прикладі 1.4.12 ми показали, що усі ці метрики біліпшицево еквівалентні, а тому згідно з твердженням 1.5.5 породжують одну й ту саму метричну топологію. Вона зветься *стандартною* (*евклідовою*, *натуральною*, *природною*) топологією $\mathbb{R}^n$. При цьому з твердження 1.5.3 випливає, що відкриті кулі різних метрик ρ_p утворюють різні бази цієї топології. Можна розглядати й інші бази, наприклад, у $\mathbb{R}^2$ не відкриті круги або квадрати, а відкриті прямокутники (чому?).

Твердження 1.5.8. *Для будь-якого метричного простору (X, ρ) та довільної його точки $x \in X$ відкриті кулі $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ складають злічену базу метричної топології в x. Таким чином, цей простір задовольняє першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Якщо $U \ni x$ – відкрита, то згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді $x \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$.

■

Зокрема, щоб топологічний простір був метризовним, він повинен задовольняти першій аксіомі зліченності. Тому, наприклад, незліченна множина з кофінітною топологією не є метризовною в силу вправи 1.2.11. Приклади евклідової метрики на прямій та дискретної метрики на незліченній множині демонструють, що метричні простори можуть як задовольняти, так і не задовольняти другій аксіомі зліченності.

Вправа 1.5.9. Показати, що відкриті кулі будь-якої з метрик ρ_p з центрами в точках з раціональними координатами та радіусами вигляду $\frac{1}{m}$

$$\mathcal{B} := \left\{B_{\frac{1}{m}}(x)\right\}_{x \in \mathbb{Q}^n,\, m \in \mathbb{N}}$$

утворюють злічену базу стандартної топології $\mathbb{R}^n$, отже цей простір задовольняє другій аксіомі зліченності й для довільного n.

1.6 Прообраз топології. Індукована топологія

Тут ми продовжимо знайомитися зі способами побудови топологій.

Означення 1.6.1. Нехай X – деяка множина, $(Y, \mathcal{T})$ – топологічний простір, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Прообразом* топології $\mathcal{T}$ під дією f назвемо сукупність підмножин X, що складається з прообразів елементів $\mathcal{T}$ під дією f:

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(V) \subset X\}_{V \in \mathcal{T}}.$$

Твердження 1.6.2. *Система $f^{-1}(\mathcal{T})$ є топологією на X.*

Доведення. Перевіримо виконання означення топології.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. Тоді $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, де $V_\alpha \in \mathcal{T}$, для кожного $\alpha \in A$. Із загальної властивості прообразів маємо

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

бо $\bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Аналогічно, для скінченної $\{U_i\}_{i=1}^n \subset f^{-1}(\mathcal{T})$ маємо $U_i = f^{-1}(V_i)$, де $V_i \in \mathcal{T}$, для кожного $i = \overline{1,n}$, і з властивості прообразів

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

оскільки $\bigcap\limits_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.

3. Очевидно, $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $f^{-1}(\mathcal{T})$.

■

Розглянемо частковий випадок, коли X – підмножина Y (де $(Y, \mathcal{T})$, як і раніше, є топологічним простором), а $f = i\colon X \to Y$ – формальне *включення*, тобто відображення, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, але вже як точку Y. Прообразами підмножин $V \subset Y$ тоді будуть їхні перетини з X: $i^{-1}(V) = X \cap V$. Дійсно, належність точки підмножини X до обох частин цієї рівності означає просто, що вона належить також і до V.

Наслідок 1.6.3. *Сукупність підмножин, що є перетинами з X відкритих підмножин Y,*

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{T}\colon U = X \cap V\}$$

є топологією на $X \subset Y$.

Означення 1.6.4. Говорять, що топологія $i^{-1}(\mathcal{T})$ *індукована* на X топологією $\mathcal{T}$. При цьому топологічний простір $(X, i^{-1}(\mathcal{T}))$ називається (*топологічним*) *підпростором* простору $(Y, \mathcal{T})$.

У подальшому, якщо не обумовлене інше, ми будемо вважати, що на довільній підмножині топологічного простору розглядається саме індукована топологія, і будемо говорити про властивості цієї топології (властивості топологічного підпростору) як про властивості підмножини.

Твердження 1.6.5. *Якщо $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$ на Y (відповідно, база $\mathcal{T}$ у точці $x \in X \subset Y$), то*

$$i^{-1}(\mathcal{B}) = \{X \cap V\}_{V \in \mathcal{B}}$$

є базою топології, що індукована $\mathcal{T}$ на $X \subset Y$ (відповідно, базою індукованої топології у x).

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень індукованої топології та бази. Будь-яка підмножина X, що відкрита відносно індукованої топології, має вигляд $X \cap U$, де $U \in \mathcal{T}$. Оскільки довільна точка $x \in X \cap U$ належить до U, існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді виконується і $x \in X \cap V \subset X \cap U$, оскільки $x \in X$. Аналогічно для бази у точці.

■

Наслідок 1.6.6. *Якщо топологічний простір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності, то й будь-який його підпростір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності.*

Доведення. Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ у попередньому твердженні не більш ніж зліченна, то такою є й $i^{-1}(\mathcal{B})$.

■

Інколи про властивості, що зберігаються при переході до підпростору (як у попередньому наслідку), говорять, що вони *наслідуються*. Корисно у якості вправи перевіряти, чи це так, для кожної з властивостей (інваріантів) топологічних просторів, що будуть виникати у подальшому.

Приклад 1.6.7. Нехай $Y = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією. З опису відкритих підмножин цього простору у теоремі 1.1.9 випливає, що, наприклад, у напівінтервалі $X = [a, b)$ з індукованою топологією відкритими будуть диз'юнктні об'єднання не більш ніж зліченної кількості проміжків вигляду $[a, c)$ (не більше одного), (d, e) і (f, b) (не більше одного). Зауважимо, що проміжки першого з цих типів не є відкритими в топології прямої.

Для підпростору $X = \mathbb{Z}$ прямої індукована топологія є дискретною, оскільки для кожної $x \in \mathbb{Z}$ одноточкова підмножина $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x-1, x+1)$ є відкритою. У вихідній топології прямої такі підмножини замкнені, але не відкриті.

Приклад 1.6.8. Визначимо для кожного цілого невід'ємного n *стандартну n-вимірну сферу* S^n як сферу метричного простору $(\mathbb{R}^{n+1}, \rho_2)$ радіуса 1, центр якої знаходиться у початку координат:

$$S^n := S_1(0) = \left\{ x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

Пояснення того, чому ця сфера саме n-вимірна, буде дане у параграфі 4.1. У якості топології на S^n оберемо індуковану стандартною топологією $\mathbb{R}^{n+1}$. З тверджень 1.5.3 і 1.6.5 тоді випливає, що базу цієї топології утворюють перетини зі сферою відкритих куль будь-якої з метрик ρ_p. Зокрема, для *кола* (одновимірної сфери) S^1 це відкриті дуги, що є перетинами відкритих евклідових кругів $\mathbb{R}^2$ з колом. Для двовимірної сфери S^2 довільний елемент бази можна описати як "відкритий криволінійний круг" у сфері, тобто одну з двох частин, на яку S^2 ділить пласке коло, що у ній лежить (без точок самого кола), і яка є перетином з S^2 відритої евклідової кулі $\mathbb{R}^3$. Аналогічний опис має місце й для довільної вимірності n.

Вправа 1.6.9. Показати, що підмножина S^1 є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є диз'юнктним об'єднанням не більш ніж зліченної кількості відкритих дуг (аналогічно до теореми 1.1.9).

З означення метрики випливає, що для будь-якого метричного простору (Y, ρ) і будь-якої його підмножини $X \subset Y$ обмеження ρ на $X \times X$ буде метрикою на X, тому пару $(X, \rho|_{X\times X})$ можемо назвати *метричним підпростором* (Y, ρ). Але на ньому існують дві апріорі різні топології: метрична та індукована. Виявляється, що насправді вони рівні:

Вправа 1.6.10. Показати, що метрична топологія $(X, \rho|_{X\times X})$ і топологія, що індукована на X метричною топологією (Y, ρ), збігаються.

1.7 Розташування точок відносно множини. Властивості щільності та сепарабельність

Наведемо кілька означень, що знадобляться нам для більш детального дослідження підмножин топологічних просторів:

Означення 1.7.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір і $A \subset X$ – його підмножина. Точка $x \in X$ зветься

- *внутрішньою точкою* A, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, що міститься в A: $x \in U \subset A$; множина усіх внутрішніх точок A називається *внутрішністю* A і позначається $\operatorname{Int} A$ або $\mathring{A}$;

- *точкою дотику* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ перетинається з A: $U \cap A \neq \varnothing$; множина усіх точок дотику A зветься *замиканням* A і позначається $\overline{A}$ або $\operatorname{Cl} A$;

- *граничною точкою* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить хоча б одну точку A, що відмінна від x: $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$; множина усіх граничних точок A зветься *похідною множиною* A і позначається A';

- *межовою точкою* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить точки як A, так і його доповнення: $U \cap A \neq \varnothing$ і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$; множина усіх межових точок A називається *межею* A і позначається ∂A;

- *ізольованою точкою* A, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, перетин якого з A складається з самої цієї точки: $U \cap A = \{x\}$.

Зокрема, усі внутрішні та ізольовані точки належать до A, а ось точки інших типів можуть як належати до A, так і ні, як побачимо у наведених нижче прикладах. Також з означень випливає, що x – внутрішня точка A тоді й тільки тоді, коли A – окіл x. Як зауважувалося вище, в усіх цих означеннях відкриті околи $U \ni x$ можна поміняти на довільні (перевірте це).

Вправа 1.7.2. Усі перелічені означення залишаться вірними (тобто позначатимуть ті самі об'єкти), якщо замість відкритих околів $U \ni x$ розглядати елементи будь-якої бази топології $\mathcal{T}$, що містять x.

Наступні приклади дозволять нам краще опанувати ці поняття.

Приклад 1.7.3. Розглянемо у $\mathbb{R}^2$ (зі стандартною топологією) множину

$$A := ((0,1) \times (0,1)) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1) \times \{0\}) \cup \{(2,2)\} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\},$$

що зображена зліва на рис. 1.2.

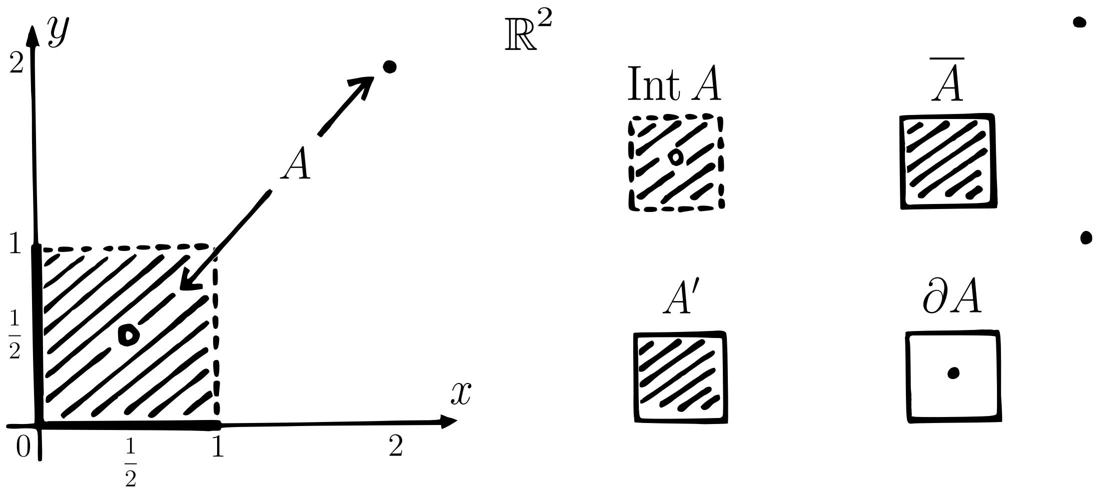


Рис. 1.2: Множина A і розташування точок відносно неї

Знайдемо для A множини точок типів, що перелічені у означенні 1.7.1:

- $\operatorname{Int} A = ((0,1) \times (0,1)) \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$ (відкритий квадрат без точки);

- $\overline{A} = ([0,1] \times [0,1]) \cup \{(2,2)\}$ (замкнений квадрат і точка);

- $A' = [0,1] \times [0,1]$ (замкнений квадрат);

- $\partial A = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\}) \cup \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (2,2) \right\}$ (сторони квадрата та дві точки);

- єдиною ізольованою точкою A є $(2,2)$.

Ці множини можна побачити справа на рис. 1.2.

Приклад 1.7.4. У просторі X з дискретною топологією одноточкова множина $\{x\}$ є відкритим околом будь-якої точки $x \in X$, звідки нескладно вивести, що для довільної підмножини $A \subset X$

$$\operatorname{Int} A = \overline{A} = A,\ A' = \partial A = \varnothing,$$

усі точки A ізольовані. Вигляд внутрішності та замикання A також випливає з твердження 1.7.8 нижче та того, що ця множина є одночасно відкритою та замкненою.

Приклад 1.7.5. Якщо $A \subset \mathbb{R}$ – проміжок прямої зі стандартною топологією з кінцями у дійсних точках $a < b$, тобто $A = (a,b)$, $[a,b]$, $[a,b)$ або $(a,b]$, то

$$\operatorname{Int} A = (a,b),\ \overline{A} = A' = [a,b],\ \partial A = \{a,b\},$$

ізольованих точок у A немає. Це випливає з того, що у точок (a,b) завжди є відкритий окіл (наприклад, вигляду $(x-\varepsilon, x-\varepsilon)$), що міститься в A, у точок $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ – окіл, що міститься в $\mathbb{R} \setminus A$, а ось у a і b будь-який окіл перетинає обидві ці множини, навіть якщо викинути з нього саму точку. Аналогічні твердження вірні й для напівнескінченних проміжків.

Усі точки підмножини цілих чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ цього ж простору є ізольованими (і тому не є внутрішніми), бо $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x-1, x+1)$ для кожної $x \in \mathbb{Z}$. При цьому у будь-якої $x \notin \mathbb{Z}$ є окіл, що не перетинається з $\mathbb{Z}$, тому точками дотику і межовими є в точності точки $\mathbb{Z}$, і жодна точка не є граничною. Отже,

$$\operatorname{Int} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Z}} = \partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Нарешті, з властивостей підмножини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а саме з того, що у будь-якому околі будь-якої точки $\mathbb{R}$ є як раціональні, так й ірраціональні точки, випливає, що

$$\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

а ізольованих точок немає. Ті ж властивості має множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Приклад 1.7.6. З іншого боку, у прямій Зоргенфрея напівінтервали $[a,b)$ є відкритими та замкненими, зокрема, $[x, x+\varepsilon)$ є відкритим околом x для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{Int}\,[a,b) = \overline{[a,b)} = [a,b)' = [a,b),\ \partial[a,b) = \varnothing,$$

ізольованих точок немає.

Вправа 1.7.7. Описати внутрішність, замикання, похідну множину, межу та ізольовані точки довільної підмножини $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів.

Твердження 1.7.8 (Властивості внутрішності, замикання і межі)**.** *Нехай* $(X, \mathcal{T})$ *– топологічний простір,* $A, B \subset X$*.*

1. *Внутрішність* A *є об'єднанням усіх відкритих підмножин* X*, що містяться в* A*:*
$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{U \subset A,\, U \in \mathcal{T}} U.$$

2. *Внутрішність* A *є найбільшою за включенням відкритою підмножиною* X*, що міститься в* A*.*

3. A *відкрита тоді й тільки тоді, коли* $A = \operatorname{Int} A$*.*

4. *Якщо* $A \subset B$*, то* $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ *(монотонність внутрішності).*

5. *Замикання* A *є перетином усіх замкнених підмножин* X*, що містять* A*:*
$$\overline{A} = \bigcap_{V \supset A,\, X \setminus V \in \mathcal{T}} V.$$

6. *Замикання* A *є найменшою за включенням замкненою підмножиною* X*, що містить* A*.*

7. A *замкнена тоді й тільки тоді, коли* $A = \overline{A}$*.*

8. *Якщо* $A \subset B$*, то* $\overline{A} \subset \overline{B}$ *(монотонність замикання).*

9. $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A = \operatorname{Int} A \sqcup \partial A$*.*

10. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$*.*

11. $X = \operatorname{Int} A \sqcup \overline{X \setminus A} = \overline{A} \sqcup \operatorname{Int}(X \setminus A)$*.*

З цих основних властивостей можна виводити й інші, наприклад:

Вправа 1.7.9. Показати, що множина A є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона не перетинається зі своєю межею: $A \cap \partial A = \varnothing$; і замкненою тоді й тільки тоді, коли вона містить свою межу: $A \supset \partial A$.

Доведення.

1. Дійсно, належність точки $x \in X$ до такого об'єднання еквівалентна існуванню відкритої U такої, що $x \in U \subset A$. Але це й означає, що $x \in \operatorname{Int} A$.

2. випливає з 1.: $\operatorname{Int} A$ відкрита як об'єднання відкритих підмножин, міститься в A як об'єднання підмножин A, і будь-яка відкрита $U \subset A$ включається до об'єднання з 1., а тому $U \subset \operatorname{Int} A$. Це й значить, що $\operatorname{Int} A$ – найбільша за включенням серед таких множин.

3. $\Leftarrow$ Достатність випливає з того, що $\operatorname{Int} A$ відкрита згідно з 2.

   $\Rightarrow$ Перевіримо необхідність: якщо A відкрита, то, оскільки $A \subset A$, $A \subset \operatorname{Int} A$ в силу 2. З іншого боку, $\operatorname{Int} A \subset A$ завжди за означенням. Тому $A = \operatorname{Int} A$.

4. Для будь-якої $x \in \operatorname{Int} A$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset A \subset B$, тому $x \in \operatorname{Int} B$.

5. Доведемо еквівалентну рівність доповнень до цих множин.

   Дійсно, якщо точка $x \in X$ не належить до вказаного перетину, то існує замкнена V така, що $A \subset V$ і $x \notin V$. Тоді $U := X \setminus V$ – відкрита, $x \in U$ і $U \cap A = \varnothing$. Це означає, що x не є точкою дотику A: $x \notin \overline{A}$.

   І навпаки: з $x \notin \overline{A}$ випливає існування відкритої $U \ni x$ такої, що $U \cap A = \varnothing$, тоді $V := X \setminus U$ – замкнена і має властивості $x \notin V$ і $A \subset V$, отже x не належить до перетину.

6. випливає з 5. так само, як 2. з 1. (перевірте це).

7. доводиться за допомогою 6. так само, як 3. доводиться за допомогою 2. (перевірте це).

8. Доведемо еквівалентне включення доповнень $X \setminus \overline{B} \subset X \setminus \overline{A}$. Дійсно, якщо $x \notin \overline{B}$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap B = \varnothing$. Але тоді й $U \cap A \subset U \cap B = \varnothing$. Тому $x \notin \overline{A}$.

9. Перш за все, усі множини A, A', ∂A і $\operatorname{Int} A \subset A$ включаються до $\overline{A}$, бо з належності $x \in X$ кожній з них випливає, що будь-який відкритий окіл цієї точки має непорожній перетин з A (у випадку $x \in A$ це принаймні сама x). Тому різноманітні об'єднання цих множин теж є підмножинами замикання $\overline{A}$. З іншого боку:

   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ повинна міститися якась точка A крім x, тому $x \in A'$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup A'$.
   - Знову ж, якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A і точка $x \in X \setminus A$, тому $x \in \partial A$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup \partial A$.
   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin \operatorname{Int} A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A, і $U \not\subset A$, тому U містить якусь точку $X \setminus A$, отже $x \in \partial A$. Таким чином, $\overline{A} \subset \operatorname{Int} A \cup \partial A$.

Нарешті, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то деякий її відкритий окіл міститься в A, тому не містить точок $X \setminus A$, отже $x \notin \partial A$. Тому $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \varnothing$, і останнє об'єднання у формулюванні цього пункту є диз'юнктним.

10. Це просто переформулювання означення: $x \in \partial A$ означає, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетини $U \cap A \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{A}$) і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{X \setminus A}$).

11. Якщо $x \notin \operatorname{Int} A$, то $U \not\subset A$ для кожної відкритої $U \ni x$, тобто $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, отже $x \in \overline{X \setminus A}$. Таким чином, $X = \operatorname{Int} A \cup \overline{X \setminus A}$. Крім того, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \subset A$, тому $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$, отже $x \notin \overline{X \setminus A}$. Звідси $\operatorname{Int} A \cap \overline{X \setminus A} = \varnothing$, тому об'єднання тут є диз'юнктним. Другу рівність отримуємо з першої, замінивши A на $X \setminus A$ (і навпаки).

■

Означення 1.7.10. Підмножина A топологічного простору X зветься *всюди щільною* в X, якщо $\overline{A} = X$, і *ніде не щільною* в X, якщо $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$.

З означення замикання випливає, що A є всюди щільною тоді й тільки тоді, коли має непорожній перетин з будь-яким відкритим околом будь-якої точки простору X, тобто з будь-якою непорожньою відкритою підмножиною X. Втім, тут достатньо обмежитися множинами з будь-якої бази (перевірте це). Зв'язок між введеними поняттями сформульовано у наступній вправі:

Вправа 1.7.11. Показати, що множина A ніде не щільна тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ всюди щільна (підказка: використати пункт 11. у твердженні 1.7.8). Вивести з цього, що відкрита множина всюди щільна тоді й тільки тоді, коли її доповнення ніде не щільне.

Детальніше про круг понять, що пов'язаний з властивостями щільності множин, можна дізнатися, наприклад у розділі 6.5 книги [23].

Означення 1.7.12. Топологічний простір X зветься *сепарабельним*, якщо в X існує не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина.

Приклад 1.7.13. З прикладу 1.7.4 випливає, що єдиною всюди щільною підмножиною простору X з дискретною топологією є X, а єдиною ніде не щільною – $\varnothing$. Зокрема, такий простір сепарабельний тоді й тільки тоді, коли множина X не більш ніж зліченна.

Приклад 1.7.14. Як було встановлено у прикладі 1.7.5, у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, тому раціональні та ірраціональні числа утворюють всюди щільні підмножини, що доповнюють одна одну. Оскільки перша з них є зліченною, цей простір сепарабельний. З іншого боку, $\operatorname{Int} \overline{\mathbb{Z}} = \operatorname{Int} \mathbb{Z} = \varnothing$, тобто цілі числа утворюють ніде не щільну підмножину.

Приклад 1.7.15. У $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією множина $\mathbb{Q}^n$ точок з раціональними координатами зліченна і всюди щільна. Дійсно, будь-який відкритий окіл U будь-якої точки $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ містить деякий елемент бази метричної топології метрики ρ_∞ – куб

$$B_\varepsilon(x) = (x^1 - \varepsilon, x^1 + \varepsilon) \times \ldots \times (x^n - \varepsilon, x^n + \varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$. Оскільки для будь-якого i від 1 до n інтервал $(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ містить раціональне $q^i \in \mathbb{Q}$, точка $q := (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{Q}^n$ міститься у $B_\varepsilon(x) \subset U$. Отже, $\mathbb{R}^n$ сепарабельний. З цього і твердження 1.7.18 нижче випливатиме, що він задовольняє другій аксіомі зліченності.

Прикладами ніде не щільних пімножин $\mathbb{R}^n$ є скінченні, $\mathbb{Z}^n$ (аналогічно до випадку $n = 1$ у попередньому прикладі) та нетривіальні афінні підпростори, скажімо, прямі у площині, прямі та площини у тривимірному просторі (покажіть це).

Сепарабельність тісно пов'язана з аксіомами зліченності, тому зазвичай її теж відносять до цієї групи аксіом.

Твердження 1.7.16. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він є сепарабельним.*

Доведення. Отже, нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база простору X. Занумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість ∞ може стояти натуральне n. Для кожного i тоді оберемо якусь точку $x_i \in V_i$. Тоді не більш ніж зліченна множина таких точок $A := \{x_i\}$ є всюди щільною. Дійсно, для будь-якої $x \in X$ та відкритої $U \ni x$ існує i таке, що $x \in V_i \subset U$, а отже $x_i \in V_i \subset U$, тобто $U \cap A \neq \varnothing$.

■

Вправа 1.7.17. Показати, що обернене твердження, взагалі кажучи, невірне (навести контрприклад).

Твердження 1.7.18. *Метричний простір задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли він є сепарабельним.*

Доведення. В силу попереднього твердження, тут залишилося довести лише достатність. Отже, нехай A – не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина метричного простору (X, ρ). Покажемо, що тоді зліченна система відкритих куль

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(y) \right\}_{y \in A,\, n \in \mathbb{N}}$$

є його базою. Дійсно, у будь-яку відкриту U будь-яка точка $x \in U$ входить разом з відкритою кулею $B_\varepsilon(x)$ для деякого $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Куля $B_{\frac{1}{n}}(x)$ повинна містити точку $y \in A$, бо є непорожньою відкритою множиною. Тоді

$$x \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset B_{\varepsilon-\rho(x,y)}(y) \subset B_{\varepsilon}(x) \subset U,$$

де друге включення куль випливає з $\rho(x,y) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а третє – з нерівності трикутника (перевірте це).

■

Вправа 1.7.19. Показати, що у метричному просторі $C[a,b]$ з прикладу 1.4.4 підмножина $\mathbb{Q}[x]$ поліномів з раціональними коефіцієнтами є зліченною і всюди щільною, тому цей простір сепарабельний.

Вправа 1.7.20. Показати, що метричні простори ℓ_p з вправи 1.4.5 сепарабельні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а ℓ_∞ не є сепарабельним.

1.8 Неперервні відображення

Наступне означення визначає, які відображення топологічних просторів ми вважаємо "природними" для них.

Означення 1.8.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься *неперервним*, якщо прообрази відкритих множин відкриті: $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ для будь-якої $V \in \mathcal{S}$.

Перш за все, встановимо зв'язок між цим поняттям і більш звичним завдяки курсу аналіза поняттям неперервності у точці.

Означення 1.8.2. Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ називається *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого відкритого околу її образу $V \ni f(x)$ існує її відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \subset f^{-1}(V)$.

Твердження 1.8.3. *Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли воно неперервне у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Для доведення неперервності у x неперервного f покладемо у означенні $U := f^{-1}(V)$. Це буде потрібний відкритий окіл x.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай $V \subset Y$ – довільна відкрита підмножина. Для будь-якої $x \in f^{-1}(V)$ відображення f неперервне в x, отже існує відкрита U_x така, що $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$ Це означає, що $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ – відкрита.

■

У означенні 1.8.1 можна замість відкритих множин використати замкнені (чому?). У означенні 1.8.2 умову $U \subset f^{-1}(V)$ можна замінити на еквівалентну $f(U) \subset V$. Як і в означеннях минулих параграфів, відкриті околи у ньому можна замінити на довільні. Крім того, їх можна замінити на елементи довільних баз відповідних топологій у точках. Більш строго це означає наступне:

Твердження 1.8.4. *Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори, $x \in X$, $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази $\mathcal{T}$ у x і $\mathcal{S}$ у $f(x)$ відповідно. Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне у точці x тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $V \in \mathcal{C}$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset V$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Будь-яка $V \in \mathcal{C}$ буде відкритим околом $f(x)$, тому згідно з означенням неперервності в x існує відкрита $W \ni x$ така, що $f(W) \subset V$. З означення бази в точці тоді випливає, що існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $U \subset W$. Отже $f(U) \subset f(W) \subset V$.

$\underline{\Leftarrow}$ Аналогічно, для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує $W \in \mathcal{C}$ така, що $W \subset V$. За умовою тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset W \subset V$. При цьому U буде відкритим околом x.

■

Наслідок 1.8.5. *Нехай (X, ρ) і (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне у точці $x \in X$ тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.*

Доведення. Випливає з попереднього твердження і того, що відкриті кулі з центром у x утворюють базу метричної топології в x.

■

Включення куль у цьому формулюванні означає, що з $\rho(x, y) < \delta$ випливає $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Це вже звичне "епсилон-дельта" означення. Далі через $C(X, Y)$ позначатимемо множину усіх неперервних відображень $X \to Y$.

Вправа 1.8.6. Показати, що відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів неперервне тоді й тільки тоді, коли $f^{-1}(V)$ відкрита для будь-якої $V \in \mathcal{C}$, де $\mathcal{C}$ – якась передбаза (зокрема база) топології Y.

Приклад 1.8.7. Для будь-яких просторів X та Y *постійне* відображення $f = y_0\colon X \to Y$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність одну й ту саму $f(x) = y_0$, неперервне, оскільки прообраз будь-якої множини $f^{-1}(V)$ – це або $\varnothing$ (якщо $y_0 \notin V$), або X (якщо $y_0 \in V$).

Приклад 1.8.8. *Тотожне* відображення будь-якого простору X на себе $f = id_X\colon X \to X$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність її ж ($id_X(x) = x$), є неперервним, бо $id_X^{-1}(V) = V$ для будь-якої V.

Приклад 1.8.9. Якщо X має дискретну топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких Y і $f\colon X \to Y$, бо всі прообрази відкриті.

Приклад 1.8.10. Якщо Y має антидискретну (тривіальну) топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких X і $f\colon X \to Y$, бо прообрази відкритих множин $f^{-1}(Y) = X$ і $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ відкриті.

Вправа 1.8.11. Як зміниться множина $C(X, Y)$, якщо послабити або посилити топологію X або Y?

Приклад 1.8.12. Ліпшицеві відображення метричних просторів (зокрема ізометрії) неперервні у відповідних метричних топологіях. Дійсно, нехай відображення $f\colon X \to Y$ має константу Ліпшиця $C > 0$. Тоді $\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y)$ у позначеннях наслідку 1.8.5 для будь-яких $x, y \in X$. Це означає, що $f\left(B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x)\right) \subset B_\varepsilon(f(x))$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто достатньо взяти $\delta \coloneqq \frac{\varepsilon}{C}$.

Приклад 1.8.13. Наслідок 1.8.5 означає, зокрема, що наше поняття неперервності в точці узагальнює означення неперервності функції багатьох змінних $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (зокрема $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) з курсу аналіза, якщо наділити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}$ стандартними топологіями. Більш того, зберігаються звичні властивості функцій, навіть якщо розглянути більш загальну область визначення:

Вправа 1.8.14. Нехай $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ – неперервні *функції* на довільному просторі X, тобто його відображення у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Показати, що тоді $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (остання – на області визначення з індукованою топологією, пор. з твердженням 1.8.17 нижче) також є неперервними.

Вправа 1.8.15. Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ – відображення довільного простору у $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією, $f = (f^1, \dots, f^n)$, де $f^i\colon X \to \mathbb{R}$ – *координатні функції* f. Показати, що $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ тоді й тільки тоді, коли $f^i \in C(X, \mathbb{R})$ для усіх i.

З цих двох вправ випливає, що для будь-яких $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ лінійна комбінація $\lambda f + \mu g \in C(X, \mathbb{R}^n)$, тобто $C(X, \mathbb{R}^n)$ утворює векторний підпростір у векторному просторі $(\mathbb{R}^n)^X$ усіх відображень $X \to \mathbb{R}^n$.

Твердження 1.8.16. *Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням: якщо $f \in C(Y, Z)$ і $g \in C(X, Y)$, то $f \circ g \in C(X, Z)$.*

Доведення. Дійсно, для будь-якої відкритої $V \subset Z$ маємо, що $f^{-1}(V) \subset Y$ відкрита, а отже й $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V)) \subset X$ відкрита.

■

Твердження 1.8.17. *Нехай X, Y – топологічні простори, $A \subset X$ і $B \subset Y$ – їхні топологічні підпростори (тобто підмножини з індукованою топологією), $f\colon X \to Y$ таке, що $f(A) \subset B$. Якщо $f \in C(X, Y)$, то його обмеження $f|_A \in C(A, B)$.*

Доведення. За означенням індукованої топології, будь-яка відкрита підмножина B має вигляд $B \cap V$, де V – відкрита в Y. При цьому $(f|_A)^{-1}(B \cap V) = A \cap f^{-1}(V)$ відкрита в A, бо $f^{-1}(V)$ відкрита в X. Тому $f|_A$ неперервне.

■

Іншими словами, неперервні відображення топологічних просторів індукують неперервні відображення їхніх підпросторів. Також неперервність можна використати для характеризації прообразу топології (зокрема індукованої топології), як показано у наступному твердженні. Зауважимо, що у частково впорядкованій множині існує не більше одного найменшого чи найбільшого елемента, тому подібні твердження дійсно визначають відповідну топологію однозначно і можуть слугувати у якості альтернативних означень (пор. також з вправою 1.3.10).

Твердження 1.8.18. *Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення деякої множини X у топологічний простір $(Y, \mathcal{T})$. Прообраз $f^{-1}(\mathcal{T})$ тоді є найслабшою топологією на X з тих, у яких f неперервне.*

Доведення. Ми вже знаємо, що $f^{-1}(\mathcal{T})$ – топологія. За її побудовою, $f^{-1}(V) \in f^{-1}(\mathcal{T})$ для будь-якої $V \in \mathcal{T}$, тобто f дійсно є неперервним. Але якщо f неперервне відносно будь-якої іншої топології $\mathcal{S}$ на X, то й для неї з означення неперервності матимемо $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ для усіх $V \in \mathcal{T}$, тобто $f^{-1}(\mathcal{T}) \prec \mathcal{S}$.

■

1.9 Границі та секвенційні означення

Наступне означення узагальнює ще одне класичне поняття аналіза.

Означення 1.9.1. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – послідовність у топологічному просторі X. Говорять, що вона *збігається* до точки $x \in X$ (або що x – її *границя*), якщо для будь-якого відкритого околу $U \ni x$ існує натуральне N таке, що $x_n \in U$ для будь-якого $n \geqslant N$.

Аналогічно до означень попереднього параграфа, можна у якості U брати довільні околи або множини з довільної бази в x (перевірте це). Наприклад, використавши кулі $B_\varepsilon(x)$ для метричних просторів як у наслідку 1.8.5, отримаємо звичне "епсилон-означення" границі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ для будь-якого $n \geqslant N$. Тому збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до точки x у метричному просторі еквівалентна збіжності відстаней $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За потреби будемо використовувати класичне позначення збіжності $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ або просто $x_n \to x$. Але зауважимо, що тепер границя може не бути єдиною:

Приклад 1.9.2. Розглянемо послідовність $\left\{x_n = x_0 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

- У стандартній топології x_0 – єдина границя $\{x_n\}$, як відомо з курсу аналіза (і неважко перевірити самостійно). Це так і в прямій Зоргенфрея (перевірте).

- У топології напівнескінченних інтервалів $x \in \mathbb{R}$ є границею $\{x_n\}$ тоді й тільки тоді, коли $x \leqslant x_0$. Дійсно, будь-який відкритий окіл такої точки має вигляд $(a, +\infty)$ з $a < x \leqslant x_0$, а отже містить усі елементи $\{x_n\}$. З іншого боку, у будь-якої точки $x > x_0$ існує окіл $(a, +\infty)$ з $a \in (x_0, x)$, що містить лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або зовсім їх не містить.

- Визначимо топологію базою з напівінтервалів вигляду $(a, b]$ аналогічно до топології Зоргенфрея. У цій топології границь у $\{x_n\}$ не існує. Дійсно, для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що відкритий окіл $(x-\varepsilon, x]$ точки x буде містити лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або не міститиме їх зовсім.

Вправа 1.9.3. Описати границі $\{x_n\}$ у дискретній, антидискретній та кофінітній топологіях. Чи можна щось сказати про границі довільної послідовності у довільній множині з цими топологіями?

Твердження 1.9.4. *Якщо відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ неперервне у точці $x \in X$, то для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, що збігається до x, її образ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $f(x)$. Якщо в x існує не більш ніж злічена база (зокрема, якщо X задовольняє першій аксіомі зліченності), то вірне й обернене твердження.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай f неперервне в x і $x_n \to x$. Тоді для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset f^{-1}(V)$, і, у свою чергу, існує натуральне N таке, що для усіх $n \geqslant N$ маємо $x_n \in U$, а отже $f(x_n) \in V$. Таким чином, $f(x_n) \to f(x)$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер $\mathcal{B}$ – не більш ніж злічена база в x. Перенумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. При цьому, якщо $\mathcal{B}$ скінченна, просто візьмемо усі множини починаючи з деякого індекса рівними. Покладемо $W_n \coloneqq U_1 \cap \ldots \cap U_n$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ – теж база в x (оскільки $x \in W_n \subset U_n$ для будь-якого n) і є незростаючою послідовністю відкритих околів x: $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \ldots \ni x$.

Припустимо, що умова на послідовності виконується, але f не є неперервним у x: існує відкрита $V \ni f(x)$ така, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ її образ $f(U) \not\subset V$. Зокрема, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n$ такий, що $f(x_n) \notin V$. Покажемо, що $x_n \to x$ (це буде вірно для будь-якої послідовності з $x_n \in W_n$). Дійсно, для будь-якої відкритої $U \ni x$, оскільки $\mathcal{B}$ – база в x, існує таке натуральне N, що $x \in W_N \subset U_N \subset U$. Тоді для кожного $n \geqslant N$ відповідний елемент послідовності $x_n \in W_n \subset W_N \subset U$, що й доводить збіжність до x. З іншого боку, $f(x_n) \not\to f(x)$, бо усі елементи послідовності $\{f(x_n)\}$ лежать за межами відкритого околу $V \ni f(x)$. Отримуємо протиріччя.

∎

Умову попереднього твердження також називають умовою *секвенційної неперервності* або *секвенційним* (тобто даним у термінах послідовностей) означенням неперервності. Виявляється, що у цих термінах можна описувати не лише неперервність: *секвенційним замиканням* множини інколи називають сукупність границь усіх послідовностей, що лежать у цій множині. Сама множина міститься у своєму секвенційному замиканні за побудовою, бо кожна її точка є границею постійної послідовності. Множину тоді називають *секвенційно замкненою*, якщо вона дорівнює такому замиканню.

Твердження 1.9.5. *Нехай $\widehat{A}$ – секвенційне замикання підмножини $A \subset X$ топологічного простору, тобто*

$$\widehat{A} \coloneqq \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A\colon x_n \to x\}.$$

Тоді $\widehat{A} \subset \overline{A}$. Якщо X задовольняє першій аксіомі зліченності, то вірне й обернене включення.

Доведення. $\subseteq$ Якщо $x \in \widehat{A}$, то будь-яка відкрита $U \ni x$ містить усі елементи відповідної послідовності, починаючи з деякого індекса N: $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U \cap A$. Отже, $U \cap A \neq \varnothing$. Тому $x \in \overline{A}$.

$\supseteq$ Для будь-якого $x \in \overline{A}$ побудуємо послідовність околів $\{W_n\}$ як у доведенні попереднього твердження. З означення замикання випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n \cap A$. Як і раніше, тоді послідовність $\{x_n\}$ збігається до x й тому $x \in \widehat{A}$.

■

Вправа 1.9.6. Навести приклади, що демонструють невірність оберненої імплікації у твердженні 1.9.4 і оберненого включення у твердженні 1.9.5 для загального простору X, тобто те, що секвенційні означення не можна вільно використовувати без аксіом зліченності.

1.10 Гомеоморфність та топологічні інваріанти

Поняття неперервного відображення дозволяє нам визначити основне відношення еквівалентності топологічних просторів – їхню гомеоморфність. Вона формалізує інтуїтивне уявлення про "перетворення множин без розривів і склеювань".

Означення 1.10.1. Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y зветься їх *гомеоморфізмом*, якщо f – бієкція і при цьому f та f^{-1} неперервні. Якщо існує гомеоморфізм $f\colon X \to Y$, то говорять, що X *гомеоморфний* Y (або що X та Y гомеоморфні) і позначають це $X \cong Y$.

Тобто гомеоморфізм – це взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення.

Твердження 1.10.2. *Гомеоморфність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо умови з означення еквівалентності.

- *Рефлексивність*: для будь-якого топологічного простору X тотожне відображення $id_X \colon X \to X$ – гомеоморфізм (див. приклад 1.8.8), тому $X \cong X$.

- *Симетричність*: якщо $X \cong Y$ і $f \colon X \to Y$ – відповідний гомеоморфізм, то $f^{-1} \colon Y \to X$ – теж гомеоморфізм за означенням (бо $(f^{-1})^{-1} = f$), тому $Y \cong X$.

- *Транзитивність*: нехай $X \cong Y$, $Y \cong Z$, і $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ – відповідні гомеоморфізми. Тоді $g \circ f \colon X \to Z$ – бієкція, $g \circ f \in C(X, Z)$ і $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \in C(Z, X)$ згідно з твердженням 1.8.16. Отже, $g \circ f$ – гомеоморфізм, тому $X \cong Z$.

■

Приклад 1.10.3. Якщо X та Y одночасно наділені дискретною або антидискретною топологією, то будь-яка бієкція між ними буде гомеоморфізмом (див. приклади 1.8.9 і 1.8.10). Тому $X \cong Y$ тоді й тільки тоді, коли ці множини рівнопотужні.

Приклад 1.10.4. В силу прикладу 1.8.12, біліпшицеві еквівалентності метричних просторів (зокрема ізометрії) є гомеоморфізмами.

Приклад 1.10.5. Афінні перетворення $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тобто відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – невироджена матриця і $b \in \mathbb{R}^n$) є гомеоморфізмами відносно стандартної топології (перевірте це).

Приклад 1.10.6. Усі інтервали в $\mathbb{R}$ (включно з самою $\mathbb{R}$) з топологіями, що індуковані стандартною топологією прямої, гомеоморфні. Дійсно, розглянемо відображення:

$$\begin{array}{ll}
(0,1) \to (a,b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\colon & t \mapsto (1-t)a + tb; \\
(0,1) \to (0,+\infty)\colon & t \mapsto \frac{t}{1-t}; \\
(0,+\infty) \to (a,+\infty),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto t + a; \\
(0,+\infty) \to (-\infty,a),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto -t + a; \\
(0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon & t \mapsto \ln t.
\end{array}$$

У якості другої функції також можна взяти $t \mapsto \mathrm{tg}\, \frac{\pi}{2} t$. Неважко перевірити, що це все бієкції, і, як відомо з аналіза (див. приклад 1.8.13), усі ці функції та обернені до них – неперервні, а отже індукують неперервні відображення інтервалів в силу твердження 1.8.17. З транзитивності гомеоморфності у твердженні 1.10.2 тоді випливає, що усі перелічені типи інтервалів дійсно гомеоморфні.

Аналогічно демонструється, що усі відрізки $[a, b]$ гомеоморфні між собою. Те ж вірне й для усіх напівінтервалів вигляду $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ або $(-\infty, a]$ (тут всюди $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). При цьому жодні два проміжки з різних груп не гомеоморфні, як буде продемонстровано згодом (це також випливає з наступної вправи, що, втім, неявно використовує зв'язність, яка з'явиться у цьому курсі пізніше). Зауважимо, що всі використані у цьому прикладі функції строго монотонні, і це не випадково:

Вправа 1.10.7. Показати, що функція $f\colon A \to B$ є гомеоморфізмом проміжків $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли вона неперервна, строго монотонна і сюр'єктивна (підказка: використати теорему Больцано – Коші про проміжне значення функції, див. її узагальнення у параграфі 2.12).

Вправа 1.10.8. Тут і далі позначатимемо через $B^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову відкриту кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Показати, що $B^n \cong \mathbb{R}^n$. Чи вірно це для довільної непорожньої відкритої опуклої підмножини (див. далі оначення 2.10.23) у $\mathbb{R}^n$? Відповідь див., наприклад, у [16].

Вправа 1.10.9. Розглянемо геометричний метод побудови гомеоморфізма між скінченним інтервалом (a, b) і $\mathbb{R}$, що показаний на рис. 1.3. Цей гомеоморфізм має вигляд композиції $g \circ f$, де f – обернена ортогональна проєкція інтервала на відкрите півколо, а g – центральна проєкція півкола на пряму. Записати ці відображення аналітично і показати, що кожне з них (а отже і їхня композиція) є гомеоморфізмом. Півколо тут розглядається з топологією, індукованою з $\mathbb{R}^2$.

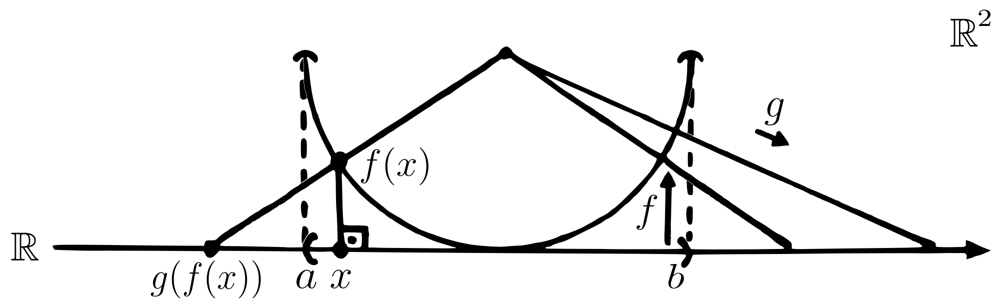


Рис. 1.3: Побудова гомеоморфізма між (a, b) і $\mathbb{R}$

Приклад 1.10.10. На рис. 1.4 зображено *стереографічну проєкцію* – відображення "проколотої сфери" $f\colon S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ для деякої $x_0 \in S^n$, що ставить у відповідність точці x сфери точку перетину променю x_0x з гіперплощиною $\mathbb{R}^{n+1}$, яка проходить через 0 ортогонально до радіуса-вектора x_0 і яку ми ототожнюємо з $\mathbb{R}^n$. Обертаючи за необхідності систему координат, можемо вважати, що $x_0 = N = (0, \ldots, 0, 1)$ – *північний полюс* сфери. Тоді відповідну гіперплощину утворюють точки з $x^{n+1} = 0$.

Для довільної $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$ параметричні рівняння променю Nx мають вигляд:

$$\begin{cases} y^1 &= tx^1, \\ \vdots & \vdots \\ y^n &= tx^n, \\ y^{n+1} &= 1 + t(x^{n+1} - 1). \end{cases}$$

Для його перетину з гіперплощиною $\{x^{n+1} = 0\}$ маємо $t = \frac{1}{1-x^{n+1}}$. Отже,

$$f(x) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right).$$

Це бієкція за побудовою, і вона неперервна згідно з твердженням 1.8.17 як обмеження на $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x^{n+1} = 1\} \to \mathbb{R}^n$ (див. також вправу 1.8.15). Знайдемо обернене відображення. Нехай $f(x) = y = (y^1, \ldots, y^n)$, тобто $y^i = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тоді, оскільки $x \in S^n$, квадрат *евклідової норми* y дорівнює

$$|y|^2 := \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x^i)^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 + x^{n+1}}{1 - x^{n+1}},$$

звідки отримуємо $x^{n+1} = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}$ і $1 - x^{n+1} = \frac{2}{|y|^2+1}$. Таким чином,

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right).$$

Тобто f^{-1} – обмеження на область значень $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, тому знову ж неперервне в силу твердження 1.8.17. Отже, f – гомеоморфізм.

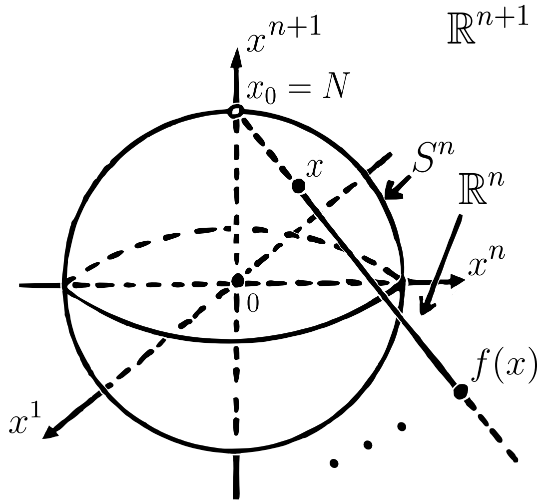


Рис. 1.4: Стереографічна проєкція

Наступне корисне спостереження також випливає з твердження 1.8.17:

Наслідок 1.10.11. *Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ і $f(A) = B$, то $f|_A\colon A \to B$ – гомеоморфізм підпросторів (з індукованими топологіями).*

В означенні гомеоморфізма умова неперервності оберненого відображення f^{-1} означає, що $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ відкрита для будь-якої відкритої $U \subset X$, тобто f переводить відкриті множини у відкриті. Ця властивість відображень має спеціальну назву:

Означення 1.10.12. Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів зветься *відкритим* (відповідно, *замкненим*), якщо для будь-якої відкритої (замкненої) $U \subset X$ образ $f(U) \subset Y$ відкритий (замкнений).

Твердження 1.10.13. *Нехай $f\colon X \to Y$ – бієктивне відображення топологічних просторів. Тоді наступні умови еквівалентні:*

- *f – гомеоморфізм;*
- *$U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли $f(U) \subset Y$ відкрита;*
- *f неперервне і відкрите;*
- *$V \subset X$ замкнена тоді й тільки тоді, коли $f(V) \subset Y$ замкнена;*
- *f неперервне і замкнене;*
- *для будь-якої бази $\mathcal{B}$ топології X її образ $f(\mathcal{B}) := \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ – база топології Y.*

Доведення. Еквівалентність перших п'яти умов безпосередньо випливає з означень і попереднього зауваження (а також із того, що для бієкції $f(X \setminus V) = Y \setminus f(V)$). Доведемо еквівалентність гомеоморфності останній умові збереження бази:

$\Rightarrow$ Отже, нехай f – гомеоморфізм. Тоді усі елементи $f(\mathcal{B})$ відкриті в силу відкритості f, і для будь-якої відкритої $V \subset Y$ прообраз кожної її точки $y \in V$ належить до $f^{-1}(V)$, що відкрита в X в силу неперервності f. Тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset f^{-1}(V)$, отже $y \in f(U) \subset V$, і $f(U) \in f(\mathcal{B})$. Таким чином, $f(\mathcal{B})$ дійсно є базою.

$\Leftarrow$ Тепер нехай f зберігає бази, і $\mathcal{B}$ – якась база топології X. Тоді $f(\mathcal{B})$ – база топології Y. Отже, для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in f^{-1}(V)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(x) \in f(U) \subset V$, тому $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Усі такі U відкриті, тому $f^{-1}(V)$ відкрита. Отже, f неперервне.

Аналогічно, для будь-якої відкритої $W \subset X$ і кожної $y \in f(W)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset W$, тому $y \in f(U) \subset f(W)$. Оскільки усі $f(U)$ відкриті як елементи бази $f(\mathcal{B})$, $f(W)$ відкрита. Таким чином, f відкрите, а отже є гомеоморфізмом.

■

З попереднього доведення випливає, що для гомеоморфності f достатньо, щоб воно переводило в базу топології Y якусь одну базу $\mathcal{B}$. Аналогічний критерій можна сформулювати також для баз у точках. З того, що гомеоморфізми зберігають відкриті околи, випливає, що вони також зберігають внутрішності, замикання, межі, границі послідовностей і т. ін. (Сформулюйте й доведіть відповідні наслідки.) Важливим окремим класом гомеоморфізмів є вкладення:

Означення 1.10.14. Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ зветься *вкладенням* X у Y, якщо його обмеження на область значень $f\colon X \to f(X)$ є гомеоморфізмом для індукованої топології на $f(X)$.

Приклад 1.10.15. Якщо $X \subset Y$ – підпростір топологічного простору Y, то включення $i\colon X \to Y$ є вкладенням, бо його обмеження $i\colon X \to i(X) = X$ є тотожним (тут обидві копії X мають одну й ту саму – індуковану – топологію).

З означення випливає, що будь-яке вкладення є неперервним (чому?) та ін'єктивним відображенням, але ці дві властивості не є достатніми, як демонструє наступний приклад (пор. також з наслідком 2.7.22 далі).

Приклад 1.10.16. Відображення $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2$, що визначене умовою $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, є неперервним (бо задається неперервними функціями) та ін'єктивним, але не є вкладенням, бо напівінтервал $[0,1)$ не гомеоморфний колу $S^1 = f([0,1))$. Це буде встановлено далі у прикладі 2.10.28 (а також випливатиме з результатів параграфа 2.7), але можна й безпосередньо перевірити, що відображення $f\colon [0,1) \to S^1$ не є гомеоморфізмом, бо не є відкритим (зробіть це).

Щоб доводити <u>не</u>гомеоморфність топологічних просторів (скажімо, проміжків різних типів з прикладу 1.10.6), нам знадобляться властивості з наступного неформального означення, що зберігаються при гомеоморфізмах. Тоді якщо існує така властивість (інваріант), що виконується для простору X і не виконується для Y, то $X \not\cong Y$.

Означення 1.10.17. Нехай $\mathcal{P}$ – якась властивість або характеристика, у т. ч. числова, топологічних просторів така, що для будь-яких гомеоморфних X та Y простір X задовольняє $\mathcal{P}$ тоді й тільки тоді, коли Y задовольняє $\mathcal{P}$ або характеристики $\mathcal{P}$ просторів X та Y рівні. Тоді будемо називати $\mathcal{P}$ *топологічним інваріантом*.

Приклад 1.10.18. Поки що нам зустрічалися наступні топологічні інваріанти простору $(X, \mathcal{T})$:

- Потужність X (бо гомеоморфізм є бієкцією). Наприклад, жоден скінченний топологічний простір негомеоморфний нескінченному, а зліченний – континуальному.

- Потужність топології $\mathcal{T}$ (бо гомеоморфізм встановлює бієкцію між відкритими множинами в силу твердження 1.10.13). Наприклад, простори з тривіальною і нетривіальною топологіями негомеоморфні, навіть якщо це одна й та сама множина.

- Друга аксіома зліченності (це випливає з умови збереження бази у твердженні 1.10.13, бо гомеоморфізм переводить не більш ніж зліченну базу у не більш ніж зліченну базу). Наприклад, стандартна пряма негомеоморфна прямій Зоргенфрея.

- Перша аксіома зліченності (з аналогічної умови збереження бази в точці). Наприклад, пряма з кофінітною топологією негомеоморфна ані стандартній, ані прямій Зоргенфрея в силу вправи 1.2.11.

- Сепарабельність (бо гомеоморфізм зберігає як замикання, так і потужності множин). Наприклад, метричні простори $C[a, b]$ і ℓ_∞ негомеоморфні в силу вправ 1.7.19 і 1.7.20. Зокрема, тоді з прикладу 1.10.4 випливає, що вони не можуть бути й біліпшицево еквівалентними.

- Метризовність (доведіть самостійно і наведіть приклад).

У подальшому цей список буде доповнюватися.

Розділ 2

Загальна топологія: конструкції та інваріанти

Загальною (теоретико-множинною) топологією називають розділ топології, що присвячений базовим властивостям топологічних (зокрема метричних) просторів та неперервних відображень і найбільш загальним топологічним інваріантам, що мають, як правило, аналітичну природу. Ця частина топології тісно пов'язана з різними розділами сучасного аналіза, зокрема, з функціональним аналізом. З основними поняттями загальної топології ми вже ознайомилися у попередньому розділі, а у цьому ми спочатку детально обговоримо її основні конструкції – прямий добуток та факторизацію, проілюструваши їх численними прикладами. Після цього ми перейдемо до вивчення кількох важливих груп загальнотопологічних інваріантів: аксіом відокремлюваності, властивостей компактності та зв'язності. Ці інваріанти будуть, зокрема, застосовані до доведення кількох нетривіальних теорем та властивостей топологічних просторів. Подальшу інформацію із загальної топології можна знайти, наприклад, у [1], [11], [14], [19], [23] та [26], а також (для випадку метричних просторів) у книгах з функціонального аналіза, таких як [5].

2.1 Топологія прямого добутку

Продовжимо знайомство з *топологічними конструкціями*, тобто зі способами побудови нових топологічних просторів з існуючих. У нас вже був приклад такої конструкції – прообраз топології (зокрема індукована топологія). Нагадаємо, що *прямим (декартовим) добутком* скінченної сукупності множин $X_1, \dots, X_n$ зветься множина усіх впорядкованих наборів, що містять по одному елементу кожної з цих множин:

$$X_1 \times \ldots \times X_n \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = \overline{1, n}\ x_i \in X_i\}.$$

Узагальнення цієї конструкції на довільну сукупність множин наведено нижче у означенні 2.1.8.

Твердження 2.1.1. *Нехай X та Y – топологічні простори з базами топологій $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ відповідно. Тоді*

$$\mathcal{H} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B},\, V \in \mathcal{C}\}$$

є базою деякої топології на декартовому добутку $X \times Y$. Відносно цієї топології $W \subset X \times Y$ відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої її точки $(x, y) \in W$ існують відкриті $U \subset X$ і $V \subset Y$ такі, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, ця топологія однозначно визначена топологіями X та Y (тобто не залежить від вибору баз $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$).

Доведення. Перевіримо виконання умов критерію бази для системи $\mathcal{H}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ є покриттями X та Y відповідно, для кожної $(x, y) \in X \times Y$ існують $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in U$ та $y \in V$, а отже $(x, y) \in U \times V$. Таким чином, $\mathcal{H}$ є покриттям $X \times Y$.

Нехай тепер $U \times V$, $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \in \mathcal{H}$. Оскільки $(U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V}) = (U \cap \widetilde{U}) \times (V \cap \widetilde{V})$, для будь-якої (x, y) з цього перетину маємо $x \in U \cap \widetilde{U}$ та $y \in V \cap \widetilde{V}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази, існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$, для яких $x \in \widehat{U} \subset U \cap \widetilde{U}$ та $y \in \widehat{V} \subset V \cap \widetilde{V}$. Отже, $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset (U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V})$.

В силу критерію, $\mathcal{H}$ дійсно є базою деякої топології на $X \times Y$. Доведемо тепер необхідну та достатню умову належності множини W цій топології. Незалежність від вибору баз випливає звідси, бо умова дана в термінах топологій X та Y.

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $W \subset X \times Y$ відкрита. За визначенням бази, тоді для будь-якої точки $(x, y) \in W$ існують такі $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, U і V відкриті.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер для будь-якої $(x, y) \in W$ існують відкриті U і V, для яких $(x, y) \in U \times V \subset W$. Тоді існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in \widehat{U} \subset U$ та $y \in \widehat{V} \subset V$, а отже $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset U \times V \subset W$. Оскільки усі такі $\widehat{U} \times \widehat{V} \in \mathcal{H}$ відкриті, W відкрита відносно топології $X \times Y$ з базою $\mathcal{H}$.

■

Означення 2.1.2. Топологія на $X \times Y$, що побудована у твердженні 2.1.1, зветься *топологією прямого добутку*, а $X \times Y$ – *прямим добутком* топологічних просторів X та Y.

Вправа 2.1.3. Показати, що топологія прямого добутку має властивість асоціативності: топології $(X \times Y) \times Z$ та $X \times (Y \times Z)$ на $X \times Y \times Z$ збігаються, тобто можна говорити однозначно про простір $X \times Y \times Z$. Більш того, це вірно для будь-якої скінченної кількості множників: можна коректно (тобто незалежно від розстановки дужок) визначити прямий добуток топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$, у якому підмножина $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $(x_1, \ldots, x_n) \in W$ існують відкриті $U_i \subset X_i$ для усіх i від 1 до n такі, що $(x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n \subset W$.

У подальшому будемо за замовчуванням вважати топологію на добутку скінченної кількості топологічних просторів саме такою. Аналогічно до означення бази, з твердження 2.1.1 і попередньої вправи випливає, що $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ відкрита тоді й тільки тоді, коли її можна представити у вигляді об'єднання добутків відкритих множин $U_1 \times \ldots \times U_n$. Зокрема, самі ці добутки є відкритими й утворюють базу даної топології.

Означення 2.1.4. *Канонічні проєкції* $p_X \colon X \times Y \to X$ та $p_Y \colon X \times Y \to Y$ прямого добутку на множники визначені наступним чином: $p_X \colon (x, y) \mapsto x$ та $p_Y \colon (x, y) \mapsto y$.

Твердження 2.1.5 (Властивості канонічних проєкцій)**.** *Нехай X, Y і Z – деякі топологічні простори, і при цьому $X \times Y$ наділений топологією прямого добутку.*

1. *Відображення p_X та p_Y є неперервними.*

2. *Топологія прямого добутку є найслабшою на $X \times Y$ з тих, для яких відображення p_X та p_Y неперервні.*

3. *Відображення $f \colon Z \to X \times Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли композиції $p_X \circ f$ та $p_Y \circ f$ неперервні.*

4. *Відображення $p_X|_{X \times \{y\}} \colon X \times \{y\} \to X$ та $p_Y|_{\{x\} \times Y} \colon \{x\} \times Y \to Y$ є гомеоморфізмами для будь-яких $y \in Y$ та $x \in X$ відповідно. Тут $X \times \{y\}$ та $\{x\} \times Y$ розглядаються з топологіями, що індуковані з $X \times Y$.*

Доведення.

1. Помітимо, що прообраз будь-якої $U \subset X$ має вигляд $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ й тому відкритий в $X \times Y$ для відкритої U як добуток відкритих множин (див. попереднє зауваження). Отже, p_X неперервне. Аналогічно для p_Y.

2. Ми вже знаємо з 1., що проєкції неперервні у топології прямого добутку. Нехай тепер $\mathcal{T}$ – якась інша топологія на $X \times Y$, відносно якої p_X та p_Y неперервні. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$, $V \subset Y$ їхній добуток

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{T},$$

бо це перетин відкритих множин. А тоді й усі елементи топології прямого добутку на $X \times Y$ також належать до $\mathcal{T}$ як об'єднання множин вигляду $U \times V$. Таким чином, топологія прямого добутку слабша за $\mathcal{T}$.

3. $\Rightarrow$ Нехай $f \in C(Z, X \times Y)$. Оскільки $p_X \in C(X \times Y, X)$ і $p_Y \in C(X \times Y, Y)$ в силу 1., $p_X \circ f \in C(Z, X)$ і $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$ як композиції неперервних.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $p_X \circ f \in C(Z, X)$ та $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$ і $V \subset Y$ маємо

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) = f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) =$$

$$= f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V),$$

що є відкритим як перетин відкритих. Таким чином, $f \in C(Z, X \times Y)$, оскільки в силу вправи 1.8.6, щоб довести його неперервність, достатньо показати, що усі прообрази елементів якоїсь бази $X \times Y$ відкриті.

<u>4.</u> Доведемо це твердження для p_X (для p_Y аналогічно). Зауважимо, що відображення $p_X|_{X \times \{y\}} \colon X \times \{y\} \to X$ бієктивне за побудовою і неперервне як обмеження неперервного. Тому в силу твердження 1.10.13 залишилося показати, що воно відкрите. Нехай $W \subset X \times \{y\}$ відкрита в індукованій топології, тобто є перетином $X \times \{y\}$ і деякої множини, що відкрита відносно топології прямого добутку. В силу зауваження вище, це означає, що для деяких сукупностей відкритих множин $\{U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in A}$ і $\{V_\alpha \subset Y\}_{\alpha \in A}$

$$W = (X \times \{y\}) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times V_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha \times \{y\}.$$

Тут об'єднання береться по усіх індексах $\alpha \in A$ таких, що $y \in V_\alpha$. Друга рівність тут випливає з того, що точка (x, y) міститься у перетині, яким є W, тоді й тільки тоді, коли $x \in U_\alpha$ та $y \in V_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$. Таким чином,

$$p_X(W) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha,$$

шо відкрита в X як об'єднання відкритих. Це й доводить відкритість обмеження p_X на $X \times \{y\}$.

■

Усі ці властивості очевидним чином узагальнюються на будь-яку скінченну кількість множників (як у вправі 2.1.3). Зокрема, в узагальненні пункту <u>4.</u> гомеоморфізмами будуть обмеження вигляду

$$p_{X_i}|_{\{x_1\} \times \ldots \times X_i \times \ldots \times \{x_n\}} \colon \{x_1\} \times \ldots \times X_i \times \ldots \times \{x_n\} \to X_i.$$

Характеризація топології прямого добутку у пункті <u>2.</u> невипадково нагадує характеризацію прообразу топології у твердженні 1.8.18. Це окремі випадки наступного загального поняття:

Означення 2.1.6. Нехай X – деяка множина, $\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – сукупність топологічних просторів, а $\{f_\gamma \colon X \to Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – сукупність відображень з X у ці простори. *Ініціальною топологією*, що породжена відображеннями $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ зветься найслабша топологія на X з тих, для яких усі ці відображення неперервні.

Вправа 2.1.7. Показати, що ініціальна топологія завжди існує (а отже єдина, див. зауваження перед твердженням 1.8.18) і що прообраз топології та топологія прямого добутку дійсно є її частковими випадками.

Більш того, використовуючи це поняття, можна узагальнити поняття топології прямого добутку зі скінченної кількості множників на довільну сукупність топологічних просторів наступним чином:

Означення 2.1.8. *(Прямим) декартовим добутком* деякої сукупності множин $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ зветься й позначається через $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ множина усіх відображень x, які кожному елементу $\gamma \in \Gamma$ індексуючої множини ставлять у відповідність деякий елемент $x_\gamma \in X_\gamma$ (їх областю значень буде формальне диз'юнктне об'єднання цих множин, див. далі пояснення на початку параграфа 2.3). Тоді *канонічною проєкцією* $p_{\gamma_0} \colon \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_{\gamma_0}$ для індекса $\gamma_0 \in \Gamma$ зветься відображення, яке кожному елементу $x \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ставить у відповідність його значення x_{γ_0} у γ_0.

Нехай тепер множини сукупності $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ є топологічними просторами. Їх *тихонівським добутком* зветься декартовий добуток $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з ініціальною топологією, що породжена канонічними проєкціями $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Приклад 2.1.9. Розглянемо простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ зі стандартними топологіями та їхній добуток, який ототожнимо з $\mathbb{R}^{n+m}$. Зауважимо, що у якості бази стандартної топології на $\mathbb{R}^k$ можна обрати сукупність відкритих паралелепіпедів, тобто добутків інтервалів $\prod\limits_{i=1}^{k}(a^i, b^i)$. Дійсно, відкриті кулі метрики ρ_∞ – куби $B_\varepsilon(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ – мають такий вигляд і, з іншого боку, кожен відкритий паралелепіпед можна представити у вигляді об'єднання відкритих куль цієї метрики, бо кожен з інтервалів (a^i, b^i) разом з кожною своєю точкою x^i містить інтервал $(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Таким чином, згідно з твердженням 2.1.1, база топології прямого добутку на $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ складається з множин вигляду

$$\prod_{i=1}^{n}(a^i, b^i) \times \prod_{i=n+1}^{n+m}(a^i, b^i) = \prod_{i=1}^{n+m}(a^i, b^i).$$

Отже, ця топологія на $\mathbb{R}^{n+m}$ збігається зі стандартною. Аналогічно для довільної скінченної кількості множників: так, $\mathbb{R}^n$ можна представити у вигляді

$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$ з топологією прямого добутку. Зокрема, тоді критерій неперервності відображень у $\mathbb{R}^n$ з вправи 1.8.15 випливає з узагальнення пункту 3. твердження 2.1.5 на випадок n множників.

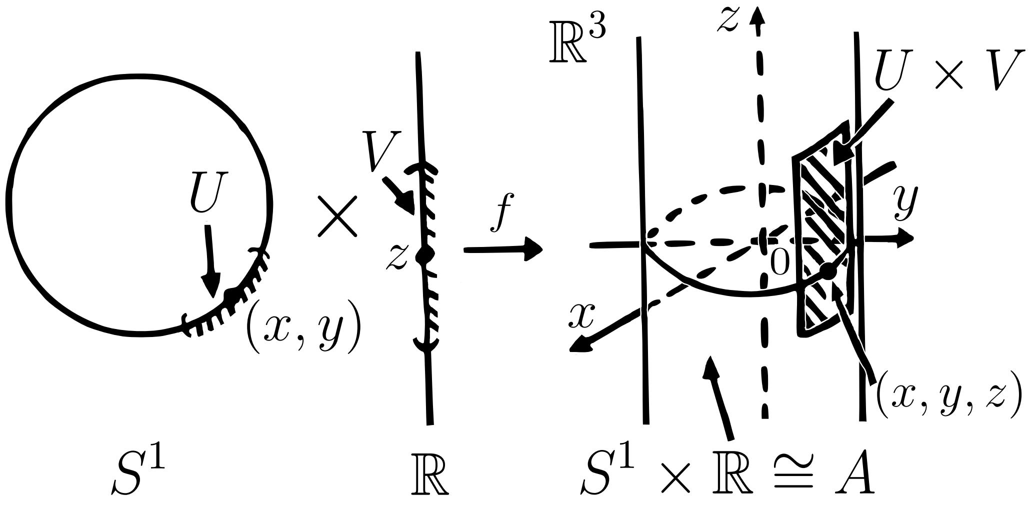


Рис. 2.1: Циліндр як прямий добуток

Приклад 2.1.10. Прямий добуток кола на пряму $S^1 \times \mathbb{R}$ гомеоморфний будь-якому круговому (або еліптичному) циліндру у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$. Тут, як завжди, $\mathbb{R}^3$ розглядається зі стандартною топологією, а циліндр – з індукованою. Дійсно, розглянемо круговий циліндр $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Будь-який інший еліптичний циліндр в $\mathbb{R}^3$ можна отримати з нього афінним перетворенням, що є гомеоморфізмом $\mathbb{R}^3$ на себе (приклад 1.10.5) і тому індукує гомеоморфізм циліндрів згідно з наслідком 1.10.11. Розглянемо $f \colon S^1 \times \mathbb{R} \to A$, що переводить пару $((x, y), z)$ з точки кола і точки прямої у точку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, це бієктивне відображення на A. Згідно з твердженням 2.1.1 та прикладом 1.6.8, базу $S^1 \times \mathbb{R}$ утворюють прямі добутки відкритих дуг кола на інтервали прямої. Під дією f вони переходять у відкриті "криволінійні прямокутники" в A, як показано на рис. 2.1. З іншого боку, базу індукованої топології A складають, згідно з твердженням 1.6.5, перетини A з елементами якоїсь бази $\mathbb{R}^3$. Обравши цю базу з паралелепіпедів, як у попередньому прикладі, бачимо, що f переводить базу $S^1 \times \mathbb{R}$ у базу A, і тому є гомеоморфізмом в силу твердження 1.10.13 (точніше, у побудовану базу A входитимуть також пари криволінійних прямокутників, що утворюються, коли паралелепіпед "проштрикує" циліндр, але їх можна звідти прибрати як об'єднання інших елементів бази). Іншими словами, відображення $f \colon S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ є вкладенням $S^1 \times \mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^3$ з образом A. Аналогічно, добуток кола на обмежений проміжок, скажімо, $S^1 \times [a, b]$, гомеоморфний обмеженому циліндру в $\mathbb{R}^3$ (чому?).

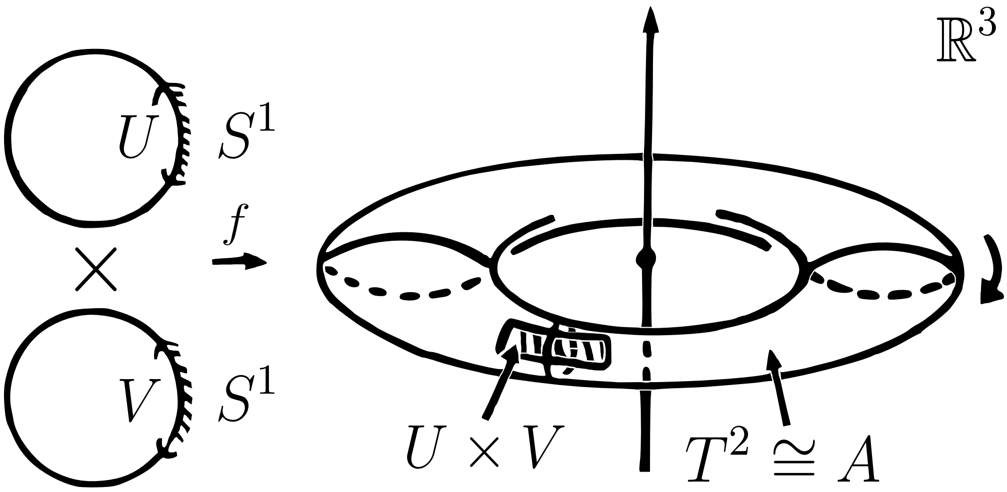


Рис. 2.2: Двовимірний тор

Приклад 2.1.11. Прямий добуток $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зветься *n-вимірним тором*. Зокрема, $T^1 = S^1$, а T^2 гомеоморфний круговому тору ("поверхні бублика", що зображена на рис. 2.2) в $\mathbb{R}^3$, тобто підмножині, що утворена обертанням кола навколо прямої, яка лежить в площині цього кола і не перетинається з ним. Гомеоморфізм будується аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це). Таким чином, T^2 теж вкладається у $\mathbb{R}^3$.

Вправа 2.1.12. Показати, що добуток $X \times Y$ задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли простори X та Y задовольняють першій (другій) аксіомі зліченності. Чи узагальнюється це на довільну скінченну кількість множників? Чи вірне аналогічне твердження для сепарабельності (хоча б в один бік)?

Вправа 2.1.13. Показати, що для будь-якого метричного простору (X, ρ) його метрика $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією на декартовому квадраті $X \times X$ з прямим добутком метричних топологій.

Вправа 2.1.14. Нехай (X, ρ) та (Y, σ) – метричні простори. Чи є прямий добуток метричних топологій на $X \times Y$ метричною топологією якоїсь метрики?

2.2 Фактортопологія

Ознайомимося ще з одним прикладом топологічної конструкції.

Означення 2.2.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, Y – деяка множина, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Факторттопологією* на Y, що породжена f, назвемо сукупність усіх таких підмножин Y, прообрази яких під дією f відкриті у X:

$$\mathcal{S} := \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Твердження 2.2.2. *Фактортопологія є найсильнішою топологією на Y з тих, у яких f неперервне.*

Доведення. Перш за все, доведемо, що $\mathcal{S}$ з попереднього означення – дійсно топологія, перевіривши виконання аксіом.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{S}$. Тоді $f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ для кожного $\alpha \in A$, тому
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$
отже $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{S}$.

2. Аналогічно, для скінченної сукупності $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ маємо $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$ для кожного $i = \overline{1, n}$, тоді
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T},$$
й тому $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{S}$.

3. Множини $\varnothing$ та Y належать до $\mathcal{S}$, оскільки $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ та $X = f^{-1}(Y)$ належать до $\mathcal{T}$.

За побудовою, прообрази відкритих відносно $\mathcal{S}$ множин відкриті, тому f неперервне. Нехай тепер $\mathcal{R}$ – якась інша топологія на Y така, що відображення $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ неперервне. Тоді для будь-якої $U \in \mathcal{R}$ її прообраз $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, тобто $U \in \mathcal{S}$. Таким чином, $\mathcal{R} \prec \mathcal{S}$.

■

Ця характеризація фактортопології виглядає дуальною до характеризацій ініціальних топологій (див. означення 2.1.6 і вправу 2.1.7), зокрема, прообразу топології та топології прямого добутку. У свою чергу, фактортопологія є частковим випадком наступного поняття, що дійсно є у певному сенсі дуальним до поняття ініціальної топології:

Означення 2.2.3. Нехай X – деяка множина, $\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – сукупність топологічних просторів, а $\{f_\gamma\colon Y_\gamma \to X\}_{\gamma \in \Gamma}$ – сукупність відображень з цих просторів у X. *Фінальною топологією*, що породжена відображеннями $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, зветься найсильніша топологія на X з тих, для яких усі ці відображення неперервні.

Вправа 2.2.4. Показати, що фінальна топологія завжди існує (а отже єдина) і що фактортопологія дійсно є її окремим випадком.

Ще один приклад такої топології буде наведено у параграфі 2.3 (див. означення 2.3.1 і вправу 2.3.2). Розглянемо тепер наступний важливий приклад побудови фактортопології:

Означення 2.2.5. Нехай $\sim$ – відношення еквівалентності на множині X. *Клас еквівалентності* елемента $x \in X$ позначатимемо через $[x]$, тобто $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Сукупність усіх попарно різних класів еквівалентності назвемо *фактормножиною* X за $\sim$ і будемо позначати $X/_\sim$. Відображення $p\colon X \to X/_\sim$, що переводить x у його клас еквівалентності $[x]$, будемо називати *канонічною проєкцією*. Якщо при цьому $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, то фактортопологію, що породжена на $X/_\sim$ відображенням p, називають фактортопологією, що породжена відношенням $\sim$, а фактормножину $X/_\sim$ з цією топологією – *факторпростором* $(X, \mathcal{T})$ за $\sim$.

Таким чином, $U \subset X/_\sim$ відкрита відносно фактортопології тоді й тільки тоді, коли відкрита в X множина

$$p^{-1}(U) = \{x \in X \mid [x] \in U\} = \bigcup_{[x] \in U} [x],$$

тобто сукупність усіх елементів усіх класів еквівалентності, що входять до U. Згідно з твердженням 2.2.2, канонічна проєкція p тоді буде неперервним відображенням.

Попереднє означення окремого випадку фактортопології насправді певним чином еквівалентне загальному означенню фактортопології, що породжена відображенням, якщо це відображення сюр'єктивне. Дійсно, нехай $f\colon X \to Y$ – деяка сюр'єкція. Назвемо точки x і y з X еквівалентними, якщо $f(x) = f(y)$. Це задає відношення еквівалентності $\sim$ на X, класами еквівалентності якого є прообрази одноточкових підмножин Y, причому коректно визначене і є бієкцією відображення $\varphi\colon X/_\sim \to Y$, що переводить кожен клас еквівалентності $[x]$ у $f(x)$ (перевірте це). Якщо X – топологічний простір, то підмножина $U \subset X/_\sim$ є відкритою у сенсі означення 2.2.5 тоді й тільки тоді, коли $\varphi(U) \subset Y$ відкрита у сенсі означення 2.2.1 (чому?), тобто φ є (канонічно визначеним) гомеоморфізмом цих просторів у силу твердження 1.10.13. Далі ми роглядатимемо лише фактортопологію у сенсі означення 2.2.5 і за замовчуванням вважатимемо, що на фактормножині топологічного простору введена саме така топологія. Узагальнимо конструкцію, за допомогою якої вище був визначений гомеоморфізм φ:

Означення 2.2.6. Нехай X та Y – деякі множини, $\sim$ – відношення еквівалентності на X, а відображення $f\colon X \to Y$ *факторизовне*, тобто переводить еквівалентні точки в одну й ту саму: $f(x) = f(y)$ для будь-яких $x \sim y$ з X. Тоді визначимо *факторвідображення* $f/_\sim\colon X/_\sim \to Y$ наступним чином: $f/_\sim([x]) \coloneqq f(x)$ для будь-якого $[x] \in X/_\sim$.

Таким чином, $f/_\sim$ переводить клас еквівалентності в образ довільного його елемента. Коректність цього означення випливає з факторизовності f. Іншими словами, $f/_\sim$ визначається умовою $f = (f/_\sim) \circ p$. Такі рівності композицій зручно представляти у вигляді *комутативних діаграм*, тобто орієнтованих графів, вершинами яких є деякі множини, а ребрами (що позначені стрілочками) – відображення між ними, таких, що усі композиції стрілочок, що ведуть з певної множини у якусь іншу, рівні. У даному випадку діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/_\sim \arrow[r, "f/_\sim"] & Y \end{tikzcd}$$

множин та відображень повинна бути комутативною. Зокрема, будь-яке відображення $X/_\sim \to Y$ має вигляд $f/_\sim$ для деякого $f\colon X \to Y$ (чому?). Наступний критерій неперервності таких відображень нагадує пункт <u>3.</u> твердження 2.1.5:

Твердження 2.2.7. *Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$, що факторизовне відносно відношення еквівалентності $\sim$ на X, є неперервним тоді й тільки тоді, коли факторвідображення $f/_\sim\colon X/_\sim \to Y$ неперервне.*

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Якщо $f/_\sim \in C(X/_\sim, Y)$, то $f = (f/_\sim) \circ p \in C(X, Y)$ як композиція неперервних (див. попереднє зауваження).

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай $f \in C(X, Y)$. Тоді для будь-якої відкритої $V \subset Y$ множина $p^{-1}((f/_\sim)^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ відкрита в X, а отже $(f/_\sim)^{-1}(V)$ відкрита в $X/_\sim$ за означенням фактортопології. Це й означає, що $f/_\sim \in C(X/_\sim, Y)$.

■

Приклад 2.2.8. У цьому і трьох наступних прикладах $X := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t, s \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1]$ – замкнений квадрат. Топологію на ньому можна вводити як індуковану стандартною топологією площини або як топологію прямого добутку (чому це одне й те саме?). Перш за все, задамо відношення еквівалентності на X умовою $(0, s) \sim (1, s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Визначимо $f\colon X \to S^1 \times [0, 1]$ умовою $f(t, s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s)$. Воно неперервне і факторизовне відносно $\sim$ (бо 2π є періодом синуса і косинуса), тому породжує факторвідображення $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times [0, 1]$, що неперервне згідно з твердженням 2.2.7. Більш того, неважко перевірити, що відображення $f/_\sim$ є бієкцією.

Перевіримо, що $f/_\sim$ – відкрите. Нехай $U \in X/_\sim$ відкрита, тоді $p^{-1}(U)$ відкрита в X. Розглянемо довільну точку U. Якщо ця точка – клас еквівалентності з одного елемента $[(t, s)] = \{(t, s)\}$ (де $t \in (0, 1)$), то в X у точки $(t, s) \in p^{-1}(U)$ можна знайти відкритий окіл вигляду $X \cap B_\varepsilon(t, s) \subset p^{-1}(U)$, що не містить точок вигляду $(0, s)$ або $(1, s)$. Тут $B_\varepsilon(t, s) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ – відкрита куля метрики ρ_∞. Тоді

$$f/_\sim([(t, s)]) = f(t, s) \in f(X \cap B_\varepsilon(t, s)) \subset f/_\sim(U),$$

і $f(X \cap B_\varepsilon(t,s))$ є добутком дуги кола на проміжок $[0,1] \cap (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, відкритий у $[0,1]$, тобто є відкритим околом $f/_\sim([(t,s)])$ у $S^1 \times [0,1]$. Отже, $f/_\sim([(t,s)])$ – внутрішня точка $f/_\sim(U)$.

Тепер розглянемо точку U, що є класом еквівалентності з двох елементів: $[(0,s)] = \{(0,s),(1,s)\}$. Обидві ці точки входять у відкриту $p^{-1}(U)$ з деякими околами: $(0,s) \in X \cap B_{\varepsilon_0}(0,s) \subset p^{-1}(U)$ і $(1,s) \in X \cap B_{\varepsilon_1}(1,s) \subset p^{-1}(U)$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Тоді $f(X \cap (B_\varepsilon(0,s) \cup B_\varepsilon(1,s)))$, що утвориться склеюванням двох околів, знову буде добутком дуги кола на відкритий (в індукованій топології $[0,1]$) проміжок і утворюватиме відкритий окіл $f/_\sim([(0,s)])$ у $S^1 \times [0,1]$, як показано на рис. 2.3 зверху. Оскільки

$$f/_\sim([(0,s)]) = f(0,s) \in f(X \cap (B_\varepsilon(0,s) \cup B_\varepsilon(1,s))) \subset f/_\sim(U),$$

$f/_\sim([(0,s)])$ теж буде внутрішньою точкою $f/_\sim(U)$. Таким чином, $f/_\sim(U)$ відкрита. Тому $f/_\sim$ дійсно відкрите, а отже є гомеоморфізмом згідно з твердженням 1.10.13. Ми встановили, що $X/_\sim \cong S^1 \times [0,1]$.

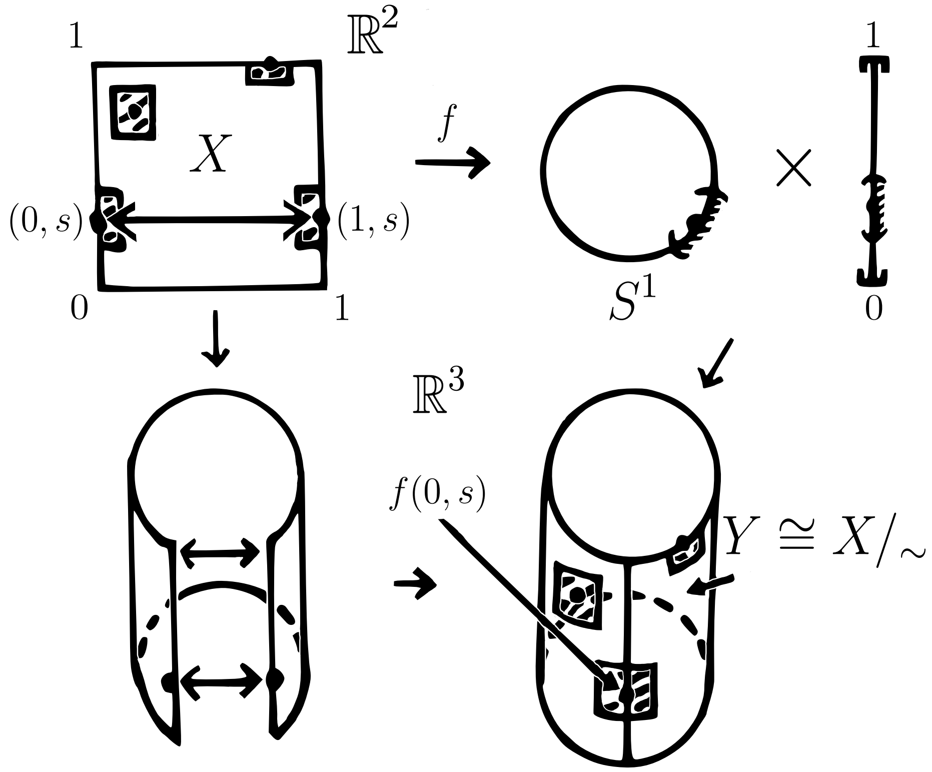


Рис. 2.3: Замкнений циліндр як факторизація квадрата

З іншого боку, добуток $S^1 \times [0,1]$ гомеоморфний замкненому обмеженому еліптичному циліндру в $\mathbb{R}^3$, наприклад, множині $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z \in [0,1]\}$. Це доводиться аналогічно до прикладу 2.1.10: просто переводимо пару $((x,y),z)$ у точку (x,y,z) циліндра. Отже, склеюючи (тобто ототожнюючи) точки протилежних сторін квадрата за допомогою факторизації, отримуємо циліндр, що теж показано на рис. 2.3.

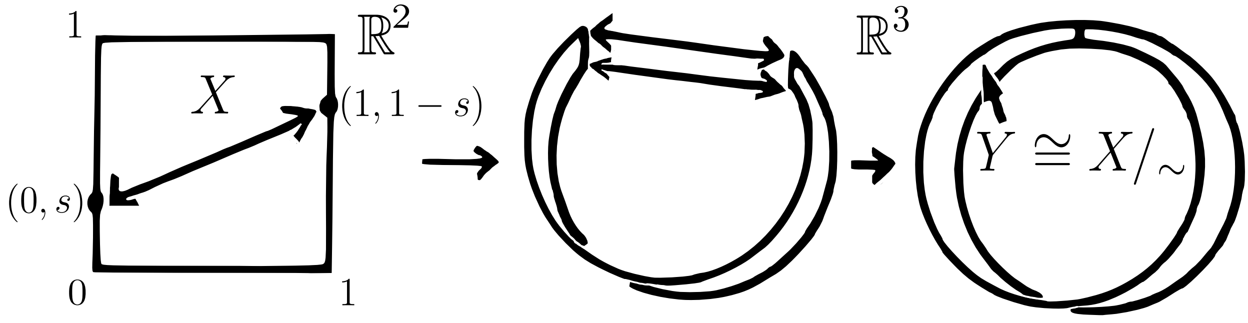


Рис. 2.4: Лист Мебіуса

Приклад 2.2.9. Для того ж X нехай $(0, s) \sim (1, 1-s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Аналогічно до попереднього прикладу, будуємо підмножину $\mathbb{R}^3$, що гомеоморфна $X/_{\sim}$, склеюючи точки протилежних сторін квадрата, але тепер перед склеюванням потрібно зробити напівобертання, що відповідає симетрії відносно центру квадрата. Це проілюстровано на рис. 2.4. Простір $X/_{\sim}$, що при цьому утворюється, зветься (замкненим) *листом Мебіуса*, або *стрічкою Мебіуса*.

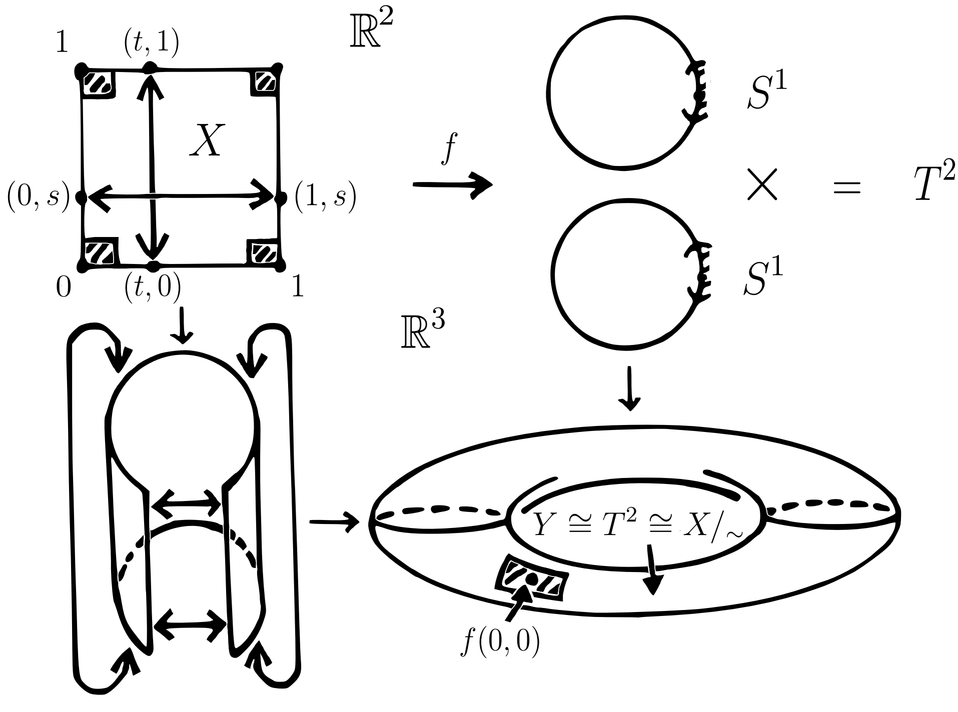


Рис. 2.5: Двовимірний тор як факторизація квадрата

Приклад 2.2.10. Тепер нехай $(0, s) \sim (1, s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, $(t, 0) \sim (t, 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$, інші (внутрішні) точки еквівалентні тільки собі. Зауважимо, що тут чотири точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ і $(1, 1)$ еквівалентні, а інші точки межі квадрата ототожнюються по дві. Аналогічно до прикладу 2.2.8, можна побудувати відображення $f\colon X \to S^1 \times S^1$:

$$f(t,s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)),$$

що факторизується у гомеоморфізм $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times S^1 = T^2$ (перевірте це; зауважимо, що окіл для вершин квадрата треба будувати з чотирьох частин, як показано зверху на рис. 2.5), тобто $X/_\sim$ гомеоморфний двовимірному тору. Він, у свою чергу, гомеоморфний поверхні бублика в $\mathbb{R}^3$ (див. приклад 2.1.11). Рис. 2.5 дає уявлення, як отримати з квадрата цю поверхню: спочатку склеюємо квадрат у циліндр, а потім приклеюємо його кінці один до одного.

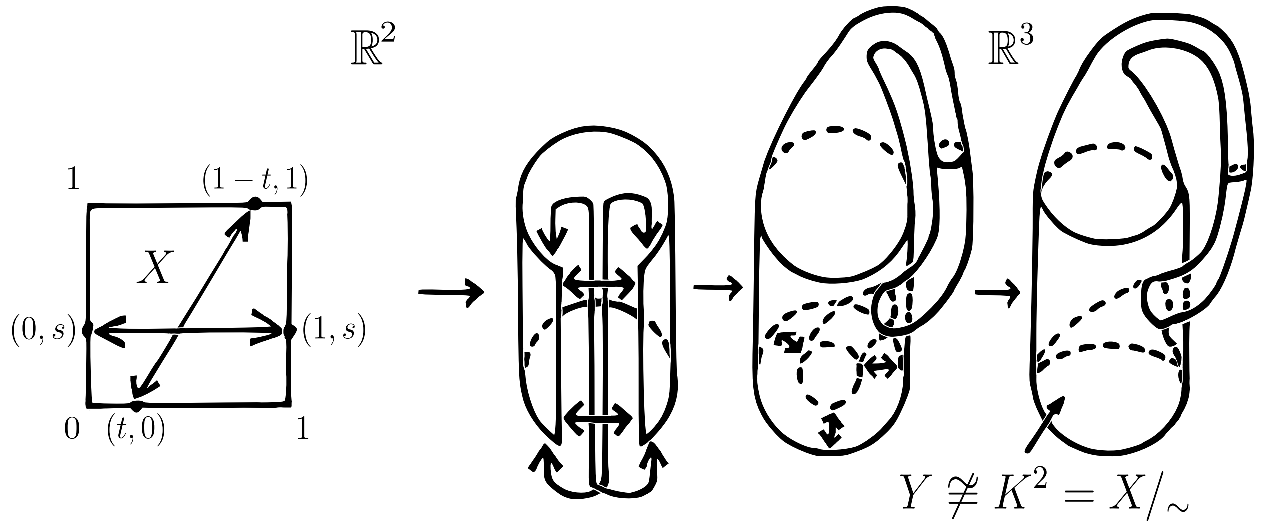


Рис. 2.6: Пляшка Клейна

Приклад 2.2.11. Нарешті, нехай $(0,s) \sim (1,s)$ для кожного $s \in [0,1]$, $(t,0) \sim (1-t,1)$ для кожного $t \in [0,1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Тут знову вершини квадрата еквівалентні, а інші точки межі квадрата склеюються по дві. Інтуїтивне уявлення про простір $X/_\sim$ можна отримати з рис. 2.6 за аналогією з тором: тепер перед склеюванням кінців циліндра необхідно його вивернути. Зауважимо, що з цієї причини умовне зображення цього простору у вигляді поверхні має самоперетини. Насправді він не вкладається у $\mathbb{R}^3$, на відміну від просторів з попередніх трьох прикладів, тобто не існує множини $Y \subset \mathbb{R}^3$ з індукованою топологією, що гомеоморфна $X/_\sim$. Втім, така множина існує у $\mathbb{R}^4$. Доведення цих фактів виходить за межі даного курсу. Простір $X/_\sim$ зветься *пляшкою Клейна* й інколи позначається K^2.

У подальшому площину $\mathbb{R}^2$, у якій лежить стандартне коло S^1, будемо ототожнювати з комплексною площиною $\mathbb{C}$. Тоді S^1 ототожниться з множиною комплексних чисел модуля 1. Тому, наприклад, відображення f з прикладу 2.2.10 можна записати у більш компактній формі $f(t,s) = \left(e^{2\pi it}, e^{2\pi is}\right)$ в силу формули Ейлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Приклад 2.2.12. Нехай A – підмножина топологічного простору X. Введемо відношення еквівалентності $\sim$ на X наступним чином: усі точки A еквівалентні, усі інші еквівалентні тільки собі. Тоді факторпростір $X/_{\sim}$ позначається $X/_{A}$ й інколи зветься факторпростором X за A. Інтуїтивно ця факторизація відповідає стягуванню множини A в одну точку. Наприклад, $[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$: склеюючи кінці відрізка, отримуємо коло. Це доводиться як у прикладі 2.2.8 (тільки простіше) за допомогою відображення $f\colon [0,1] \to S^1$: $f(t) = e^{2\pi i t}$. Узагальнимо це спостереження:

Вправа 2.2.13. Далі будемо позначати через $D^n := D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову замкнену кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Очевидно, при $n \geqslant 1$ межею цієї кулі буде $S^{n-1} \subset D^n$. Показати, що $D^n/_{S^{n-1}} \cong S^n$.

2.3 Суми, склеювання і букети

Нехай X та Y – деякі множини. Якщо вони є підмножинами якоїсь спільної множини Z і не перетинаються там, то можемо розглянути їх диз'юнктне об'єднання $X \sqcup Y$. Якщо вони перетинаються, можна доповнити їх елементи "мітками", тобто замінити X та Y на $\{(x,0) \mid x \in X\}$ та $\{(y,1) \mid y \in Y\}$ відповідно і розглянути об'єднання цих нових множин, що гарантовано буде диз'юнктним. Аналогічно, для сім'ї $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ довільних множин (зокрема й таких, що не включаються у спільну множину) можемо визначити їх формальне *диз'юнктне об'єднання* наступним чином:

$$\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \{(x,\gamma) \mid \gamma \in \Gamma,\, x \in X_\gamma\}.$$

Далі під диз'юнктним об'єднанням множин будемо розуміти саме цю конструкцію. Якщо ці множини наділені топологіями, то топологію їх диз'юнктного об'єднання будуватимемо наступним чином:

Означення 2.3.1. *Топологічною сумою* сукупності топологічних просторів $\{(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ називається множина $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з топологією

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \;\middle|\; \forall\, \gamma \in \Gamma\ U_\gamma \in \mathcal{T}_\gamma \right\}.$$

Вправа 2.3.2. Перевірити, що $\mathcal{T}$ з попереднього означення дійсно є топологією. Більш того, це найсильніша топологія на $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з тих, у яких включення

$$i_\gamma\colon X_\gamma \to \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\colon x \mapsto (x,\gamma)$$

для усіх $\gamma \in \Gamma$ неперервні. Таким чином, це ще один (разом з фактортопологією) приклад фінальної топології з означення 2.2.3.

Означення 2.3.3. Нехай X та Y – топологічні простори, $A \subset X$, і відображення $f\colon A \to Y$ неперервне (відносно індукованої топології A). Тоді *склеюванням* просторів X та Y за f називається факторпростір $X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/_\sim$, де еквівалентність $\sim$ визначається умовою $x \sim f(x)$ для кожної $x \in A$, а інші точки еквівалентні лише собі.

Приклад 2.3.4. Нехай $f = y_0$ – постійне відображення з $A \subset X$ у одноточковий простір $Y = \{y_0\}$. Тоді $X \cup_f Y$ – це результат ототожнення усіх точок A з точкою y_0, що гомеоморфний $X/_A$ з прикладу 2.2.12 (чому?). Так, S^1 – це результат склеювання кінців відрізка $[0, 1]$ з точкою (або, як ще кажуть, приклеювання точки до кінців цього відрізка).

Означення 2.3.5. *Букетом* топологічних просторів X та Y з *відміченими точками* $x \in X$ та $y \in Y$ зветься простір $(X, x) \vee (Y, y) := X \cup_f Y$, де $f\colon A \to Y$ визначене умовами $A = \{x\}$ та $f(x) = y$.

Приклад 2.3.6. На рис. 2.7 зображені різні букети відрізка $[0, 1]$ і кола S^1, що залежать від вибору точки відрізка.

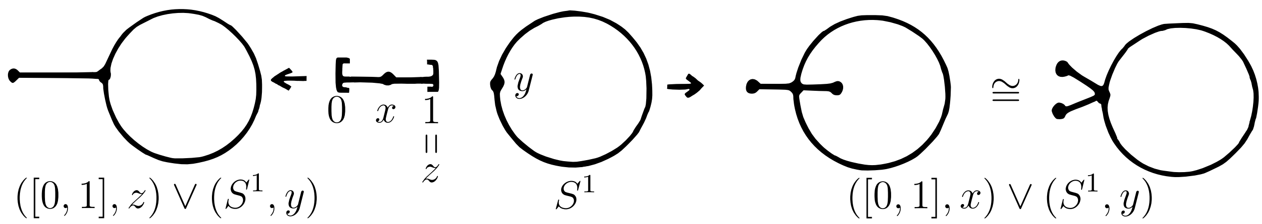


Рис. 2.7: Букети відрізка і кола

Іншими словами, при побудові букета ми склеюємо відмічені точки. Це поняття також природним чином узагальнюється на довільну сім'ю просторів:

Означення 2.3.7. *Букетом* сукупності топологічних просторів із відміченими точками $\{(X_\gamma, x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ зветься факторпростір

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, x_\gamma) := \left(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \Big/ {\sim},$$

де відношення еквівалентності $\sim$ визначається умовою $x_\gamma \sim x_\delta$ для будь-яких $\gamma, \delta \in \Gamma$, інші точки еквівалентні лише собі.

Вправа 2.3.8. Показати, що букет скінченної сукупності кіл S^1 не залежить (з точністю до гомеоморфізма) від вибору відмічених точок. Тому букет n кіл, що інколи називають *розою*, позначається просто $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$. Наприклад, при $n = 2$ це "вісімка". Див. рис. 2.8.

З іншими топологічними конструкціями, що будуються за допомогою факторизації, можна ознайомитися у [17, с. 8-14].

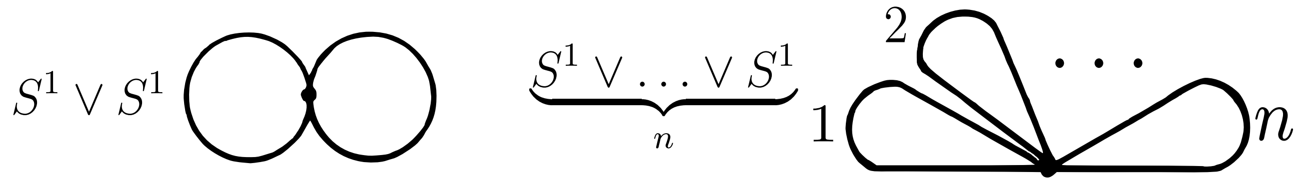


Рис. 2.8: Букети кіл

2.4 Дія групи на множині. Простір орбіт

Розглянемо тепер ще один важливий клас факторпросторів. Для цього знадобляться деякі базові поняття та приклади з теорії груп, які за необхідності можна знайти у доповненні (зокрема, означення A.1 та приклади після нього). Як і там, у цьому параграфі, якщо не вказане інше, для груп будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення.

Означення 2.4.1. Нехай G – деяка група, а X – множина. *(Лівою) дією* G на X зветься відображення $\lambda\colon G \times X \to X$, що переводить пару (a, x) з елемента групи і елемента множини у $\lambda(a, x) = a \cdot x \in X$ (позначення з точкою будемо використовувати, коли зрозуміло, про яку саме дію йдеться) таке, що:

1. $e \cdot x = x$ для будь-якого $x \in X$, де e – нейтральний елемент (одиниця) групи G.

2. $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ для будь-яких $a, b \in G$ та $x \in X$.

Означення 2.4.2. Дія називається:

- *ефективною*, якщо для будь-якого $e \neq a \in G$ існує $x \in X$ такий, що $a \cdot x \neq x$;

- *вільною*, якщо $a \cdot x \neq x$ для будь-яких $e \neq a \in G$ та $x \in X$;

- *транзитивною*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує $a \in G$ такий, що $a \cdot x = y$.

Орбітою елемента $x \in X$ зветься $G \cdot x \coloneqq \{a \cdot x \mid a \in G\}$.

Очевидно, вільні дії є ефективними. Транзитивність дії еквівалентна тому, що вся множина X є орбітою будь-якого її елемента: $X = G \cdot x$. Зв'язок з поняттям факторможини стає зрозумілим, якщо помітити, що орбіти дії – це класи деякого відношення еквівалентності:

Твердження 2.4.3. *Нехай група G діє на X. Введемо відношення $\sim$ на X: $x \sim y$, якщо $y \in G \cdot x$. Тоді це відношення еквівалентності, причому класом еквівалентності елемента $x \in X$ є $G \cdot x$.*

Доведення. Іншими словами, $x \sim y$ тоді й тільки тоді, коли існує $a \in G$ такий, що $y = a \cdot x$ Перевіримо виконання умов еквівалентності:

- Для будь-якого $x \in X$ за умовою 1. означення дії $x = e \cdot x$, тому $x \sim x$.
- Нехай $x \sim y$, тобто $y = a \cdot x$ для деякого $a \in G$. Діючи на обидві частини цієї рівності оберненим елементом a^{-1}, з умов означення дії отримуємо:

$$a^{-1} \cdot y = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}a) \cdot x = e \cdot x = x,$$

  тому $y \sim x$.
- Якщо $x \sim y$ та $y \sim z$, тобто $y = a \cdot x$ і $z = b \cdot y$ для деяких $a, b \in G$, то за умовою 2. означення дії $z = b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x$, тому $x \sim z$.

Орбіти тоді є класами еквівалентності за побудовою цього відношення.

■

Означення 2.4.4. Нехай група G діє на X, а $\sim$ – відношення еквівалентності з попереднього твердження. Тоді фактормножина $X/_{\sim}$, тобто множина усіх попарно різних орбіт дії, називається *множиною орбіт* X за (дією) G і позначається $X/_G$. Якщо X – топологічний простір, то $X/_G$ з фактортопологією зветься *простором орбіт*.

Більш коректним для лівої дії було б позначення ${}_G\backslash X$, але у нас всі дії такі, тому немає сенсу робити розрізнення. У означенні *правої дії* умова 2. замінюється на $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab)$.

Приклад 2.4.5. Нехай $X = \mathbb{R}^n$ (зі стандартною топологією; тут і далі до кінця параграфа n натуральне), а $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – т. зв. *повна лінійна група*, що складається з усіх невироджених $(n \times n)$-матриць з дійсними коефіцієнтами. Операція на цій групі – це матричний добуток, а нейтральний елемент – одинична матриця E. Дія визначається умовою $A \cdot x := Ax$ для матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ і точки $x \in \mathbb{R}^n$, яку ми вважаємо вектором-стовпчиком. Умови означення дії випливають з властивостей матричного добутку. Ця дія є ефективною, але не вільною (перевірте це). Орбіта точки x має вигляд $\{0\}$ для $x = 0$ і $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ для $x \neq 0$ (чому?), зокрема, дія не транзитивна. Тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} = \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot 0, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}$ (для довільної $x_0 \neq 0$), а фактортопологія виявляється топологією зв'язної двокрапки $\big\{\varnothing, \mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}, \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}\big\}$, бо $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, а $\{0\}$ – ні.

Приклад 2.4.6. Для того ж $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо *ортогональну групу* $G = \mathrm{O}(n)$. Це підгрупа (див. означення А.14) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, що складається з усіх ортогональних матриць A, тобто таких, що $AA^T = A^T A = E$, де $(\cdot)^T$ – матричне транспонування. Якщо елементи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ відповідають довільним невиродженим операторам на $\mathbb{R}^n$, то ці матриці – ізометріям евклідової метрики, що зберігають початок координат. Дія визначається як у попередньому прикладі. Вона є ефективною, не вільною (чому?) і не транзитивною: орбіта точки $x \in \mathbb{R}^n$ має вигляд $\mathrm{O}(n) \cdot x = S_{|x|}(0)$, тобто є евклідовою сферою з центром у 0 і радіусом $|x|$, якщо допустити також сфери радіуса 0, що складаються лише з центра (перевірте це). При $n = 2$ і 3 ці орбіти можна побачити на рис. 2.9.

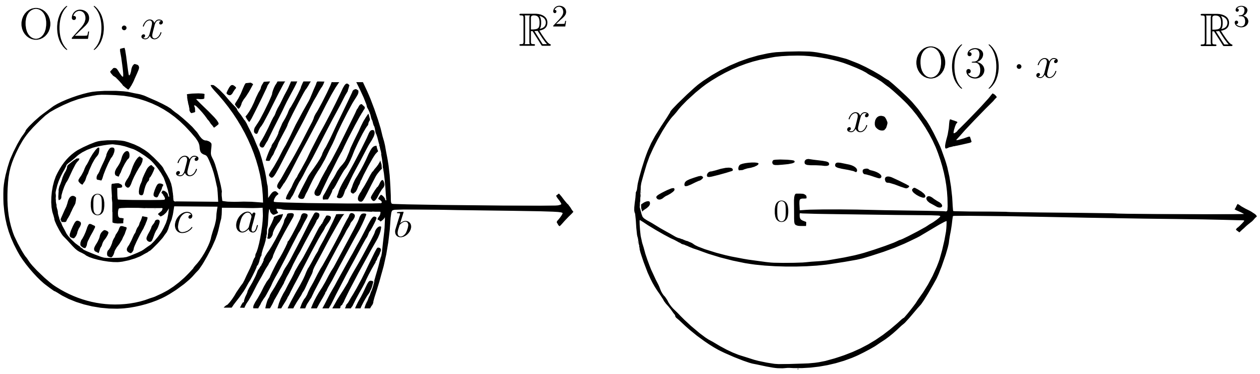


Рис. 2.9: Орбіти дії групи $\mathrm{O}(n)$ на $\mathbb{R}^n$

Зокрема, при $n = 2$ цей приклад пояснює походження поняття "орбіта". Простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)}$ гомеоморфний променю $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ (з індукованої топологією). Дійсно, розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)\colon x \mapsto |x|$. Воно переводить кожну орбіту в одну точку, тобто факторизується у біекцію $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)} \to [0, +\infty)$. Зауважимо, що у якості бази фактортопології можна обрати множини сфер, радіуси яких містяться у інтервалах (a, b) або напівінтервалах $[0, c)$ (чому?). Прообрази цих множин в $\mathbb{R}^n$ – це відкриті сферичні кільця $B_b(0) \setminus D_a(0)$ і кулі $B_c(0)$ відповідно, що зображені зліва на рис. 2.9 для випадку $n = 2$. Оскільки факторизоване f переводить такі множини у проміжки (a, b) і $[0, c)$ відповідно, що утворюють базу $[0, +\infty)$, воно є гомеоморфізмом в силу твердження 1.10.13.

Приклад 2.4.7. Тепер для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо $G = \mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів (див. приклад A.13) та дією паралельними перенесеннями: $a \cdot x \coloneqq x + a$. Очевидно, це дія, вона вільна (зокрема ефективна), бо $x + a \neq x$ при $a \neq 0$, і транзитивна, бо $y = x + (y - x)$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$. Отже, простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^n}$ є одноточковим.

Приклад 2.4.8. Знову для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо підгрупу $G = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (що теж описана у прикладі A.13) з тією ж дією, що у попередньому прикладі. Вона так само вільна, але вже не транзитивна, бо орбіта довільного елемента має вигляд т. зв. *решітки* (або *ґратки*) $\mathbb{Z}^n \cdot (x^1, \ldots, x^n) = \{(x^1 + a^1, \ldots, x^n + a^n) \mid a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{Z}\}$. Випадки $n = 1$ і 2 зображено на рис. 2.10 і рис. 2.11 відповідно. Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = T^n$ у n-вимірний тор умовою $f(x^1, \ldots, x^n) = \left(e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n}\right)$. В силу періодичності тригонометричних функцій, воно переводить усі точки деякої орбіти в одну точку тора (й різні орбіти – в різні точки), тому факторизується у бієкцію $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \to T^n$. Можна сказати, що f "намотує" простір на тор, зокрема, пряму на коло при $n = 1$.

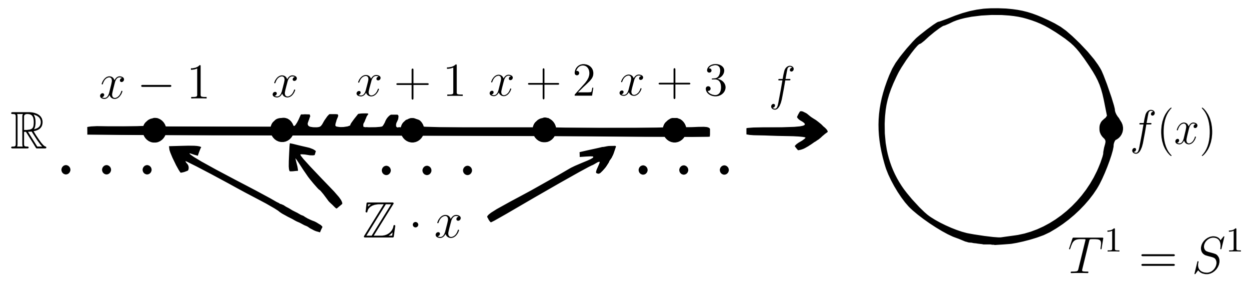


Рис. 2.10: Дія групи $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$ та побудова простору орбіт

Вправа 2.4.9. Перевірити, що побудоване факторвідображення є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong T^n$.

Також, як показано на рис. 2.11 для $n = 2$, можна спочатку встановити гомеоморфізм $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong [0,1]^n/_\sim$, де $[0,1]^n \coloneqq \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n}$ – n-вимірний куб, а відношення еквівалентності $\sim$ на ньому визначається таким чином: $(x^1, \ldots, x^n) \sim (y^1, \ldots, y^n)$, якщо для кожного $i = \overline{1,n}$ або $x^i = y^i$, або множина $\{x^i, y^i\} = \{0, 1\}$. Іншими словами, це куб зі склеєними протилежними гранями, що узагальнює приклади 2.2.12 при $n = 1$ і 2.2.10 при $n = 2$. Гомеоморфізм будується як відображення, що переводить орбіту елемента $(x^1, \ldots, x^n)$ у клас еквівалентності точки куба $(\{x^1\}, \ldots, \{x^n\})$, де $\{\cdot\}$ означає дробову частину числа. У свою чергу, $[0,1]^n/_\sim \cong T^n$ аналогічно до згаданих прикладів. Виконайте всі необхідні перевірки самостійно.

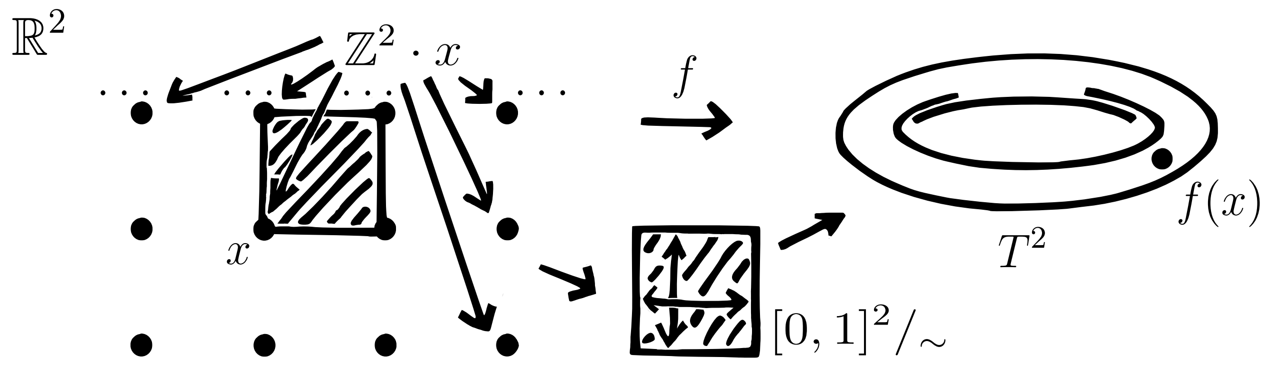


Рис. 2.11: Дія групи $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{R}^2$ та побудова простору орбіт

Приклад 2.4.10. Нехай $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ з топологією, що індукована стандартною, а $G = \mathbb{R}_* \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ з операцією множення – мультиплікативна група поля дійсних чисел з прикладу А.4, що діє на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гомотетіями: $\lambda \cdot x \coloneqq \lambda x$. Ця дія, очевидно, вільна, але не транзитивна: орбітою точки $x \neq 0$ є пряма, що проходить через початок координат та x (але без самого початку координат 0):

$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \coloneqq \mathbb{R}_* \cdot (x^1, \ldots, x^{n+1}) = \big\{ (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^{n+1}) \;\big|\; \lambda \neq 0 \big\},$$

де для позначення орбіти ми традиційно використовуємо *однорідні координати*. Відповідний простір орбіт $\mathbb{R}P^n \coloneqq \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) /_{\mathbb{R}_*}$ зветься *n-вимірним дійсним проєктивним простором.*

Зауважимо, що кожна пряма, що відповідає точці $\mathbb{R}P^n$, перетинає стандартну n-вимірну сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ у двох діаметрально протилежних точках, як показано на рис. 2.12 зліва. Це дозволяє встановити гомеоморфність $\mathbb{R}P^n$ і факторпростору, що утворюється з S^n ототожненням пар діаметрально протилежних точок і який також можна описати як простір орбіт $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$. Тут групу $\mathbb{Z}_2$ з прикладу А.5 зручно представляти у вигляді $\{1, -1\}$ з операцією множення (бо $[0] \mapsto 1$, $[1] \mapsto -1$ задає ізоморфізм $\mathbb{Z}_2$ на $\{1, -1\}$ у сенсі означення А.10; перевірте це) і брати дію таку ж, як для $\mathbb{R}_*$, тобто нетривіальний елемент -1 просто змінює всі точки на діаметрально протилежні: $(-1) \cdot x = -x$. Відповідний гомеоморфізм має вигляд

$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mapsto \pm \left(\frac{x^1}{|x|}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{|x|} \right),$$

де вираз справа позначає пару діаметрально протилежних точок S^n.

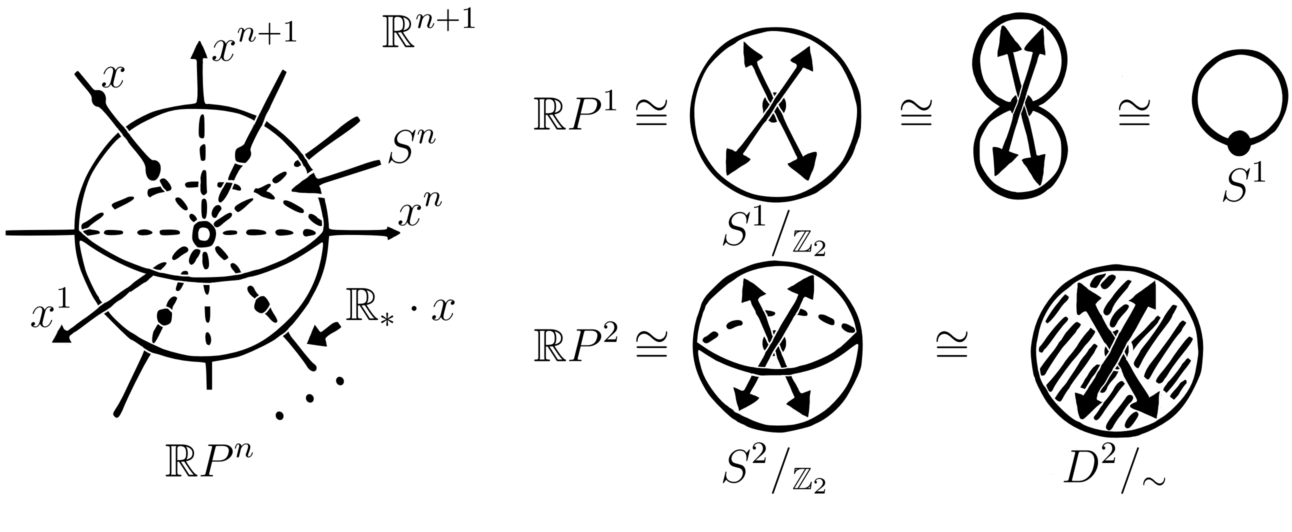


Рис. 2.12: Різні описи n-вимірного дійсного проєктивного простору

Вправа 2.4.11. Показати, що це відображення дійсно є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$.

Далі будемо за потреби ототожнювати ці два простори. Зауважимо, що $\mathbb{R}P^n$ також можна представити у вигляді об'єднання

$$\mathbb{R}P^n = \left\{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \;\middle|\; x^{n+1} \neq 0\right\} \sqcup \left\{(x^1 : \ldots : x^n : 0)\right\}.$$

До цих множин входять прямі, що відповідно не лежать і лежать у гіперплощині $x^{n+1} = 0$. Це відповідає розбиттю сфери S^n на пару відкритих напівсфер і екватор, що є $(n-1)$-вимірною сферою. Перша з цих підмножин $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфна відкритій одиничній кулі B^n. Відповідний гомеоморфізм можна побудувати як факторизацію наступного відображення з $S^n \backslash \{x^{n+1} = 0\}$ у B^n:

$$(x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \left[\begin{array}{ll} (x^1, \ldots, x^n), & x^{n+1} > 0; \\ (-x^1, \ldots, -x^n), & x^{n+1} < 0. \end{array}\right.$$

Тобто точки верхньої напівсфери ортогонально проєктуються на відкриту одиничну кулю у гіперплощині $x^{n+1} = 0$, а точки нижньої – переводяться у діаметрально протилежні до них точки верхньої, а потім теж проєктуються. Якщо при цьому залишити на місці пари точок екватора, що ототожнюються, ми отримаємо біекцію між факторпросторами $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ і $D^n/_\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ на замкненій одиничній кулі $D^n = B^n \sqcup S^{n-1}$ ототожнює діаметрально протилежні точки її межі S^{n-1}, при цьому точки її внутрішності B^n еквівалентні лише собі.

Вправа 2.4.12. Показати, що побудована таким чином біекція є гомеоморфізмом, тобто $S^n/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^n/_\sim$.

Таким чином, існують три різних описи $\mathbb{R}P^n$ як факторпростору. Зокрема, при $n = 1$ (для *проєктивної прямої* $\mathbb{R}P^1$) маємо $D^1 = [-1, 1]$, і при склеюванні кінців цього відрізку отримуємо коло, як у прикладі 2.2.12: $\mathbb{R}P^1 \cong D^1/_\sim \cong S^1$. Ототожнюючи діаметрально протилежні точки кола, тобто знаходячи $S^1/_{\mathbb{Z}_2}$, також отримаємо S^1, як зображено на рис. 2.12 справа зверху. При $n = 2$ *проєктивна площина* $\mathbb{R}P^2 \cong S^2/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^2/_\sim$ (див. рис. 2.12 справа знизу) не вкладається в $\mathbb{R}^3$, як і пляшка Клейна з прикладу 2.2.11 (але теж вкладається в $\mathbb{R}^4$). Детальніше про будову цього простору див., наприклад, у [18, с. 313-321, 340-341]. Там же можна знайти пояснення використання терміну "проєктивний".

Вправа 2.4.13. Введемо на $X = [0, 1] \times [0, 1]$ з прикладів 2.2.8–2.2.11 відношення еквівалентності наступними умовами: $(0, s) \sim (1, 1 - s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Показати, що $X/_\sim \cong \mathbb{R}P^2$.

Вправа 2.4.14. Описати за аналогією з $\mathbb{R}P^n$ *n-вимірний комплексний проективний простір* $\mathbb{C}P^n := \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/_{\mathbb{C}_*}$. Тут $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \backslash \{0\}$ з операцією множення – мультиплікативна група поля комплексних чисел (див. приклад А.4). Показати, що $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (підказка: використати стереографічну проєкцію, що описана у прикладі 1.10.10).

Подальші приклади дій груп та відповідних просторів орбіт будуть наведені у параграфах 3.7 (приклади 3.7.17 і 3.7.18) та 3.9 (приклад 3.9.9).

2.5 Аксіоми відокремлюваності

У цьому параграфі ми ознайомимося з цілою сім'єю корисних топологічних інваріантів, що пов'язані з відокремлюванням точок і множин топологічних просторів.

Означення 2.5.1. Говорять, що топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_0 (*Колмогорова*), або є T_0*-простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$ або існує відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \not\ni x$.

Приклад 2.5.2. Простір з більш ніж одної точки з тривіальною (антидискретною) топологією очевидним чином не задовольняє T_0.

Вправа 2.5.3. Навести приклад нетривіальної топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$ що не задовольняє T_0.

Означення 2.5.4. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_1 (*Тихонова*, *Фреше*), або є T_1*-простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$.

Переставлючи x та y місцями, отримуємо, що аналогічний окіл існує й для точки y. Тому ця аксіома сильніша: з T_1 випливає T_0, але, взагалі кажучи, не навпаки, що демонструють наступні приклади.

Приклад 2.5.5. Топологія зв'язної двокрапки на двоелементній множині $\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$ задовольняє T_0, але не T_1: у точки y немає відкритого околу, що не містив би x, а для точки x околом, що не містить y, є $\{x\}$.

Приклад 2.5.6. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів є T_0-, але не T_1-простором: якщо $x < y$, то відкритий окіл $(a, +\infty) \ni y$ для $x < a < y$ не містить x, але будь-який відкритий окіл x містить y.

Твердження 2.5.7. *Простір X задовольняє T_1 тоді й тільки тоді, коли одноточкова множина $\{x\}$ є замкненою для кожної $x \in X$.*

Доведення. Дійсно, замкненість $\{x\}$ еквівалентна відкритості доповнення $X \setminus \{x\}$, тобто тому, що для будь-якої $y \neq x$ існує її відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \subset X \setminus \{x\}$. Але це і є умова аксіоми T_1.

■

Наслідок 2.5.8. *Простір задовольняє T_1 тоді й тільки тоді, коли усі його скінченні підмножини замкнені. Зокрема, кофінітна топологія – найслабша на даній множині з тих, що задовольняють T_1.*

Доведення. Це випливає з попереднього твердження та замкненості скінченних об'єднань замкнених множин. Таким чином, замкнені множини кофінітної топології на X – скінченні та X – містяться в сукупності замкнених множин будь-якої іншої T_1-топології $\mathcal{T}$, а тому кофінітна топологія дійсно є слабшою за $\mathcal{T}$.

■

Означення 2.5.9. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_2 (*Хаусдорфа*), або є *хаусдорфовим простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$.

Очевидно, з T_2 випливає T_1. Але знову, взагалі кажучи, не навпаки:

Приклад 2.5.10. Кофінітна топологія на нескінченній множині задовольняє T_1 в силу наслідку 2.5.8, але не T_2, оскільки будь-які дві непорожні відкриті множини перетинаються.

Приклад 2.5.11. Розглянемо дійсну пряму з "подвоєним нулем":

$$X \coloneqq (-\infty, 0) \cup \{0_1, 0_2\} \cup (0, +\infty).$$

Топологія тут складається з

- відкритих підмножин $\mathbb{R}$ (зі стандартною топологією), що не містять 0;
- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на 0_1;
- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на 0_2.

Перевірте, що це дійсно топологія і що вона задовольняє T_1. Вона не задовольняє T_2, бо будь-які відкриті околи точок 0_1 і 0_2 перетинаються.

Твердження 2.5.12. *Будь-яка послідовність у хаусдорфовому топологічному просторі має не більше одної границі.*

Доведення. Припустимо, що у хаусдорфовому просторі X існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що має принаймні дві різних границі: $x_n \to x$ і $x_n \to y$, де $x \neq y$. Тоді у цих точок існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються. Але за означенням границі тоді існують такі натуральні N і M, що $x_n \in U$ для $n \geqslant N$ та $x_n \in V$ для $n \geqslant M$, а отже $x_n \in U \cap V$ для будь-якого $n \geqslant \max\{N, M\}$, протиріччя.

■

В умові попереднього твердження аксіоми T_1 було б недостатньо, як демонструють простори з двох попередніх прикладів. Дійсно, якщо X – нескінченна множина з кофінітною топологією, то будь-який відкритий окіл будь-якої точки $x \in X$ містить всі елементи будь-якої нескінченної (тобто з нескінченною кількістю попарно різних елементів) послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ крім, можливо, скінченного числа, і тому $x_n \to x$. У просторі ж з прикладу 2.5.11 точки 0_1 і 0_2 є границями послідовності $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 2.5.13. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_3, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якої замкненої множини $A \subset X$ такої, що $x \notin A$, існують відкриті $U \ni x$ і $V \supset A$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$. Простір X зветься *регулярним*, якщо він задовольняє T_1 і T_3.

Відкриту множину $V \supset A$ часто звуть *відкритим околом* A. З аксіоми T_3 не випливає жодна з попередніх, як демонструє тривіальна топологія. Дійсно, вона задовольняє T_3, бо з існування $x \notin A$ для замкненої A випливає $A = \varnothing$, тому умова виконується для $U = X$ і $V = \varnothing$. В умовах вправи 2.5.3 також можна знайти приклад, який буде задовольняти T_3, але не T_0, а отже не T_1 і не T_2 (зробіть це). Саме тому в означенні регулярності виконання T_1 вимагається окремо. Якщо для точок $x \neq y$ регулярного простору покласти $A = \{y\}$ (що є замкненою згідно з твердженням 2.5.7) в умові аксіоми T_3, то отримаємо T_2. Тому регулярні простори хаусдорфові. Обернене, взагалі кажучи, невірне, бо з T_2 не випливає T_3:

Приклад 2.5.14. Визначимо топологію на $\mathbb{R}$ базою з усіх множин U і $U \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, де U відкрита відносно стандартної топології (перевірте виконання умов критерію бази). Вона задовольняє T_2, тому що сильніша за стандартну, і не задовольняє T_3, бо множина $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ відносно неї замкнена, але будь-який відкритий окіл цієї множини перетинає будь-який відкритий окіл точки 0 (чому?).

Твердження 2.5.15. *Простір X задовольняє T_3 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x \in X$ і відкритої $U \ni x$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset U$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай x міститься у відкритій U. Тоді $X \setminus U$ замкнена і не містить x. Згідно з аксіомою T_3, існують відкриті $V \ni x$ і $W \supset X \setminus U$ такі, що $V \bigcap W = \varnothing$. Але тоді $V \subset X \setminus W$, і з монотонності замикання маємо

$$\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U,$$

де рівність випливає з того, що $X \setminus W$ замкнена, а наступне за нею включення – з $X \setminus U \subset W$.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер маємо x, що не міститься у замкненій A. Звідси $X \setminus A$ відкрита та містить x. За умовою, існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset X \setminus A$, тобто $\overline{V} \bigcap A = \varnothing$. За означенням замикання, тоді для кожної $y \in A$ існує відкрита $W_y \ni y$ така, що $W_y \cap V = \varnothing$. Покладемо $W \coloneqq \bigcup\limits_{y \in A} W_y$. Це відкрита множина як об'єднання відкритих, $A \subset W$ і $W \cap V = \varnothing$ за побудовою. Це й означає виконання T_3.

■

Означення 2.5.16. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_4, якщо для будь-яких замкнених множин, що не перетинаються, $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$, існують їх відкриті околи $U \supset A$ і $V \supset B$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$. Простір X називається *нормальним*, якщо він задовольняє аксіомам T_1 і T_4.

У ситуації аксіоми T_4 говорять, що U і V *відокремлюють* A від B (і аналогічно в попередніх аксіомах, коли одна чи обидві множини є точками). Знову ж, небхідність вимагати T_1 у означенні нормальності обумовлена тим, що з T_4 не випливає жодна з попередніх аксіом. Для T_0–T_2 це демонструють ті ж приклади, що у попередньому зауваженні. Топологія зв'язної двокрапки з прикладу 2.5.5 задовольняє T_4 тривіальним чином, бо двох непорожніх замкнених множин, що не перетинаються, там не існує, але не задовольняє T_3, бо x не відокремлюється від замкненої $\{y\}$. З нормальності виводиться регулярність так само, як з регулярності – хаусдорфовість. Знову-таки, обернена імплікація, взагалі кажучи, невірна, що демонструє наступний приклад:

Приклад 2.5.17. *Площиною Немицького* (або *Мура*) зветься напівплощина $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$, топологія $\mathcal{T}$ на якій визначається базою з усіх відкритих підмножин напівплощини $\{y > 0\}$ (в топології, що індукована стандартною $\mathbb{R}^2$) та всіх множин вигляду $\{(x, 0)\} \cup B_{x,\varepsilon}$, де $x \in \mathbb{R}$, а $B_{x,\varepsilon}$ – відкритий евклідовий круг радіуса $\varepsilon > 0$, що дотикається до прямої $\{y = 0\}$ у точці $(x, 0)$. Умови критерію бази тут неважко перевірити. Зокрема, перетин двох множин вигляду $\{(x, 0)\} \cup B_{x,\varepsilon}$ – це або відкрита підмножина напівплощини $\{y > 0\}$ (коли точки дотику різні), або множина того ж вигляду (коли вони однакові).

Зауважимо, що $\mathcal{T}$ індукує дискретну топологію на прямій $\{y = 0\}$, бо всі одноточкові множини там відкриті. Тому вони (і взагалі усі підмножини цієї прямої) є замкненими як в індукованій топології, так і у $\mathcal{T}$, бо $\{y = 0\}$ є замкненою підмножиною. Зокрема, площина Немицького є T_1-простором в силу твердження 2.5.7 (одноточкові підмножини напівплощини $\{y > 0\}$, звичайно, теж замкнені).

Перевіримо, що $\mathcal{T}$ задовольняє T_3, використавши твердження 2.5.15. Нехай $x \in \mathbb{R}$. Для будь-якої відкритої $U \ni (x, 0)$ за побудовою топології існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\{(x, 0)\} \cup B_{x,\varepsilon} \subset U$. Тоді для будь-якого $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ замикання $\overline{\{(x, 0)\} \cup B_{x,\varepsilon'}} = \{(x, 0)\} \cup D_{x,\varepsilon'} \subset \{(x, 0)\} \cup B_{x,\varepsilon} \subset U$, де $D_{x,\varepsilon}$ – замкнений евклідовий круг радіуса ε, що дотикається до $\{y = 0\}$ у $(x, 0)$ (див. це на рис. 2.13 зліва; чому замикання має саме такий вигляд?). Це й дає потрібну умову. Для точок напівплощини $\{y > 0\}$ перевірка аналогічна з використанням евклідових кругових околів (або можна діяти як у доведенні твердження 2.5.23 нижче).

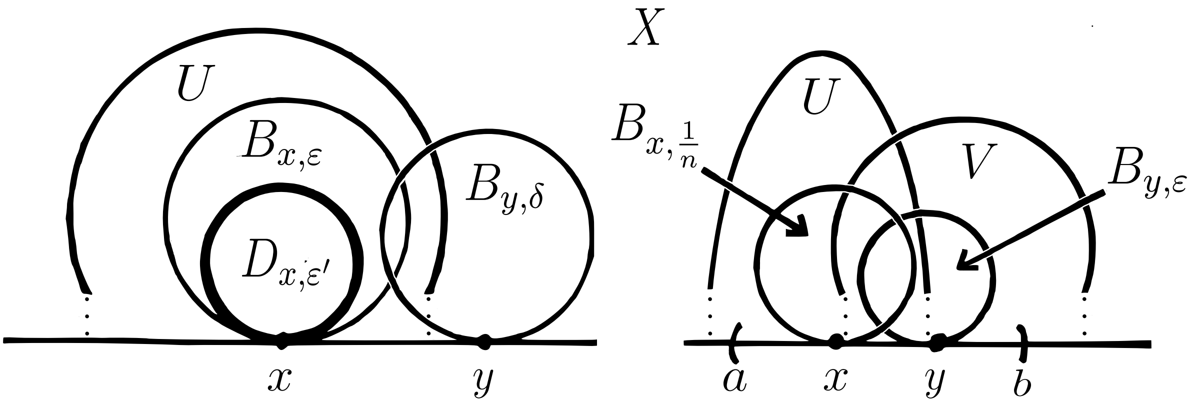


Рис. 2.13: Площина Немицького, доведення її регулярності та відсутності нормальності

Покажемо, що $\mathcal{T}$ не задовольняє T_4. Розглянемо підмножини прямої $\{y = 0\}$: $A \coloneqq \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ і $B \coloneqq \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$. Згідно з зауваженням вище, вони замкнені відносно $\mathcal{T}$. Нехай $U \supset A$ відкрита. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ існує $\varepsilon(x) > 0$ таке, що $\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon(x)} \subset U$. Позначимо $A_n \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \varepsilon(x) > \frac{1}{n}\right\}$ для кожного натурального n. Ці множини, очевидно, вичерпують усі ірраціональні числа: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \sqcup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Вправа 2.5.18. Показати, що пряму $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією не можна представити у вигляді об'єднання зліченної сукупності ніде не щільних множин (підказка: використати лему Коші – Кантора про вкладені відрізки з курсу аналіза, див., наприклад, [4, с. 32-33]).

Представивши $\mathbb{Q}$ у вигляді зліченного об'єднання одноточкових множин, отримуємо з цієї вправи, що A_n не є ніде не щільною для деякого n, тобто $\operatorname{Int} \overline{A_n} \neq \varnothing$ (ще раз наголосимо, що тут йдеться про стандартну топологію прямої, а не про дискретну, яку індукує на ній $\mathcal{T}$). Отже, $\overline{A_n}$ містить деякий інтервал (a,b). Тоді $B_{x,\frac{1}{n}} \subset U$ для кожного $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$ (чому це так?).

Тепер нехай $V \supset B$ відкрита. Виберемо $y \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$. Знову ж, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\{(y,0)\} \cup B_{y,\varepsilon} \subset V$. З геометричних міркувань і щільності множини ірраціональних чисел тоді випливає існування $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$ такого, що $B_{x,\frac{1}{n}}$ перетинається з $B_{y,\varepsilon}$, як показано на рис. 2.13 справа. А тоді $U \cap V \neq \varnothing$. Таким чином, A і B неможливо відокремити.

З деякими іншими властивостями цього простору можна познайомитися у [26, с. 100-103].

Твердження 2.5.19. *Простір X задовольняє T_4 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких замкненої $A \subset X$ і відкритої $U \supset A$ існує відкрита $V \supset A$ така, що $\overline{V} \subset U$.*

Доведення. Аналогічно до твердження 2.5.15 (перевірте це).

■

Отже, маємо наступну строгу "ієрархію" аксіом відокремлюваності:

$$\text{нормальність} \Rightarrow \text{регулярність} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Як (майже) завжди, відкриті околи тут можна всюди замініти на довільні (у т. ч. для множин: V будемо називати *околом* $A \subset X$, якщо існує відкрита U така, що $A \subset U \subset V$) або на елементи деякої бази (перевірте це).

Далі наведемо цілий клас прикладів нормальних просторів, показавши, що усі метричні простори нормальні. Зокрема, з цього випливатиме, що усі наведені у цьому параграфі приклади ненормальних топологічних просторів не є метризовними.

Означення 2.5.20. Нехай (X, ρ) – метричний простір. *Відстанню від точки $x \in X$ до множини $A \subset X$* зветься

$$\rho(x, A) := \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}.$$

Лема 2.5.21. *Для будь-яких точок x та y метричного простору (X, ρ) і будь-якої його підмножини A*

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Доведення. Для будь-якої $z \in A$ за нерівністю трикутника

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Перейшовши до інфімуму за z, отримуємо з цього $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, A)$, тобто $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$. Помінявши місцями x та y, маємо $\rho(y, A) - \rho(x, A) \leqslant \rho(x, y)$. Ці дві нерівності й дають потрібну.

■

Вправа 2.5.22. Показати, що для будь-якої підмножини A метричного простору (X, ρ)

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \rho(x, A) = 0\}.$$

Твердження 2.5.23. *Метричні простори нормальні.*

Доведення. Аксіома T_1 виконується для метричного простору (X, ρ), бо $y \notin B_{\rho(x,y)}(x)$ для будь-яких $x, y \in X$ таких, що $x \neq y$.

Перевіримо тепер виконання T_4. Нехай $A, B \subset X$ замкнені, $A \bigcap B = \varnothing$. Поклавши $f(x) := \rho(x, A) - \rho(x, B)$, визначимо функцію $f \colon X \to \mathbb{R}$. Вона ліпшицева, а отже неперервна: дійсно, з леми 2.5.21 маємо для будь-яких точок $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |\rho(x, A) - \rho(y, A)| + |\rho(x, B) - \rho(y, B)| \leqslant 2\rho(x, y).$$

Покладемо $U := f^{-1}((-\infty, 0))$ і $V := f^{-1}((0, +\infty))$. Ці множини складаються з точок, що ближчі до A, ніж до B, і з точок, що ближчі до B, ніж до A, відповідно. Вони відкриті як прообрази відкритих множин під дією неперервної функції, а $U \bigcap V = \varnothing$. Для будь-якої $x \in A$, очевидно, $\rho(x, A) = 0$. При цьому $\rho(x, B) > 0$, бо в іншому випадку $x \in \overline{B} = B$ згідно з попередньою вправою. Тому $f(x) < 0$. Таким чином, $A \subset U$. Аналогічно, $B \subset V$. Зауважимо, що лише тут використовується $A \bigcap B = \varnothing$, а також замкненість A і B.

■

Наведемо ще кілька важливих загальних властивостей аксіом відокремлюваності.

Твердження 2.5.24. *Аксіоми T_0–T_4, регулярність і нормальність є топологічними інваріантами.*

Доведення. Це випливає з того, що гомеоморфізми є бієкціями, зберігають околи та замкненість множин. Тому умови аксіом просто переносяться з одного з гомеоморфних просторів на інший.

■

Таким чином, аксіоми відокремлюваності можна використовувати для доведення негомеоморфності. Наприклад, стандартна пряма (нормальна в силу твердження 2.5.23, бо це метричний простір), пряма з кофінітною топологією (T_1) і пряма з топологією напівнескінченних інтервалів (T_0) попарно негомеоморфні.

Твердження 2.5.25. *Нехай $X \subset Y$ – підпростір топологічного простору. Якщо Y задовольняє T_i, де i – від 0 до 3, то X теж задовольняє T_i. Якщо Y задовольняє T_4, а X – замкнена підмножина Y, то X теж задовольняє T_4.*

Доведення. Для перевірки цього твердження у випадку аксіом T_0–T_2 застосовуємо до $x, y \in X$, $x \neq y$ відповідну аксіому Y і перетинаємо околи U і V (якщо він є) з X, отримуючи околи цих точок у X.

Перевіримо твердження для T_3: замкнена підмножина $A \subset X$ має вигляд $\widetilde{A} \cap X$, де $\widetilde{A}$ – замкнена в Y (чому?). З $x \notin A$ випливає $x \notin \widetilde{A}$, тому можна застосувати аксіому T_3 до x і $\widetilde{A}$ в Y та знову ж перетнути отримані околи $U \ni x$, $V \supset \widetilde{A}$ з X, побудувавши таким чином околи x і A відповідно, що не перетинаються.

Нарешті, для T_4 множини A і B, що замкнені у замкненому підпросторі X, будуть замкненими й у Y. Застосуємо до них аксіому T_4 для Y і знову перетнемо отримані околи U і V з X.

■

Тобто аксіоми відокремлюваності наслідуються, але T_4 – з додатковою умовою замкненості підпростору. Ця умова є суттєвою. Наприклад, можна побудувати топологію на компактному поповненні $Y = X \cup \{x\}$ площини Немицького X з прикладу 2.5.17 одною додатковою точкою (т. зв. *одноточковій* *компактифікації*, див. [11, с. 92-93] або [19, с. -149-150]), яка є нормальною, а X – її ненормальним підпростором (див. [26, с. 103]).

Вправа 2.5.26. Показати, що прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ хаусдорфовий тоді й тільки тоді, коли X та Y хаусдорфові. Чи узагальнюється це на довільну скінченну кількість множників? Чи вірні аналогічні твердження для інших аксіом відокремлюваності (принаймні в один бік)? Підказка: спробуйте показати, що пряма Зоргенфрея нормальна, а ось її прямий добуток на себе (*площина Зоргенфрея*) є ще одним прикладом (крім площини Немицького) регулярного, але не нормального простору. Див. деталі цього та огляд інших властивостей площини Зоргенфрея у [26, с. 103-105].

Наступне твердження демонструє взаємодію аксіом відокремлюваності та зліченності:

Твердження 2.5.27. *Якщо простір задовольняє T_3 та другій аксіомі зліченності, то він задовольняє T_4. Зокрема, регулярний простір з не більш ніж зліченною базою є нормальним.*

Доведення. Отже, нехай A і B – замкнені підмножини даного простору X, $A \bigcap B = \varnothing$. З твердження 2.5.15, оскільки кожна $x \in A$ належить відкритій $X \setminus B$, існує відкрита $U_x \ni x$ така, що $\overline{U_x} \subset X \setminus B$. Аналогічно, для кожної $y \in B$ існує відкрита $V_y \ni y$ така, що $\overline{V_y} \subset X \setminus A$. Множини A і B з індукованими топологіями теж задовольняють другій аксіомі зліченності. Тому до їхніх відкритих покрить $\{U_x\}_{x \in A}$ і $\{V_y\}_{y \in B}$ можна застосувати теорему Ліндельофа (точніше, ми застосовуємо її до перетинів елементів цих покрить з A і B відповідно). Отримаємо відкриті не більш ніж зліченні підпокриття $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ множин A і B відповідно, причому за побудовою $\overline{U_n} \cap B = \varnothing$ і $\overline{V_n} \cap A = \varnothing$ для будь-якого натурального n.

Для кожного натурального n покладемо

$$\widetilde{U_n} := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}\,, \quad \widetilde{V_n} := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Ці множини відкриті та, за властивістю покрить $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, також утворюють відкриті покриття A і B відповідно. При цьому жодна з множин $\widetilde{U_n}$ не перетинається з жодною з $\widetilde{V_n}$. Тоді $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U_n}$ і $V := \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V_n}$ є відкритими околами A і B відповідно, що не перетинаються.

■

2.6 Теореми про продовження відображень, вкладення та метризацію

Наступний нетривіальний критерій виконання аксіоми T_4 важливий тим, що дозволяє використання дійсних чисел з їхньою багатою структурою для дослідження не тільки метричних, а й ширшого (в силу твердження 2.5.23) класу топологічних просторів, що задовольняють T_4, подібно до того, як аксіоми зліченності дозволяють використання натуральних.

Теорема 2.6.1 (Лема Урисона). *Топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких замкнених $A, B \subset X$ таких, що $A \cap B = \varnothing$, існує неперервна функція $f \in C(X, [0,1])$ така, що $f|_A = 0$ і $f|_B = 1$.*

Означення 2.6.2. Функцію f із формулювання леми Урисона будемо називати *функцією Урисона* множин A і B.

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Перевірка достатності трохи схожа на доведення твердження 2.5.23. Нехай $A, B \subset X$ замкнені та не перетинаються, тоді для них існує функція f з умови. Покладемо $U \coloneqq f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ і $V \coloneqq f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Ці множини відкриті в силу неперервності f, $A \subset U$ і $B \subset V$ за властивостями f та $U \cap V = \varnothing$ за побудовою. Це й демонструє виконання аксіоми T_4.

$\underline{\Rightarrow}$ Доведемо необхідність. Отже, нехай X задовольняє T_4, $A, B \subset X$ замкнені та не перетинаються. Побудуємо відображення Φ з множини раціональних чисел відрізка $[0,1]$ зі степенями двійки у знаменнику

$$\Lambda \coloneqq \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_+,\, m \in \overline{0, 2^n} \right\}$$

у сукупність відкритих околів A, тобто відкритих підмножин $U \supset A$ в X, наступним чином. Покладемо $\Phi(1) \coloneqq X \setminus B$, що належить до цієї сукупності за умовою. Тоді за твердженням 2.5.19 існує відкрита $\Phi(0) \supset A$ така, що $\overline{\Phi(0)} \subset \Phi(1)$. Оскільки $\Phi(1)$ є також відкритим околом замкненої $\overline{\Phi(0)}$, в силу того ж твердження існує відкрита $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \supset \overline{\Phi(0)}$ така, що $\overline{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)} \subset \Phi(1)$. На наступному етапі аналогічним способом знаходимо відкриті $\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \supset \overline{\Phi(0)}$ та $\Phi\left(\frac{3}{4}\right) \supset \overline{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)}$ такі, що $\overline{\Phi\left(\frac{1}{4}\right)} \subset \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\overline{\Phi\left(\frac{3}{4}\right)} \subset \Phi(1)$ і т. д. Зокрема, для цього відображення за побудовою вірні включення $\overline{\Phi(r)} \subset \Phi(s)$ для будь-яких $r < s$ з множини Λ.

Для кожної $x \in X$ покладемо тепер

$$f(x) \coloneqq \inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\}.$$

Тут вважаємо, що $\inf \varnothing = 1$. Тоді f дійсно є функцією з X у $[0,1]$, $f|_A = 0$, бо A міститься в усіх $\Phi(r)$, і $f|_B = 1$, бо жодна з $\Phi(r)$ не перетинає B.

Таким чином, залишилося перевірити неперервність f. В силу вправи 1.8.6, оскільки передбазу (індукованої з $\mathbb{R}$) топології $[0,1]$ складають проміжки вигляду $[0,a)$ і $(a,1]$ для усіх дійсних $a \in (0,1)$ аналогічно до прикладу 1.3.6 (чому?), достатньо показати, що їхні прообрази під дією f відкриті. Зауважимо, що за означенням інфімума точка $x \in X$ належить до $f^{-1}([0,a))$, тобто $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} < a$, тоді й тільки тоді, коли існує $r \in \Lambda$ таке, що $r < a$ та $x \in \Phi(r)$. Іншими словами,

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{r \in \Lambda \cap (-\infty, a)} \Phi(r),$$

що дійсно є відкритою множиною як об'єднання відкритих. Нарешті, щоб перевірити відкритість прообраза $f^{-1}((a,1])$, достатньо показати замкненість його доповнення у X, що є прообразом доповнення до $(a,1]$, тобто $f^{-1}([0,a])$. Нехай $x \in f^{-1}([0,a])$, тобто $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} \leqslant a$. Тоді будь-яке $r \in \Lambda$, що більше за a, більше й за цей інфімум, тобто існує $s \in \Lambda$ таке, що $s < r$ та $x \in \Phi(s)$. Але тоді й $\Phi(r) \supset \overline{\Phi(s)}$ містить x. І навпаки, якщо $x \in \Phi(r)$ для усіх $r \in \Lambda$, що більші за a, то $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} \leqslant a$. Це означає, що

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \Phi(r) \subset \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \overline{\Phi(r)}.$$

Включення тут випливає з монотонності замикань і насправді є рівністю. Дійсно, нехай x належить до перетину замикань з правої частини цього включення, тобто $x \in \overline{\Phi(r)}$ для будь-якого $r \in \Lambda \cap (a, +\infty)$. Для кожного такого r існує деяке $s \in \Lambda \cap (a, r)$, отже $x \in \overline{\Phi(s)} \subset \Phi(r)$ за властивостями відображення Φ. Тому $x \in \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \Phi(r)$, звідки й випливає потрібна рівність множин. Таким чином, остаточно маємо

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \overline{\Phi(r)},$$

і ця множина замкнена як перетин замкнених, що й потрібно.

■

Звичайно, за необхідності можна побудувати й функцію Урисона вигляду $f\colon X \to [a,b]$ для будь-яких $a < b$, беручи композицію функції з леми Урисона та деякої лінійної.

Далі розглянемо кілька цікавих та потужних теорем, що стосуються просторів з аксіомою T_4 (зокрема нормальних) і використовують лему Урисона. Для доведення першої з них нам знадобиться наступне узагальнення відомого з курсу аналіза поняття рівномірної збіжності на послідовності відображень з довільного топологічного простору у довільний метричний.

Означення 2.6.3. Нехай X – топологічний простір, а Y – метричний. Кажуть, що послідовність відображень $\{f_n\colon X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно збігається* до відображення $f\colon X \to Y$, що будемо тоді називати її *границею*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $f_n(x) \in B_\varepsilon(f(x))$ для будь-яких натуральних $n \geqslant N$ та $x \in X$.

Нехай тепер Y – це дійсна пряма $\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою. Будемо казати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *рівномірно збігається* до його *суми* f, якщо послідовність його часткових сум $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до f.

Оскільки у нас тут немає необхідності розрізняти види збіжності, рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ до f позначатимемо просто рівністю $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Поняття рівномірної збіжності ряду очевидним чином узагальнюється на відображення у простір $Y = \mathbb{R}^n$, причому збіжність зберігається при заміні його евклідової метрики на будь-яку іншу метрику ρ_p з прикладу 1.4.3 (чому?).

Формулювання і доведення наступних трьох тверджень майже дослівно повторюють формулювання і доведення відповідних властивостей рівномірної збіжності для окремого випадку дійсних функцій, що вивчаються в курсі аналіза (див., наприклад, главу 8 у [4] або главу 7 у [25]), але ми наведемо їх з доведеннями для повноти викладення. Нагадаємо, що метричний простір (Y, ρ) зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, тобто така, що $\rho(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, збігається. У курсі аналіза доводиться, що пряма $\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою є повним простором (див. [4, с. 68-69]), звідки випливає також повнота усіх її замкнених підмножин з обмеженням цієї метрики (як саме?). Також з цього неважко вивести повноту простору $\mathbb{R}^n$ та замкнених підмножин у ньому відносно евклідової метрики, а отже й усіх метрик, що біліпшицево еквівалентні евклідовій, в силу вправи 1.4.11 (зробіть це). У наступному критерії повнота Y суттєва лише для достатності.

Твердження 2.6.4 (Критерій Коші рівномірної збіжності послідовності)**.** *Послідовність відображень $\{f_n\colon X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ з топологічного простору X у повний метричний простір Y з метрикою ρ рівномірно збігається тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $\rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $n, m \geqslant N$ та $x \in X$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого відображення $f\colon X \to Y$ і $\varepsilon > 0$. Тоді за означенням рівномірної збіжності існує натуральне N таке, що $\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для усіх $n \geqslant N$ та $x \in X$, отже за нерівністю трикутника

$$\rho(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \rho(f_n(x), f(x)) + \rho(f(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

для довільних $n, m \geqslant N$ та $x \in X$, що й потрібно.

$\Leftarrow$ Фіксуючи $x \in X$ в умові, отримаємо, що $\rho(f_n(x), f_m(x)) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тобто послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. В силу повноти Y вона збігається до деякої точки Y. Позначивши для кожної $x \in X$ цю точку через $f(x) \in Y$, отримаємо відображення $f\colon X \to Y$. Нехай тепер $\varepsilon > 0$. Візьмемо N з умови твердження для $\frac{\varepsilon}{2}$, будь-яке $n \geqslant N$ і для $x \in X$ запишемо означення збіжності $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ до $f(x)$: існує натуральне M таке, що $f_m(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ для $m \geqslant M$. Тоді для усіх $m \geqslant \max\{M, N\}$ за нерівністю трикутника маємо

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leqslant \rho(f_n(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f(x)) < \varepsilon,$$

отже за означенням $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до f рівномірно.

■

Твердження 2.6.5 (Ознака Веєрштраса рівномірної збіжності ряду)**.** *Нехай X – топологічний простір, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ – ряди з функцій $X \to \mathbb{R}$ такі, що $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ для усіх натуральних n та $x \in X$. Якщо крім того ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ рівномірно збігається, то й ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ рівномірно збігаються.*

Набір нерівностей з цього твердження, тобто умову $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ для усіх n та x, далі будемо скорочено записувати як $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$. У таких випадках говорять, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *мажорується* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$.

Доведення. В силу означення та попереднього твердження дослідження рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ можна звести до розгляду модуля різниці послідовностей його часткових сум

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_i\right| = |f_{n+1} + \ldots + f_m|$$

для довільних натуральних $n \leqslant m$ (ця нерівність, очевидно, не зменшує загальність), і аналогічно для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$. А саме, оскільки цей другий ряд рівномірно збіжний, для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $|g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x)| < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $m \geqslant n \geqslant N$ та $x \in X$. З умови тоді випливає, що

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x) = |g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x)|,$$

де остання рівність виконується, бо усі g_i невід'ємні за умовою. Таким чином, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ теж рівномірно збіжний за попереднім твердженням. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ перевірка майже дослівно така ж сама (виконайте її).

■

Твердження 2.6.6. *Границя рівномірно збіжної послідовності неперервних відображень та сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервними.*

Доведення. Зрозуміло, що достаньо перевірити це твердження для послідовності, бо твердження для ряду випливатиме тоді з означення. Отже, нехай X та Y – деякі топологічний та метричний простори відповідно, ρ – метрика Y, а послідовність відображень $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X,Y)$ рівномірно збігається до $f\colon X \to Y$. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$ – довільні. За означенням рівномірної збіжності існує натуральне N таке, що $\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ для усіх $n \geqslant N$ та $x \in X$. Оберемо якесь натуральне $n \geqslant N$. Оскільки f_n є неперервним у x_0, існує відкритий окіл $U \ni x_0$ такий, що $f_n(U) \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_n(x_0))$. Тоді для кожної $x \in U$ за нерівністю трикутника маємо

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon,$$

отже $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Це означає, що f теж неперервне у x_0. Таким чином, f дійсно є неперервним.

■

Також нам буде потрібна наступна технічна лема.

Лема 2.6.7. *Нехай топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4, $A \subset X$ замкнена і $a > 0$. Тоді для будь-якої неперервної (відносно індукованих топологій) функції $f \in C(A, [-a, a])$ існує неперервна функція $g \in C\left(X, \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]\right)$ така, що $|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2a}{3}$ для усіх $x \in A$.*

Доведення. Покладемо $B \coloneqq f^{-1}\left(\left[-a, -\frac{a}{3}\right]\right)$ і $C \coloneqq f^{-1}\left(\left[\frac{a}{3}, a\right]\right)$. В силу неперервності f, це замкнені підмножини в A, а отже й у X, бо A замкнена. Оскільки за побудовою вони не перетинаються, за теоремою 2.6.1 та зауваженням після її доведення існує функція Урисона g множин B і C зі значеннями у $\left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$, тобто $g \in C\left(X, \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]\right)$ така, що $g|_B = -\frac{a}{3}$ і $g|_C = \frac{a}{3}$. Таким чином, g приймає значення $-\frac{a}{3}$ у тих точках A, де f приймає значення з проміжку $\left[-a, -\frac{a}{3}\right]$, $\frac{a}{3}$ – у тих, де значення f містяться у $\left[\frac{a}{3}, a\right]$, і значення з $\left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$ там, де значення f лежать у тому ж проміжку. Тому різниця між цими функціями дійсно не перевищує $\frac{2a}{3}$.

■

Теорема 2.6.8 (Тітце про продовження)**.** *Нехай топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4, $A \subset X$ замкнена, а $Y \subset \mathbb{R}$ – проміжок. Тоді для* *будь-якої неперервної (відносно індукованих топологій) функції* $f \in C(A, Y)$ *існує її неперервне продовження на* X *– функція* $\overline{f} \in C(X, Y)$ *така, що* $\overline{f}|_A = f$.

Доведення. Спочатку доведемо теорему для випадку $Y = [-1, 1]$. Застосуємо попередню лему до функції f і отримаємо функцію $f_1 \in C\left(X, \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right)$ таку, що $|f - f_1| \leqslant \frac{2}{3}$ на A, тобто їх різниця $f - f_1$ належить до $C\left(A, \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$. Тепер застосуємо цю лему до функції $f - f_1$ та отримаємо $f_2 \in C\left(X, \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]\right)$ таку, що $|f - f_1 - f_2| \leqslant \frac{4}{9}$, отже $f - f_1 - f_2 \in C\left(A, \left[-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right]\right)$ і т. д. Таким чином, отримаємо послідовність фунцій $\left\{f_n \in C\left(X, \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\left|f - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right| \leqslant \frac{2^n}{3^n}$ у точках A для будь-якого n. При цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збігається до деякої $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$ за твердженням 2.6.5, де другий (мажоруючий) ряд – числовий $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Ми вважаємо його таким, що складається з постійних функцій, тому його рівномірна збіжність за означенням еквівалентна звичайній збіжності, що продемонстрована вище. Функція $\overline{f}$ неперервна за твердженням 2.6.6. Вона відображає X у $[-1, 1]$, бо з показаного вище випливає (як саме?), що усі елементи послідовності часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ є функціями у $[-1, 1]$, а цей відрізок замкнений. Таким чином, дійсно $\overline{f} \in C(X, [-1, 1])$. Для кожної $x \in A$, спрямувавши n до нескінченності у нерівності $\left|f(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\right| \leqslant \frac{2^n}{3^n}$, отримаємо, що $f(x) = \overline{f}(x)$, що й означає потрібну рівність $\overline{f}|_A = f$.

Якщо твердження теореми вірне для функцій у проміжок $Y \subset \mathbb{R}$, а проміжок $Z \subset \mathbb{R}$ гомеоморфний Y, то теорема справедлива й для функцій у Z. Дійсно, нехай $\varphi\colon Y \to Z$ – гомеоморфізм. Для будь-якої $f \in C(A, Z)$ застосуємо теорему до $\varphi^{-1} \circ f \in C(A, Y)$ та отримаємо продовження $\overline{\varphi^{-1} \circ f} \in C(X, Y)$. Тоді $\overline{f} \coloneqq \varphi \circ \overline{\varphi^{-1} \circ f} \in C(X, Z)$ – продовження f (чому?). Це спостереження залишається вірним і для довільних топологічних просторів Y та Z. Звідси та з прикладу 1.10.6 випливає, що крім уже доведеного випадку $Y = [-1, 1]$ достатньо ще показати справедливість теореми для $Y = (-1, 1)$ та $Y = (-1, 1]$.

Розглядаючи довільну $f \in C(A, (-1, 1))$ як елемент $C(A, [-1, 1])$, застосуємо до неї відомий нам випадок теореми й отримаємо продовження $\overline{f} \in C(X, [-1, 1])$. Оскільки $B \coloneqq \overline{f}^{-1}(\{-1, 1\})$ замкнена за неперервністю $\overline{f}$ і $A \cap B = \varnothing$, бо $\overline{f}|_A = f$ і $f(A) \subset (-1, 1)$, за лемою Урисона існує функція Урисона

$g \in C(X, [-1, 1])$ множин B і A. Тоді добуток $g\overline{f} \in C(A, (-1, 1))$, бо $g = 0$ там, де $\overline{f} = \pm 1$, і $(g\overline{f})|_A = \overline{f}|_A = f$, тобто $g\overline{f}$ є потрібним продовженням f. Випадок $Y = (-1, 1]$ можна довести майже дослівно так само (зробіть це).

■

Теорема Тітце про продовження вірна також для випадку $Y = \mathbb{R}^n$. Дійсно, щоб перевірити це, достатньо застосувати вже доведену теорему до координатних функцій відображення $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ (див. вправу 1.8.15).

Вправа 2.6.9. Показати, що якщо для топологічного простору X виконується твердження теореми Тітце про продовження, то виконується й твердження леми Урисона. Разом з двома попередніми теоремами це означає, що обидва ці твердження є еквівалентними до аксіоми T_4.

Теорема 2.6.10 (Урисона про вкладення)**.** *Якщо топологічний простір X нормальний та задовольняє другій аксіомі зліченності, то існує його вкладення у метричний простір ℓ_2.*

Доведення. Нагадаємо, що ℓ_2 був описаний у вправі 1.4.5 як

$$\ell_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база топології X. Тоді множина усіх пар підмножин з $\mathcal{B}$, а також її підмножина $\{(U, V) \mid U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subset V\}$ не більш ніж зліченні. Перенумеруємо цю останню множину, записавши її як $\{(U_n, V_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки тоді для кожного натурального n замкнені множини $\overline{U_n}$ і $X \setminus V_n$ не перетинаються, а X нормальний, за лемою Урисона існує функція Урисона $f_n \in C(X, [-1, 1])$ цих множин. Покладемо $f(x) := \left\{\frac{f_n(x)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ для кожної $x \in X$. Це елемент ℓ_2, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)^2}{n^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, як відомо з курсу аналіза. Отже, ми дійсно побудували відображення $f\colon X \to \ell_2$.

Перевіримо ін'єктивність f. Нехай $x, y \in X$ і $x \neq y$. Оскільки X нормальний, він задовольняє аксіомі T_1: існує відкрита $W \ni x$ така, що $y \notin W$. Тоді існує й множина V з бази $\mathcal{B}$, для якої $x \in V \subset W$. Нормальний X є також регулярним, тому за твердженням 2.5.15 існує відкрита $T \ni x$ така, що $\overline{T} \subset V$, а отже існує й $U \in \mathcal{B}$, для якої $x \in U \subset T$, тому $\overline{U} \subset \overline{T} \subset V$. Таким чином, $(U, V) = (U_n, V_n)$ для деякого n. Тоді за властивостями функції Урисона $f_n(x) = 0$, бо $x \in U \subset \overline{U_n}$, і $f_n(y) = 1$, бо $y \in X \setminus W \subset X \setminus V_n$. Це означає, що $f(x) \neq f(y)$, що й демонструє ін'єктивність f та бієктивність обмеження $f\colon X \to f(X)$.

Тепер перевіримо неперервність f у довільній точці $x_0 \in X$. Зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ за означенням випливає, що його залишкові суми прямують до нуля, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне N, для якого $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Для кожного натурального n від 1 до N в силу неперервності f_n у x_0 існує відкрита $W_n \ni x_0$ така, що $\frac{(f_n(x)-f_n(x_0))^2}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2N}$ для будь-якої $x \in W_n$. Тоді $W \coloneqq \bigcap\limits_{n=1}^{N} W_n$ буде відкритим околом x_0, для кожної точки x якого маємо

$$\rho(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{n^2}} < \varepsilon$$

за побудовою W, вибором N та нерівністю $|f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant 1$. Це означає, що $f(W) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Таким чином, f дійсно неперервне у кожній точці, а отже неперервне. Тоді неперервним буде і його обмеження на образ $f\colon X \to f(X)$.

Щоб показати, що ін'єктивне неперервне f є вкладенням, тобто що $f\colon X \to f(X)$ – гомеоморфізм, залишилося довести його відкритість. Нагадаємо, що тут на $f(X)$ розглядається індукована топологія. Нехай підмножина $W \subset X$ відкрита й $x_0 \in W$ – її довільна точка. Діючи аналогічно до доведення ін'єктивності, знаходимо (як саме?) таке натуральне n, що $x_0 \in U_n$ та $V_n \subset W$. Тоді $B_{\frac{1}{n}}(f(x_0)) \cap f(X) \subset f(W)$. Дійсно, будь-яка точка цього перетину має вигляд $f(x)$, де $x \in X$ така, що $\rho(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{n}$. З побудови f та вигляду метрики тоді випливає, що $|f_n(x) - f_n(x_0)| < 1$. При цьому $f_n(x_0) = 0$, бо $x_0 \in \overline{U_n}$, отже $f_n(x) \neq 1$, тобто $x \in V_n \subset W$, звідки випливає потрібне включення. Таким чином, кожна точка $f(x_0) \in f(W)$ входить до цієї множини разом з відкритим у індукованій топології околом, тому $f(W)$ відкрита. Це демонструє відкритість $f\colon X \to f(X)$ та завершує доведення.

■

За побудовою у доведенні попередньої теореми образ вкладення $f(X)$ лежить у підмножині $\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$ простору ℓ_2, яку називають *кубом* (або *цеглиною*) *Гільберта*.

Теорема 2.6.11 (Теорема Урисона про метризацію)**.** *Топологічний простір, що задовольняє другій аксіомі зліченності, є метризовним тоді й тільки тоді, коли він нормальний.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Необхідність безпосередньо випливає з твердження 2.5.23 (причому незалежно від аксіом зліченності).

$\underline{\Leftarrow}$ Щоб довести достатність, застосуємо попередню теорему: будь-який простір X, що задовольняє умові, гомеоморфний своєму образу $f(X) \subset \ell_2$ під дією побудованого там вкладення f. На $f(X)$ можна ввести метрику, що узгоджена з його (індукованою) топологією, просто обмеживши її з ℓ_2, в силу вправи 1.6.10. Тоді на X побудуємо метрику перенесенням з $f(X)$ за допомогою f (як саме?) або просто скористаємося тим, що метризовність є топологічним інваріантом.

■

У формулюваннях теорем Урисона про вкладення і метризацію часто замість нормальності використовують регулярність. Дійсно, у просторах, що задовольняють другій аксіомі зліченності, це еквівалентні властивості в силу твердження 2.5.27.

2.7 Компактність. Локальна компактність

Компактність у деякому сенсі узагальнює скінченність множини і є одним з найважливіших топологічних інваріантів.

Означення 2.7.1. Топологічний простір зветься *компактним*, якщо у будь-якого його відкритого покриття існує скінченне підпокриття. Підмножина топологічного простору зветься *компактною*, або *компактом*, якщо вона є компактним простором в індукованій топології.

Це означення нагадує посилене твердження теореми Ліндельофа. Зауважимо, що інколи (наприклад, у [11]) термін ”компакт” використовується для хаусдорфових компактних просторів, але у нас це просто синонім компактної підмножини. Також у деяких більш старих джерелах ”наша” компактність зветься бікомпактністю.

Твердження 2.7.2. *Підмножина топологічного простору є компактною тоді й тільки тоді, коли у будь-якого її відкритого покриття існує скінченне підпокриття.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень: за побудовою індукованої топології, будь-яке відкрите покриття підмножини $K \subset X$ як топологічного простору має вигляд $\{K \cap U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, де $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – її відкрите покриття як підмножини, і аналогічно для скінченних підпокриттів $\{K \cap U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ і $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ відповідно.

■

Вправа 2.7.3. Нехай Y – підпростір топологічного простору X. Показати, що підмножина $K \subset Y \subset X$ є компактною в Y тоді й тільки тоді, коли вона компактна в X.

Приклад 2.7.4. Усі скінченні підмножини будь-якого топологічного простору (зокрема, всі скінченні простори) компактні. Дійсно, якщо $K = \{x_i\}_{i=1}^n$ і $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – її відкрите покриття, то для кожного $i = \overline{1,n}$ існує $\alpha_i \in A$ такий, що $x_i \in U_{\alpha_i}$, а тоді $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ й буде потрібним підпокриттям.

Приклад 2.7.5. У просторі з антидискретною топологією всі підмножини, очевидно, компактні.

Вправа 2.7.6. Показати, що у просторі з кофінітною топологією всі підмножини компактні.

Приклад 2.7.7. У просторі з дискретною топологією $\big\{\{x\}\big\}_{x\in K}$ є відкритим покриттям підмножини K, у якого не існує *нетривіального* (тобто меншого) підпокриття. Тому (і в силу прикладу 2.7.4) K компактна тоді й тільки тоді, коли вона скінченна.

Приклад 2.7.8. Відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактний у стандартній топології. Це твердження леми Гейне – Бореля (або Бореля – Лебега), що відома з курсу аналіза. Для повноти викладення наведемо тут доведення цього факту. Зауважимо, що у ньому використовується лема Коші – Кантора про вкладені відрізки, яку, в свою чергу, можна вивести з повноти метричного простору $\mathbb{R}$. Див., наприклад, її доведення у [4, с. 32-33], де з повноти випливає існування супремума (як саме?).

Твердження 2.7.9 (Лема Гейне – Бореля)**.** *Будь-який відрізок* $[a, b]$ *у дійсній прямій зі стандартною топологією є компактним.*

Доведення. Припустимо, що у $I_1 := [a, b]$ існує вікрите покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, що не має скінченного підпокриття. Тоді воно не матиме скінченного підпокриття і як покриття принаймні одного з відрізків $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ та $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, який позначимо через I_2. Аналогічним чином розділивши I_2 навпіл, отримаємо відрізок I_3 з тією ж властивістю. Ітеруючи, отримаємо незростаючу послідовність $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$ відрізків, довжини яких прямують до нуля. За лемою Коші – Кантора тоді у них існує спільна точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $c \in U_\alpha$. Оберемо $\varepsilon > 0$ таке, що $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$, і n таке, що довжина відрізку I_n менша за ε. Тоді, оскільки $c \in I_n$, $I_n \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$, тобто $\{U_\alpha\}$ – скінченне підпокриття відрізка I_n, протиріччя.

■

Вправа 2.7.10. Довести *теорему Кантора*, що в деякому сенсі узагальнює лему Коші – Кантора: будь-яка незростаюча послідовність $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$ замкнених компактних непорожніх підмножин топологічного простору має непорожній перетин: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Приклад 2.7.11. Сама пряма $\mathbb{R}$ не є компактним простором, бо, наприклад, її відкрите покриття $\big\{(n-1, n+1)\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не має нетривіального підпокриття. Всі інтервали та напівінтервали в $\mathbb{R}$ також некомпактні: так, для інтервала (a, b) це демонструє покриття $\left\{\left(a, b-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$, що не має скінченного підпокриття (перевірте це для інших типів інтервалів та напівінтервалів).

Твердження 2.7.12. *Нехай $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X компактний. Тоді $f(X) \subset Y$ компактна.*

Доведення. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – якесь відкрите покриття множини $f(X)$ у просторі Y. Прообрази його елементів в силу неперервності f утворюють відкрите покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ компактного простору X, а отже існує його скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}_{i=1}^n$. Тоді $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ – скінченне підпокриття для $f(X)$.

■

Наслідок 2.7.13. *Компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Дійсно, якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм, то $Y = f(X)$ та $X = f^{-1}(Y)$, де f і f^{-1} неперервні. Тому X і Y одночасно або компактні, або некомпактні.

■

Отже, компактність можна використовувати для доведення негомеоморфності. Так, в силу встановленого вище у прикладах 2.7.8 і 2.7.11, жоден відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не може бути гомеоморфним жодному інтервалу або напівінтервалу.

Наслідок 2.7.14. *Факторпростір компактного простору (за деяким відношенням еквівалентності) є компактним.*

Доведення. Дійсно, $X/_\sim = p(X)$, де канонічна проєкція p є неперервним відображенням.

■

Приклад 2.7.15. Коло $S^1 \cong [0, 1]/_\sim$ (див. приклад 2.2.12) компактне в силу попередніх двох наслідків, бо відрізок $[0, 1]$ компактний згідно з твердженням 2.7.9.

Теорема 2.7.16 (Компактність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ компактний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y компактні.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай $X \times Y$ компактний. Згадаємо, що канонічні проєкції неперервні: $p_X \in C(X \times Y, X)$ і $p_Y \in C(X \times Y, Y)$ згідно з пунктом $\underline{1.}$ твердження 2.1.5. Отже, $X = p_X(X \times Y)$ і $Y = p_Y(X \times Y)$ компактні в силу твердження 2.7.12.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай X та Y – компактні простори, а $\mathcal{U}$ – відкрите покриття $X \times Y$. За побудовою топології прямого добутку, кожна множина системи $\mathcal{U}$ має вигляд $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \times V_\gamma$, де U_γ і V_γ відкриті в X і Y відповідно. Замінимо в $\mathcal{U}$ кожну таку множину на набір множин $U_\gamma \times V_\gamma$. Отримаємо нову сукупність $\widetilde{\mathcal{U}} =$

$\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, яка також є відкритим покриттям простору $X \times Y$, і кожна її множина є підмножиною якоїсь множини з $\mathcal{U}$ (у таких випадках кажуть, що покриття $\widetilde{\mathcal{U}}$ *вписане* в $\mathcal{U}$).

Нехай $x \in X$ – довільна точка. Тоді $\{x\} \times Y \cong Y$ в силу пункту 4. твердження 2.1.5, отже $\{x\} \times Y$ – компакт в $X \times Y$ за наслідком 2.7.13. При цьому $\widetilde{\mathcal{U}}$ є, зокрема, відкритим покриттям $\{x\} \times Y \subset X \times Y$. Отже, з нього можна виділити скінченне підпокриття $\{U_{x,i} \times V_{x,i}\}_{i=1}^{n_x}$. Можемо вважати, що $(U_{x,i} \times V_{x,i}) \cap (\{x\} \times Y) \neq \varnothing$ для кожного $i = \overline{1, n_x}$ (для цього просто викинемо з підпокриття елементи, що не перетинаються з множиною). Тоді $x \in U_{x,i}$ для кожного i, тому відкрита множина $U_x := \bigcap\limits_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$ містить x, відкрита смуга $U_x \times Y$ включає $\{x\} \times Y$, і $\{U_{x,i} \times V_{x,i}\}_{i=1}^{n_x}$ – відкрите покриття смуги $U_x \times Y$.

Повторивши цю побудову для кожної $x \in X$, отримаємо відкрите покриття $\{U_x\}_{x\in X}$ компактного простору X. У нього існує скінченне підпокриття $\{U_{x_j}\}_{j=1}^{m}$. Тоді

$$\widehat{\mathcal{U}} := \left\{U_{x_j,i} \times V_{x_j,i}\right\}_{i=\overline{1,n_{x_j}},\, j=\overline{1,m}}$$

буде покриттям $X \times Y$ (тобто підпокриттям $\widetilde{\mathcal{U}}$). Справді, для кожної точки $(x, y) \in X \times Y$ існує j таке, що $x \in U_{x_j}$. Оскільки тоді $\{U_{x_j,i} \times V_{x_j,i}\}_{i=1}^{n_{x_j}}$ – покриття $U_{x_j} \times Y \supset \{x\} \times Y$ за побудовою вище, одна з цих множин містить точку (x, y).

Кожна множина покриття $\widehat{\mathcal{U}}$, що відповідає індексам $i = \overline{1, n_{x_j}}$, $j = \overline{1, m}$, належить до $\widetilde{\mathcal{U}}$, отже є підмножиною якоїсь множини $W_{ij} \in \mathcal{U}$. Тоді сукупність $\{W_{ij}\}$ є відкритим скінченним покриттям $X \times Y$, що є підпокриттям $\mathcal{U}$. Таким чином, $X \times Y$ компактний.

■

Ця теорема очевидним чином узагальнюється за індукцією: добуток просторів $X_1 \times \ldots \times X_n$ компактний тоді й тільки тоді, коли $X_1, \ldots, X_n$ компактні. Більш того, вона залишається вірною й для тихонівського добутку довільної сукупності просторів (див. означення 2.1.8). Це її узагальнення зветься *теоремою Тихонова про компактність*. Її доведення можна знайти, наприклад, у [24, с. 230-237].

Приклад 2.7.17. З цієї теореми випливає, зокрема, що замкнені паралелепіпеди $[a^1, b^1] \times \ldots \times [a^n, b^n]$ компактні в $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$ в силу твердження 2.7.9, при цьому сам простір $\mathbb{R}^n$ не є компактним в силу прикладу 2.7.11 (див. також теорему 2.9.5 нижче).

Приклад 2.7.18. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ компактний, бо коло S^1 компактне (приклад 2.7.15).

Приклади 2.7.8 і 2.7.11 демонструють, зокрема, що у загальному випадку компактність не зберігається при переході до підмножини (не наслідується). Але це так для замкнених множин:

Твердження 2.7.19. *Будь-яка замкнена підмножина компактного топологічного простору компактна.*

Доведення. Отже, нехай простір X компактний, $K \subset X$ замкнена, а $\mathcal{U}$ – відкрите покриття K. Тоді $\mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$ – відкрите покриття X. Виділимо з нього скінченне підпокриття та викинемо з цього підпокриття множину $X \setminus K$ (якщо вона там є). Отримаємо покриття множини K, що є скінченним підпокриттям $\mathcal{U}$.

■

Наступні кілька тверджень описують взаємодію компактності з аксіомами відокремлюваності.

Твердження 2.7.20. *Будь-яка компактна підмножина хаусдорфового топологічного простору замкнена.*

Доведення. Нехай підмножина $K \subset X$ простору X компактна, а $x \notin K$. В силу хаусдорфовості X, для будь-якої $y \in K$ існують відкриті $U_y \ni x$ і $V_y \ni y$ такі, що $U_y \cap V_y = \varnothing$. Тоді $\{V_y\}_{y \in K}$ – відкрите покриття K, у якого існує скінченне підпокриття $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$. Покладемо $U := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Це відкритий окіл x й $U \cap K = \varnothing$ за його побудовою. Отже, довільна точка x множини $X \setminus K$ є внутрішньою, тобто K замкнена.

■

У нехаусдорфових просторах компактні підмножини можуть бути незамкненими: див. приклад 2.7.5 або вправу 2.7.6.

Наслідок 2.7.21. *Нехай $f\colon X \to Y$ – бієктивне неперервне відображення топологічних просторів, де X компактний, а Y хаусдорфовий. Тоді f – гомеоморфізм.*

Доведення. Згідно з твердженням 1.10.13, нам залишилося перевірити відкритість f. Дійсно, нехай $U \subset X$ відкрита. Тоді $X \setminus U$ замкнена. В силу твердження 2.7.19, $X \setminus U$ – компакт. В силу твердження 2.7.12, $Y \setminus f(U) = f(X \setminus U)$ – компакт. Нарешті, в силу твердження 2.7.20, $Y \setminus f(U)$ замкнена. Отже, $f(U)$ відкрита.

■

Наслідок 2.7.22. *Нехай $f\colon X \to Y$ – ін'єктивне неперервне відображення топологічних просторів, де X компактний, а Y хаусдорфовий. Тоді f – вкладення.*

Доведення. Достатньо застосувати попередній наслідок до бієктивного обмеження $f\colon X \to f(X)$, де простір $f(X)$ є хаусдорфовим в силу твердження 2.5.25.

■

Твердження 2.7.23. *Якщо топологічний простір хаусдорфовий і компактний, то він нормальний.*

Доведення. Оскільки даний простір X задовольняє аксіомі T_2 (а отже й T_1), для доведення нормальності достатньо перевірити виконання аксіоми T_4. Нехай $A, B \subset X$ – замкнені, $A \cap B = \varnothing$. Згідно з твердженням 2.7.19, A і B компактні. В силу хаусдорфовості X, для будь-яких $x \in A$ і $y \in B$ існують відкриті $U_{x,y} \ni x$ і $V_{x,y} \ni y$ такі, що $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \varnothing$.

Розглянемо довільну $x \in A$. Тоді маємо $\{V_{x,y}\}_{y \in B}$ – відкрите покриття компактної B, тому у нього існує скінченне підпокриття $\{V_{x,y_i}\}_{i=1}^{n_x}$. Покладемо

$$U_x \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{x,y_i}; \quad V_x \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{x,y_i}.$$

Ці множини відкриті, $U_x \cap V_x = \varnothing$ (бо $U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \varnothing$ для будь-якого i), і за побудовою $x \in U_x$, $B \subset V_x$.

Отже, $\{U_x\}_{x \in A}$ є відкритим покриттям компактної A. У нього існує скінченне підпокриття $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{m}$. Візьмемо

$$U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}; \quad V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$

Знову ж, U і V відкриті, $U \cap V = \varnothing$ (бо $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \varnothing$ для кожного i), і $A \subset U$, $B \subset V$ за побудовою. Це й демонструє виконання T_4.

■

Зауважимо, що у другому абзаці попереднього доведення ми доводимо регулярність даного простору (тобто виконання T_3), а у третьому – виводимо з неї нормальність.

Означення 2.7.24. Топологічний простір X називається *локально компактним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що її замикання $\overline{U}$ компактне. Підмножина топологічного простору називається *локально компактною*, якщо вона є локально компактним простором в індукованій топології.

З компактності, очевидно, випливає локальна компактність: достатньо взяти $U \coloneqq X$ для будь-якої точки. Але, взагалі кажучи, не навпаки:

Приклад 2.7.25. Нескінченний дискретний простір X некомпактний (див. приклад 2.7.7), але локально компактний: для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $U \coloneqq \{x\}$, тоді $\overline{U} = U$ – компакт.

Приклад 2.7.26. Простір $\mathbb{R}^n$ некомпактний (приклад 2.7.17), але локально компактний: для будь-якої $x = (x^1, \ldots, x^n)$ і $\varepsilon > 0$ замиканням відкритої кулі $U = B_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{k}(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon) \ni x$ метрики ρ_∞ буде $D_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{k}[x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon]$, що буде компактом в силу прикладу 2.7.17.

Вправа 2.7.27. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ не є локально компактною.

Твердження 2.7.28. *Локальна компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Дійсно, це так, бо гомеоморфізм зберігає околи, замикання та компактність.

■

Вправа 2.7.29. Показати, що будь-який хаусдорфовий локально компактний топологічний простір є регулярним. Підказка: використати твердження 2.5.15, див. [19, с. 146]. Продемонструвати, що такий простір необов'язково нормальний, навівши приклад.

Ще одним узагальненням компактності є паракомпактність:

Вправа 2.7.30. Топологічний простір X зветься *паракомпактним*, якщо у будь-яке його відкрите покриття $\mathcal{U}$ можна *вписати локально скінченне* покриття $\mathcal{V}$. Вписаність означає, що кожний елемент $\mathcal{V}$ є підмножиною деякого елемента $\mathcal{U}$ (пор. з покриттями у доведенні теореми 2.7.16), а локальна скінченність – що для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$, яка перетинається лише зі скінченною кількістю елементів $\mathcal{V}$. Показати, що паракомпактність теж є топологічним інваріантом і що компактні простори паракомпактні.

Показати, що якщо локально компактний топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він паракомпактний. Зокрема, тоді $\mathbb{R}^n$ паракомпактний в силу прикладу 2.7.26.

Вправа 2.7.31. Показати, що якщо топологічний простір хаусдорфовий і паракомпактний, то він нормальний (див. [24, с. 253-254]).

Крім компактних просторів та $\mathbb{R}^n$ паракомпактними є взагалі усі метричні простори. Доведення цього, а також подальшу інформацію про паракомпактність та її застосування можна знайти, зокрема, у [24, с. 252-261].

2.8 Секвенційна компактність

В аналізі часто використовується варіант компактності, що формулюється у термінах послідовностей. У цьому параграфі ми з'ясуємо зв'язок між цими поняттями, почавши з допоміжних міркувань.

Означення 2.8.1. Нехай X – топологічний простір. Точка $x \in X$ зветься *точкою накопичення* підмножини $A \subset X$, якщо для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетин $U \cap A$ нескінченний.

Точки накопичення множини є її граничними точками, бо у попередньому означенні усі перетини $U \cap A$ залишаться непорожніми, якщо з них викинути точку x.

Твердження 2.8.2. *Будь-яка нескінченна підмножина компактного топологічного простору має точку накопичення.*

Доведення. Нехай X компактний і $A \subset X$ нескінченна. Припустимо, що жодна точка $x \in X$ не є точкою накопичення A, тобто існує відкрита $U_x \ni x$ така, що перетин $U_x \cap A$ скінченний. Тоді $\{U_x\}_{x \in X}$ є відкритим покриттям X, у якого не існує скінченного підпокриття, бо будь-яка його скінченна підсистема навіть не покриває A, протиріччя.

■

Означення 2.8.3. Топологічний простір зветься *секвенційно компактним*, якщо у будь-якої послідовності в ньому існує підпослідовність, що має границю. Підмножина топологічного простору зветься *секвенційно компактною*, якщо вона є секвенційно компактним простором в індукованій топології.

Твердження 2.8.4. *Секвенційна компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Випливає з того, що гомеоморфізм зберігає підпослідовності та границі.

■

Твердження 2.8.5. *Якщо компактний топологічний простір задовольняє першій аксіомі зліченності, то він секвенційно компактний.*

Доведення. Отже, нехай простір X компактний та задовольняє першій аксіомі зліченності. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Якщо множина A її значень скінченна, то існує постійна підпослідовність $\{x_{n_k} = x\}_{k=1}^{\infty}$, що, очевидно, збігається до x. В іншому випадку у A існує точка накопичення $x \in X$ в силу компактності X та твердження 2.8.2.

Нехай тепер $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченна база в x. Далі діємо як у доведенні твердження 1.9.4: покладемо $V_k := \bigcap\limits_{n=1}^{k} U_n$ для усіх $k \in \mathbb{N}$, тоді $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченна база в x, що утворює незростаючу послідовність відкритих околів x. Оскільки x – точка накопичення A, для будь-якого натурального k окіл V_k містить нескінченну кількість точок послідовності $\{x_n\}$. Тому можна побудувати підпослідовність, обравши для кожного $k \in \mathbb{N}$

індекс n_k так, що $x_{n_k} \in V_k$ і $n_k < n_{k+1}$. Аналогічно до доведення твердження 1.9.4 встановлюємо, що тоді $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.

■

Твердження 2.8.6. *Якщо секвенційно компактний топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він компактний.*

Доведення. Отже, розглянемо простір X, що є секвенційно компактним та задовольняє другій аксіомі зліченності, і нехай $\mathcal{U}$ – деяке його відкрите покриття. За теоремою Ліндельофа у $\mathcal{U}$ існує не більш ніж зліченне підпокриття $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покладемо $V_k \coloneqq \bigcup\limits_{n=1}^{k} U_n$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, тоді $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченне відкрите покриття X, що утворює неспадаючу послідовність:

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \ldots \subset X.$$

Щоб показати компактність X, достатньо довести, що існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $X = V_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} U_n$. Дійсно, у цьому випадку $\{U_n\}_{n=1}^{k}$ буде скінченним підпокриттям $\mathcal{U}$.

Припустимо, що це не так, тобто $V_k \neq X$ для будь-якого натурального k: існує $x_k \in X$ така, що $x_k \notin V_k$. Отримали послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. В силу секвенційної компактності, у неї існує підпослідовність $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, що збігається до деякої $x \in X$. Оскільки $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ є покриттям X, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in V_m$, тобто V_m – відкритий окіл x. Тоді, оскільки $x_{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} x$, існує $L \in \mathbb{N}$ таке, що $x_{k_l} \in V_m$ для будь-якого $l \geqslant L$. При цьому, оскільки $\{x_{k_l}\}$ – підпослідовність $\{x_k\}$, існує $l \geqslant L$ таке, що $k_l \geqslant m$. Тоді $x_{k_l} \in V_m \subset V_{k_l}$, що неможливо за побудовою $\{x_k\}$.

■

Вправа 2.8.7. Показати, що аксіоми зліченності у попередніх двох твердженнях суттєві, навівши відповідні контрприклади (див. [26, с. 68-70, 125-126]).

Наслідок 2.8.8. *Підмножина простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності, компактна тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з двох попередніх тверджень, бо друга аксіома зліченності наслідується при переході до підпростору, а перша – випливає з другої.

■

2.9 Компактність у метричному просторі

Компактні підмножини метричних просторів є важливим предметом вивчення в аналізі. Їм буде присвячена, зокрема, частина курсу функціонального аналіза (див., наприклад, [5]). Тут ми наведемо лише деякі найважливіші поняття і факти, що стосуються таких множин. Перш за все, закінчимо розмову про секвенційну компактність.

Вправа 2.9.1. Показати, що секвенційно компактний метричний простір сепарабельний. Підказка: показати спочатку, що з секвенційної компактності метричного простору (X, ρ) випливає існування для будь-якого $\varepsilon > 0$ скінченної $A \subset X$ такої, що $\rho(x, A) < \varepsilon$ для кожної $x \in X$ (такі підмножини A звуть *ε-сітками*).

Теорема 2.9.2 (Секвенційний критерій компактності)**.** *Підмножина метричного простору є компактною тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна.*

Доведення. Отже, нехай $K \subset X$ – підмножина метричного простору. Зауважимо, що індукована топологія на ній є метричною в силу вправи 1.6.10.

$\underline{\Rightarrow}$ Якщо K компактна, то вона секвенційно компактна в силу твердження 2.8.5, бо усі метричні простори задовольняють першій аксіомі зліченності за твердженням 1.5.8.

$\underline{\Leftarrow}$ Якщо K секвенційно компактна, то вона сепарабельна за попередньою вправою, а отже задовольняє другій аксіомі зліченності згідно з твердженням 1.7.18. Тоді вона компактна в силу твердження 2.8.6.

■

Інколи секвенційна компактність підмножини $K \subset X$ визначається дещо по-іншому: у будь-якої послідовності в K існує підпослідовність, що має границю в X (яка необов'язково належить до K). Ця умова слабша за умову означення 2.8.3. Формулювання попередньої теореми тоді набуває наступного вигляду: підмножина метричного простору компактна тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна і замкнена. Дійсно, будь-яка компактна K, як ми встановили, секвенційно компактна у сенсі означення 2.8.3, а отже і в сенсі слабшого означення. Вона замкнена в силу твердження 2.7.20 (див. також доведення теореми 2.9.5 нижче). З іншого боку, якщо у будь-якої послідовності в замкненій K існує підпослідовність з границею $x \in X$, то x належить до секвенційного замикання K, а отже, згідно з твердженням 1.9.5, і до $\overline{K} = K$, і ця підпослідовність збігається до x в K (чому?). Тому K секвенційно компактна у сенсі означення 2.8.3, а отже, як ми показали, компактна.

Означення 2.9.3. Підмножина $A \subset X$ метричного простору зветься *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій кулі: існують $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ такі, що $A \subset B_\varepsilon(x)$.

Твердження 2.9.4. *Будь-яка компактна підмножина метричного простору обмежена.*

Доведення. Отже, нехай (X, ρ) – метричний простір, а $K \subset X$ компактна. Тоді K секвенційно компактна за теоремою 2.9.2. Припустимо, що K необмежена. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in X$. Оскільки не існує кулі $B_\varepsilon(x_0)$, що містить K, для будь-якого натурального n існує $x_n \in K \cap (X \setminus B_n(x_0))$. Таким чином отримуємо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$. В силу секвенційної компактності K, у неї існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ з границею x. Зокрема, існує натуральне k_0 таке, що $x_{n_k} \in B_1(x) \subset B_{\rho(x,x_0)+1}(x_0)$ для будь-якого $k \geqslant k_0$ (тут включення куль є простим наслідком нерівності трикутника). Для достатньо великих $k \geqslant k_0$ матимемо $n_k \geqslant \rho(x, x_0) + 1$, тому $x_{n_k} \in B_{\rho(x,x_0)+1}(x_0) \subset B_{n_k}(x_0)$, що суперечить вибору x_{n_k}. Таким чином, K обмежена.

■

Теорема 2.9.5 (Критерій компактності підмножин евклідового простору)**.** *Підмножина простору $\mathbb{R}^n$ (зі стандартною топологією) компактна тоді й тільки тоді, коли вона обмежена і замкнена.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ компактна. Тоді вона обмежена за попереднім твердженням і замкнена в силу твердження 2.7.20, оскільки метричні простори нормальні за твердженням 2.5.23, зокрема хаусдорфові.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ обмежена і замкнена. За означенням обмеженості, існують $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon > 0$ такі, що $K \subset B_\varepsilon(x) \subset D_\varepsilon(x) = \prod\limits_{i=1}^n [x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon]$, де кулі розглядаємо у метриці ρ_∞. Оскільки куб $D_\varepsilon(x)$ компактний згідно з прикладом 2.7.17, а K – його замкнена (і в індукованій топології куба також) підмножина, K компактна за твердженням 2.7.19 в індукованій топології куба, а отже й у $\mathbb{R}^n$ за вправою 2.7.3.

■

Приклад 2.9.6. Стандартна n-вимірна сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, очевидно, обмежена і замкнена, тому компактна. А отже й проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ (див. приклад 2.4.10) компактний згідно з наслідками 2.7.13 і 2.7.14.

У попередній теоремі необхідність виконується для будь-якого метричного простору, а специфічною для $\mathbb{R}^n$ є саме достатність: будь-яка обмежена замкнена підмножина є компактною. Ця властивість (що інколи зветься *обмеженою компактністю* або *властивістю Гейне – Бореля*) має місце також для компактних метричних просторів (в силу твердження 2.7.19), але невірна в загальному випадку. Наприклад, $K = X = (0, 1)$ з евклідовою метрикою обмежена і замкнена (в собі), але не є компактною.

Вправа 2.9.7. Показати, що будь-який обмежено компактний (зокрема компактний) метричний простір є повним.

Вправа 2.9.8. Показати, що повний метричний простір (X, ρ) компактний тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компакт $K \subset X$ такий, що $\rho(x, K) < \varepsilon$ для будь-якої $x \in X$ (компактна ε-сітка). Вивести з цього, що описаний у зауваженні після теореми 2.6.10 куб Гільберта компактний. Інший спосіб демонстрації компактності цієї множини полягає у використанні теореми Тихонова про компактність (див. зауваження після теореми 2.7.16 та посилання там).

Теорема 2.9.9 (Веєрштрас)**.** *Нехай топологічний простір X компактний, а функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді f обмежена і приймає на X свої найменше та найбільше значення.*

Доведення. В силу твердження 2.7.12, $f(X)$ компактна у $\mathbb{R}$ як неперервний образ компактного простору. Тоді $f(X)$ обмежена і замкнена в силу теореми 2.9.5. З її обмеженості випливає, що функція f обмежена на X, а з замкненості – що $\overline{f(X)} = f(X)$. Крім того, оскільки $f(X)$ обмежена, $m \coloneqq \inf f(X) > -\infty$ і $M \coloneqq \sup f(X) < +\infty$. За означеннями інфімума та супремума, m і M належать до $\overline{f(X)} = f(X)$, бо в будь-яких їх ε-околах існують точки $f(X)$. Це й означає, що функція f приймає на просторі X своє найменше значення m та найбільше M.

■

Означення 2.9.10. Нехай (X, ρ) – метричний простір. *Діаметром* підмножини $A \subset X$ називається

$$\operatorname{diam} A \coloneqq \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Вправа 2.9.11. Показати, що множина обмежена тоді й тільки тоді, коли її діаметр скінченний. Як він пов'язаний із радіусом кулі з означення обмеженості множини?

Теорема 2.9.12 (Лема Лебега)**.** *Нехай $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – відкрите покриття компактного метричного простору X. Тоді існує таке $\delta > 0$, що якщо діаметр підмножини $B \subset X$ менший за δ, то B міститься в одній з множин покриття: існує індекс $\alpha \in A$ такий, що $B \subset U_\alpha$.*

Доведення. Визначимо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$ на даному метричному просторі (X, ρ) умовою

$$f(x) \coloneqq \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exists\, \alpha \in A\colon B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha\}.$$

для кожного $x \in X$. Зауважимо, що $f > 0$. Дійсно, для будь-якого $x \in X$ існує $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$ (бо $\mathcal{U}$ – покриття), і, оскільки U_α відкрита, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$, тому $f(x) \geqslant \varepsilon > 0$.

Покажемо, що f ліпшицева. Дійсно, нехай $x, y \in X$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$, для якого існує $\alpha \in A$ такий, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Якщо $y \notin B_\varepsilon(x)$, тобто

$\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$, то $f(y) > 0 \geqslant \varepsilon - \rho(x,y)$. Якщо ж $y \in B_\varepsilon(x)$, то $B_{\varepsilon-\rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ за нерівністю трикутника, тому $f(y) \geqslant \varepsilon - \rho(x,y)$ за побудовою функції f. Отже, в будь-якому разі $\varepsilon \leqslant f(y) + \rho(x,y)$. У цій нерівності перейдемо до супремума за $\varepsilon > 0$, для яких такий α існує, і отримаємо $f(x) \leqslant f(y) + \rho(x,y)$. Тобто $f(x) - f(y) \leqslant \rho(x,y)$. Помінявши місцями x та y, отримаємо $f(y) - f(x) \leqslant \rho(x,y)$, отже $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x,y)$. Це й означає ліпшицевість f. Звідси випливає, що f неперервна на X.

В силу компактності X і теореми Веєрштраса, f приймає на X своє найменше значення. Нехай це $2\delta = \min\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0) > 0$. Тепер нехай $B \subset X$ така, що $\operatorname{diam} B < \delta$, і $x \in B$ – якась її точка. Тоді $f(x) \geqslant 2\delta > \delta$, тому за означенням супремума існує $\alpha \in A$ такий, що $B_\delta(x) \subset U_\alpha$. Крім того, $B \subset B_\delta(x) \subset U_\alpha$ за означенням діаметра (дійсно, $\rho(x,y) \leqslant \operatorname{diam} B < \delta$ для будь-якої $y \in B$), що й потрібно було показати.

■

Означення 2.9.13. Число δ з формулювання леми Лебега називають *числом Лебега* покриття $\mathcal{U}$.

Це число, звичайно, визначене неоднозначно: якщо δ – число Лебега $\mathcal{U}$, то й будь-яке не більше за δ додатне значення буде числом Лебега цього покриття.

2.10 Зв'язність

Неформально кажучи, зв'язність – це властивість топологічного простору "складатися з єдиного шматка". Вона теж є важливим топологічним інваріантом. Простіше спочатку визначити, які простори <u>не</u> є зв'язними:

Означення 2.10.1. Топологічний простір X зветься *незв'язним*, якщо існують непорожні відкриті $U, V \subset X$ такі, що $U \cap V = \varnothing$ та $X = U \cup V$; і *зв'язним* у протилежному випадку. Підмножина топологічного простору зветься *незв'язною* (відповідно, *зв'язною*), якщо вона є незв'язним (зв'язним) простором в індукованій топології.

Твердження 2.10.2. *Множина A у топологічному просторі X незв'язна тоді й тільки тоді, коли існують відкриті $U, V \subset X$ такі, що $A \cap U \neq \varnothing$, $A \cap V \neq \varnothing$, $A \cap U \cap V = \varnothing$ і $A \subset U \cup V$.*

Доведення. Дійсно, за побудовою індукованої топології, будь-які дві відкриті в ній підмножини $A \subset X$ мають вигляд $A \cap U$ і $A \cap V$ для деяких відкритих $U, V \subset X$. Записуючи для них умови з означення незв'язності, отримаємо умови нашого твердження.

■

Означення 2.10.3. Підмножина топологічного простору називається *відкритозамкненою*, якщо вона одночасно відкрита і замкнена.

Англійською це буде *clopen*. Звичайно, такі множини не є для нас новими. Зокрема, у кожному просторі до відкритозамкнених множин відносяться порожня і сам простір (*тривіальні* відкритозамкнені множини). Зауважимо також, що доповнення до відкритозамкненої множини теж відкритозамкнене.

Твердження 2.10.4. *Топологічний простір X зв'язний тоді й тільки тоді, коли відкритозамкненими множинами в X є лише $\varnothing$ та X.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай X зв'язний, а $U \subset X$ відкритозамкнена, тобто U та $X \setminus U$ – відкриті. Тоді $X = U \cup (X \setminus U)$, $U \cap (X \setminus U) = \varnothing$. Тому якщо U та $X \setminus U$ були б непорожніми, X був би незв'язним. Отже або $U = \varnothing$, або $X \setminus U = \varnothing$ й тому $U = X$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер відкритозамкненими множинами в X є лише $\varnothing$ та X. Припустимо, що X незв'язний, тобто у ньому існують непорожні відкриті U і V такі, що $U \cap V = \varnothing$ та $X = U \cup V$. Тоді $U = X \setminus V$ замкнена (а отже відкритозамкнена), при цьому $U \neq \varnothing$ і $U \neq X$ (бо $V \neq \varnothing$), протиріччя. Таким чином, X зв'язний.

■

Приклад 2.10.5. Порожня множина та одноточкові підмножини є зв'язними у будь-якому просторі з тривіальних причин: їх не можна розділити на дві непорожні підмножини.

Приклад 2.10.6. У просторі з антидискретною топологією існує лише одна непорожня відкрита підмножина – сам простір, тому всі його підмножини зв'язні.

Приклад 2.10.7. У прямій з топологією напівнескінченних інтервалів усі підмножини зв'язні. Дійсно, нехай $A \subset \mathbb{R}$ і $A \cap U \cap V = \varnothing$ для деяких відкритих $U, V \subset \mathbb{R}$. Оскільки U і V – інтервали вигляду $(a, +\infty)$, один з них міститься в іншому, нехай для визначеності $U \subset V$. Тоді $A \cap U = A \cap U \cap V = \varnothing$. Тому A зв'язна згідно з твердженням 2.10.2.

Вправа 2.10.8. Показати, що у нескінченному просторі з кофінітною топологією підмножина є зв'язною тоді й тільки тоді, коли вона порожня, одноточкова або нескінченна.

Приклад 2.10.9. У просторі з дискретною топологією (і в будь-якій його підмножині) усі підмножини відкритозамкнені. Тому, в силу твердження 2.10.4, зв'язними у ньому є лише $\varnothing$ і одноточкові підмножини.

Приклад 2.10.10. У прямій Зоргенфрея зв'язними теж є лише $\varnothing$ і одноточкові підмножини. Дійсно, нехай $A \subset \mathbb{R}$ містить хоча б дві різні точки

$x, y \in A$, $x < y$. Тоді існує $a \in (x, y)$, й відкриті (в топології Зоргенфрея) множини $U = (-\infty, a)$ і $V = [a, +\infty)$ задовольняють умові твердження 2.10.2, отже A незв'язна.

Приклад 2.10.11. Для $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією ми дамо повний опис зв'язних підмножин. Почнемо з того, що відрізки зв'язні:

Твердження 2.10.12. *Будь-який відрізок $[a, b]$ у дійсній прямій зі стандартною топологією є зв'язним.*

Доведення. Тут вважаємо, що $a < b$ (інакше матимемо тривіальний випадок одноточкової множини). Нехай якась непорожня підмножина $U \subset [a, b]$ є відкритозамкненою в індукованій топології. В силу твердження 2.10.4, достатньо довести, що тоді $U = [a, b]$. Можемо вважати, що $a \in U$, бо у іншому випадку $\widehat{U} := [a, b] \setminus U$ теж відкритозамкнена, і $a \in \widehat{U}$. Замінивши у подальшому доведенні U на $\widehat{U}$, отримаємо, що $\widehat{U} = [a, b]$, тому $U = \varnothing$, протиріччя.

Оскільки U відкрита і $a \in U$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $[a, a+\varepsilon) \subset U$. Покладемо

$$c := \sup\{d \mid [a, d) \subset U\},$$

тоді $c \geqslant a + \varepsilon > a$. Для будь-якого $e \in [a, c)$ за означенням супремума існує $d \in (e, c)$ таке, що $[a, d) \subset U$, тому $e \in [a, d) \subset U$. Таким чином, $[a, c) \subset U$, отже $[a, c] = \overline{[a, c)} \subset \overline{U} = U$ в силу монотонності замикання і замкненості U. Припустимо, що $c < b$, тоді, оскільки U відкрита і $c \in U$, існує $\delta > 0$ таке, що $(c - \delta, c + \delta) \subset U$. Отримуємо, що $[a, c + \delta) \subset U$, що суперечить вибору c. Отже, $c = b$, тобто $U = [a, b]$.

■

Коли у цьому доведенні ми використовували монотонність замикання, малися на увазі замикання в індукованій топології $[a, b]$, але вони співпадають з перетинами замикань відповідних множин у $\mathbb{R}$ з $[a, b]$ (чому?). Аналогічні зауваження матимуть місце й для подальших доведень у цьому параграфі. Далі наведемо декілька корисних достатніх умов зв'язності підмножин, проілюструвавши їх прикладами.

Означення 2.10.13. Будемо казати, що підмножини A і B топологічного простору *розділені*, якщо $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Вправа 2.10.14. Показати, що простір X є незв'язним тоді й тільки тоді, коли існують непорожні розділені $A, B \subset X$ такі, що $X = A \cup B$.

Твердження 2.10.15. *Нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – сукупність зв'язних підмножин топологічного простору та існує індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такий, що A_{λ_0} і A_λ не розділені для будь-якого $\lambda \in \Lambda$. Тоді об'єднання $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ цих множин є зв'язним.*

Доведення. Тут також будемо використовувати твердження 2.10.4. Нехай непорожня $U \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ відкритозамкнена в індукованій топології. Можемо вважати, що $U \cap A_{\lambda_0} \neq \varnothing$, інакше перейдемо до доповнення, як у попередньому доведенні. Перетин $U \cap A_{\lambda_0}$ є відкритозамкненим в індукованій топології A_{λ_0}, отже, оскільки A_{λ_0} зв'язна, $U \cap A_{\lambda_0} = A_{\lambda_0}$, тобто $A_{\lambda_0} \subset U$. Розглянемо довільний індекс $\lambda \in \Lambda$. За умовою тоді $\overline{A_{\lambda_0}} \cap A_\lambda \neq \varnothing$ або $A_{\lambda_0} \cap \overline{A_\lambda} \neq \varnothing$. У першому з цих випадків, оскільки $\overline{A_{\lambda_0}} \subset \overline{U} = U$ за монотонністю замикання та замкненістю U, $U \cap A_\lambda \neq \varnothing$. У другому випадку існує $x \in A_{\lambda_0} \cap \overline{A_\lambda}$, тоді, оскільки U – відкритий окіл x, $U \cap A_\lambda \neq \varnothing$. Тоді в будь-якому разі $A_\lambda \subset U$ аналогічно до випадку A_{λ_0}. Отже, $U = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Це й доводить зв'язність цього об'єднання.

■

Нагадаємо, що підмножина $A \subset \mathbb{R}$ є *проміжком*, якщо відрізок $[x, y] \subset A$ для будь-яких $x, y \in A$, $x \leqslant y$. До проміжків відносяться $\varnothing$, усі відрізки (зокрема одноточкові множини $\{a\} = [a, a]$), інтервали (скінченні, напівнескінченні та $\mathbb{R}$) і напівінтервали (скінченні та напівнескінченні). Жодна інша підмножина $\mathbb{R}$ не є проміжком.

Теорема 2.10.16 (Опис зв'язних підмножин прямої)**.** *Підмножина дійсної прямої зі стандартною топологією є зв'язною тоді й тільки тоді, коли це проміжок.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $A \subset \mathbb{R}$ зв'язна. Припустимо, що це не проміжок, тобто існують $x, y \in A$, $x \leqslant y$ такі, що відрізок $[x, y] \not\subset A$: існує $a \in [x, y] \setminus A$ (очевидно, $a \in (x, y)$). Тоді відкриті підмножини прямої $U = (-\infty, a)$ і $V = (a, +\infty)$ задовольняють умові твердження 2.10.2, тобто A незв'язна, протиріччя.

$\underline{\Leftarrow}$ Ми вже знаємо, що зв'язними є $\varnothing$, одноточкові множини (приклад 2.10.5) та відрізки (за твердженням 2.10.12). Решта проміжків може бути представлена у вигляді об'єднання відрізків, що має загальну точку, наприклад, $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a + \frac{b-a}{2^n}, b - \frac{b-a}{2^n}]$. В силу твердження 2.10.15, де у якості A_{λ_0} можна взяти спільну одноточкову підмножину $\{\frac{a+b}{2}\}$, це об'єднання зв'язне. Аналогічно можна це показати для інших типів проміжків (перевірте це).

■

Твердження 2.10.17. *Якщо A і B – підмножини топологічного простору, A зв'язна і $A \subset B \subset \overline{A}$, то B зв'язна.*

Доведення. Представимо B у вигляді об'єднання:

$$B = A \cup \left(\bigcup_{x\in B} \{x\} \right).$$

Для будь-якої $x \in B$ множина A не розділена з $\{x\}$, бо $x \in \overline{A}$. Тому це об'єднання задовольняє умові твердження 2.10.15 і є таким чином зв'язним.

■

Наслідок 2.10.18. *Нехай A – підмножина топологічного простору X.*

1. *Якщо A зв'язна, то її замикання $\overline{A}$ зв'язне.*

2. *Якщо A зв'язна і всюди щільна, то X зв'язний.*

Твердження 2.10.19. *Нехай X – топологічний простір, у якому існує точка $x \in X$ з наступною властивістю: для будь-якої $y \in X$ існує зв'язна $A_{xy} \subset X$ така, що $x, y \in A_{xy}$. Тоді X зв'язний.*

Доведення. Це також простий наслідок твердження 2.10.15: за умовою

$$X = \{x\} \cup \left(\bigcup_{y \in X} A_{xy} \right),$$

й $\{x\} \subset A_{xy}$ для кожної $y \in X$.

■

Попереднє твердження часто використовують у більш слабкій формі: якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$ існує зв'язна $A_{xy} \subset X$ така, що $x, y \in A_{xy}$, то X зв'язний.

Твердження 2.10.20. *Нехай $f \colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X зв'язний. Тоді $f(X) \subset Y$ зв'язна.*

Доведення. Якщо $f(X)$ незв'язна, то згідно з твердженням 2.10.2 існують відкриті $U, V \subset Y$ такі, що $f(X) \cap U \neq \varnothing$, $f(X) \cap V \neq \varnothing$, $f(X) \cap U \cap V = \varnothing$ і $f(X) \subset U \cup V$. Тоді $f^{-1}(U)$ і $f^{-1}(V)$ – відкриті в X за неперервністю f, непорожні та $X = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$, тобто X незв'язний.

■

Аналогічно до компактності, звідси випливають наступні наслідки:

Наслідок 2.10.21. *Зв'язність є топологічним інваріантом.*

Наслідок 2.10.22. *Факторпростір зв'язного простору (за деяким відношенням еквівалентності) є зв'язним.*

Нагадаємо деякі поняття геометрії $\mathbb{R}^n$:

Означення 2.10.23. *Відрізком* з кінцями в точках x та y з $\mathbb{R}^n$ зветься підмножина

$$[x, y] \coloneqq \{(1-t)\,x + t\,y \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Підмножина $A \subset \mathbb{R}^n$ зветься *опуклою*, якщо для будь-яких $x, y \in A$ відрізок $[x, y] \subset A$; й *зірчатою* відносно точки $x \in A$, якщо для будь-якої $y \in A$ відрізок $[x, y] \subset A$.

Очевидно, опуклі множини є зірчатими, але, взагалі кажучи, не навпаки, як показано на рис. 2.14. При $n = 1$ (тобто для прямої) опуклі підмножини – це в точності проміжки.

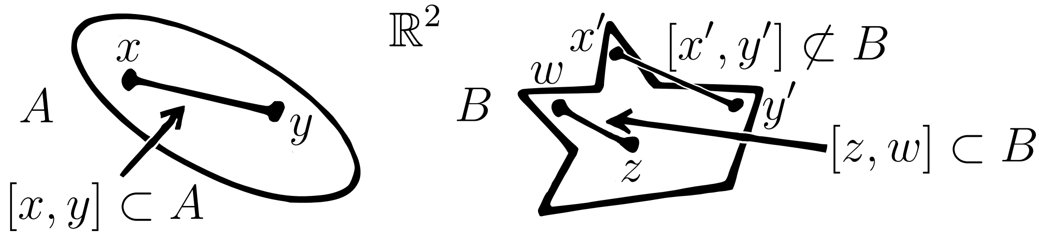


Рис. 2.14: Опукла множина A
та зірчата відносно точки z неопукла множина B у площині

Приклад 2.10.24. Будь-який відрізок у $\mathbb{R}^n$ є зв'язним за твердженнями 2.10.12 і 2.10.20, бо має вигляд $[x, y] = f([0, 1])$, де відображення $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, що визначене умовою $f(t) = (1-t)\,x+t\,y$, задається лінійними функціями, а отже є неперервним (насправді це гомеоморфізм $[0, 1]$ та $[x, y]$ – перевірте це). Тому будь-яка $A \subset \mathbb{R}^n$, що є зірчатою відносно $x \in A$, (зокрема, будь-яка опукла A) буде зв'язною за твердженням 2.10.19: достатньо взяти $A_{xy} = [x, y]$.

Приклад 2.10.25. Аналогічно за допомогою твердження 2.10.19 можна показати, що n-вимірна сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зв'язна для $n \geqslant 1$: для будь-яких $x, y \in S^n$ візьмемо у якості A_{xy} будь-яку дугу *великого кола* (тобто кола, що є перетином S^n з двовимірною площиною, яка проходить через початок координат), що з'єднує x та y. Дійсно, якщо $x = \cos\varphi_0\, e + \sin\varphi_0\, f$, а $y = \cos\varphi_1\, e + \sin\varphi_1\, f$ для деякого ортонормованого базиса $\{e, f\}$ площини, що проходить через початок координат, x та y (див. рис. 2.15), то визначимо $g\colon [0, 1] \to S^n$ умовою

$$g\colon t \mapsto \cos\left((1-t)\,\varphi_0 + t\,\varphi_1\right)\, e + \sin\left((1-t)\,\varphi_0 + t\,\varphi_1\right)\, f.$$

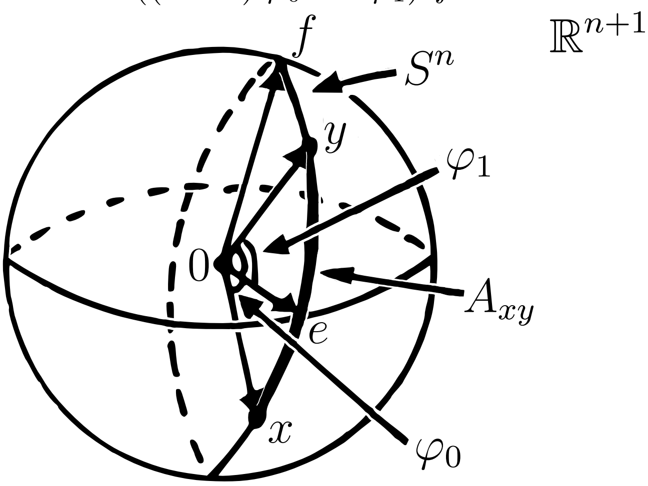


Рис. 2.15: Доведення зв'язності
сфери S^n при $n \geqslant 1$

Тоді g неперервне як обмеження відображення $[0, 1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ з неперервними координатними функціями, а тому дуга $A_{xy} := g([0, 1])$ ("криволінійний відрізок") зв'язна за твердженнями 2.10.12 і 2.10.20 (і знову ж g буде гомеоморфізмом $[0, 1]$ і A_{xy}).

У свою чергу, проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ буде тоді зв'язним згідно з наслідками 2.10.21 і 2.10.22.

Для доведення негомеоморфності, окрім безпосередньої перевірки зв'язності, буває корисно подивитися на те, що відбувається з просторами, коли ми викидаємо з них точки.

Приклад 2.10.26. Проміжки $[a, b)$ і (c, d) обидва зв'язні за теоремою 2.10.16. Тим не менш, вони негомеоморфні. Дійсно, припустимо, що існує гомеоморфізм $f\colon [a, b) \to (c, d)$. Викинемо з $[a, b)$ точку a і обмежимо f на підмножину $[a, b) \setminus \{a\} = (a, b)$, що переходить у $(c, d) \setminus \{f(a)\}$. Тоді обмеження $f|_{(a,b)}\colon (a, b) \to (c, d) \setminus \{f(a)\}$ теж має бути гомеоморфізмом за наслідком 1.10.11. Але за теоремою 2.10.16 перша з цих множин зв'язна, а друга – ні, бо $f(a)$ повинна бути внутрішньою точкою (c, d), протиріччя.

Вправа 2.10.27. За допомогою зв'язності показати, що будь-який відрізок $[a, b]$ не гомеоморфний жодному інтервалу (c, d) або напівінтервалу $[c, d)$ (у параграфі 2.7 це було зроблено за допомогою компактності).

Приклад 2.10.28. Аналогічно доводиться негомеоморфність будь-якого проміжка $A \subset \mathbb{R}$, що складається більш ніж з однієї точки, і S^1, що теж, як ми встановили, обидва зв'язні. Дійсно, у іншому випадку були б гомеоморфні $A \setminus \{a\}$ і $S^1 \setminus \{f(a)\}$, де $a \in A$ – якась внутрішня точка, а f – деякий гомеоморфізм. Але перша з цих множин незв'язна (не проміжок), а друга зв'язна (аналогічно до прикладу 2.10.25, де дуги тепер проводимо так, щоб вони не проходили через $f(a)$, або просто помітимо, що $S^1 \setminus \{f(a)\} \cong \mathbb{R}$, де гомеоморфізмом буде стереографічна проєкція).

Приклад 2.10.29. Таким же способом доводиться, що $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$: у іншому випадку незв'язна $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ була б гомеоморфною до $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ для деякого гомеоморфізма f. Хоча друга з цих множин і не є опуклою або зірчатою, її зв'язність неважко встановити аналогічно до прикладу 2.10.24: будь-які дві точки можна з'єднати або відрізком, або, якщо цьому заважає точка $f(0)$, дугою кола. Також можна показати, що $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (зробіть це) й використати зв'язність S^{n-1} (приклад 2.10.25), зв'язність $\mathbb{R}$ та наступну теорему:

Теорема 2.10.30 (Зв'язність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ зв'язний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y зв'язні.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Якщо $X \times Y$ зв'язний, то $X = p_X(X \times Y)$ та $Y = p_Y(X \times Y)$ зв'язні в силу твердження 2.10.20, бо канонічні проєкції p_X та p_Y неперервні згідно з пунктом 1. твердження 2.1.5.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер X та Y зв'язні. Представимо їхній добуток у вигляді об'єднання наступним чином:

$$X \times Y = X \times \{y\} \cup \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \right),$$

обравши якусь $y \in Y$. Всі ці множини гомеоморфні X або Y в силу пункту 4. твердження 2.1.5, а отже зв'язні за наслідком 2.10.21. При цьому перетин

$(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) = \{(x, y)\}$ непорожній для будь-якої $x \in X$. Тому $X \times Y$ зв'язний в силу твердження 2.10.15.

■

Як і аналогічна теорема 2.7.16 про компактність, це узагальнюється за індукцією: добуток просторів $X_1 \times \ldots \times X_n$ зв'язний тоді й тільки тоді, коли $X_1, \ldots, X_n$ зв'язні.

Приклад 2.10.31. В силу цієї теореми, різноманітні паралелепіпеди $A^1 \times \ldots \times A^n$, де $A^i \subset \mathbb{R}$ – проміжок для кожного i, (наприклад, замкнений куб $[0, 1]^n := \underbrace{[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]}_{n}$) зв'язні в $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.10.32. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зв'язний, бо коло S^1 зв'язне (приклад 2.10.25).

2.11 Зв'язні компоненти

Інтуїтивне уявлення про "шматки", на які розпадається незв'язний простір, формалізоване у наступному означенні:

Означення 2.11.1. Підмножина топологічного простору називається його *зв'язною компонентою* (або *компонентою зв'язності*), якщо вона є максимальною за включенням зв'язною підмножиною.

Тобто $A \subset X$ є компонентою зв'язності простору X, якщо A зв'язна і для будь-якої зв'язної $B \subset X$ з $A \subset B$ випливає $A = B$. Зауважимо, що X зв'язний тоді й тільки тоді, коли є своєю єдиною зв'язною компонентою (виведіть це з означення або з наступного загального твердження).

Твердження 2.11.2 (Властивості зв'язних компонент)**.** *Нехай X – топологічний простір.*

1. *Для будь-якої $x \in X$ існує єдина зв'язна компонента A_x простору X, що містить x.*

2. *Для будь-яких $x, y \in X$ або $A_x = A_y$, або $A_x \cap A_y = \varnothing$.*

3. *Зв'язні компоненти X замкнені (а якщо попарно різних зв'язних компонент скінченна кількість, то й відкриті).*

Доведення.

1. Спочатку перевіримо єдиність. Нехай $x \in A \cap B$, де A і B – зв'язні компоненти X. Тоді $A \cup B$ зв'язна за твердженням 2.10.15, $A \subset A \cup B$ і $B \subset A \cup B$, тому за властивістю максимальності $A = A \cup B = B$.

Щоб показати існування, визначимо A_x як об'єднання усіх зв'язних підмножин $A \subset X$, що містять x. Зауважимо, що серед цих множин є одноточкова $\{x\}$, що міститься в усіх інших, тому A_x зв'язна за твердженням 2.10.15. При цьому якщо $A \subset X$ зв'язна і $A_x \subset A$, то $x \in A$, тому A є елементом об'єднання A_x: $A \subset A_x$, отже $A = A_x$.

2. Аналогічно до доведення єдиності в попередньому пункті, якщо $A_x \cap A_y \neq \varnothing$, то $A_x \cup A_y$ зв'язна за твердженням 2.10.15 і містить в собі A_x та A_y, тому в силу максимальності $A_x = A_x \cup A_y = A_y$.

3. Якщо A – зв'язна компонента X, то її замикання $\overline{A}$ зв'язне за наслідком 2.10.18 і $A \subset \overline{A}$, тому в силу максимальності $\overline{A} = A$, тобто A замкнена. Якщо у X скінченна кількість попарно різних зв'язних компонент, то, в силу попередніх двох пунктів, доповненням до A буде об'єднання усіх інших зв'язних компонент, що замкнене як скінченне об'єднання замкнених підмножин, отже A відкрита.

■

З конструкції у доведенні пункту 1. випливає, що A_x – це найбільша за включенням зв'язна підмножина X, що містить x (аналогічно, наприклад, до характеризації внутрішності в пункті 2. твердження 1.7.8). Пункти 1. і 2. означають, що X є диз'юнктним об'єднанням своїх попарно різних зв'язних компонент (аналогічно до доведення теореми 1.1.9). Якщо це об'єднання скінченне, то зв'язні компоненти відкритозамкнені в силу пункту 3. Зауважимо також, що зв'язні компоненти непорожнього простору непорожні (чому?).

Приклад 2.11.3. Нехай тепер, навпаки, дано, що $X = \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ – диз'юнктне об'єднання непорожніх відкритозамкнених зв'язних підмножин (наприклад, проміжків дійсної прямої). Зауважимо, що у випадку скінченної кількості цих множин умова відкритозамкненості кожної з A_λ тут еквівалентна тому, що A_λ попарно розділені (перевірте це твердження, що фактично є узагальненням вправи 2.10.14). Тоді зв'язними компонентами X будуть в точності підмножини A_λ. Дійсно, за умовою A_λ зв'язна для кожного λ. Нехай $A \subset X$ зв'язна і $A_\lambda \subset A$. Припустимо, що $A_\lambda \neq A$. Тоді $A_\mu \cap A \neq \varnothing$ для деякого $\mu \neq \lambda$, тому $U = A_\lambda$ і $V = \bigcup\limits_{\mu \neq \lambda} A_\mu$ задовольняють умові твердження 2.10.2 для множини A, що суперечить її зв'язності, отже $A_\lambda = A$. Таким чином, усі A_λ дійсно є зв'язними компонентами X. Якщо ж зв'язна $A \subset X$ не збігається з жодною з A_λ, то або вона перетинається з двома різними A_λ і A_μ, $\lambda \neq \mu$, що суперечило б зв'язності A, як вище, або $A \subset A_\lambda$ для деякого λ, і тому A не є максимальною за включенням серед зв'язних. Отже, A не є зв'язною компонентою простору X.

Приклад 2.11.4. Зв'язними компонентами простору з дискретною топологією є усі його одноточкові підмножини, бо будь-яка більша підмножина незв'язна (див. приклад 2.10.9). Вони усі відкритозамкнені.

Приклад 2.11.5. Зв'язними компонентами множини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ теж є її одноточкові підмножини (перевірте це), кожна з яких є замкненою (бо $\mathbb{Q}$ наслідує з $\mathbb{R}$ аксіому T_1), але не відкритою (бо за властивістю раціональних чисел будь-який відкритий окіл кожної $x \in \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ містить інші точки $\mathbb{Q}$). Це демонструє суттєвість умови скінченності у пункті 3. твердження 2.11.2. Простори, усі зв'язні компоненти яких є одноточковими, як у цьому та попередньому прикладах, інколи називають *цілком незв'язними*.

Твердження 2.11.6. *При гомеоморфізмі топологічних просторів зв'язні компоненти переходять у зв'язні компоненти.*

Доведення. Дійсно, за наслідком 2.10.21 будь-який гомеоморфізм зберігає зв'язність. Також він зберігає включення відповідних підмножин, а отже й максимальність.

■

Наслідок 2.11.7. *Число зв'язних компонент топологічного простору є топологічним інваріантом.*

Цей інваріант можна застосовувати до доведення негомеоморфності як безпосередньо (наприклад, об'єднання різних скінченних кількостей множин A_λ з прикладу 2.11.3 негомеоморфні), так і викидаючи точки, як у прикладах застосування зв'язності з попереднього параграфа.

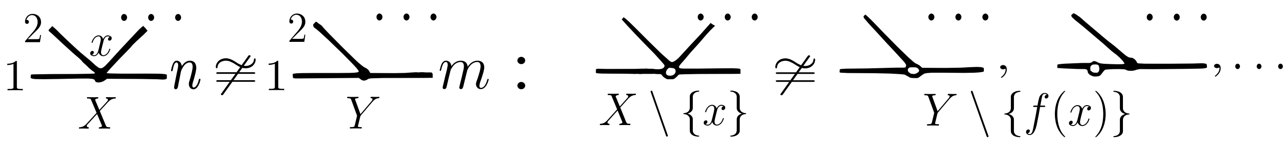


Рис. 2.16: Негомеоморфність букетів з різних кількостей відрізків

Приклад 2.11.8. На рис. 2.16 продемонстрована ідея доведення негомеоморфності букетів X та Y з n та m відрізків відповідно, що склеєні своїми кінцями, якщо $n \neq m$ і принаймні одне з цих чисел не менше за 3. Зауважимо, що ці простори зв'язні. Припустимо існування гомеоморфізма $f\colon X \to Y$ при, скажімо, $n > m$. Нехай x – спільна точка першого букета (тобто точка, у яку переходять еквівалентні кінці відрізків при факторизації). Тоді $X \setminus \{x\}$ має n зв'язних компонент, а $Y \setminus \{f(x)\}$ може мати різну їх кількість у залежності від розташування $f(x)$, але не більше ніж $\max\{m, 2\} < n$. Однак ці простори повинні бути гомеоморфними за наслідком 1.10.11, протиріччя. Спробуйте виконати усі необхідні перевірки самостійно.

2.12 Функції на зв'язному просторі

Зв'язність можна використовувати не лише для доведення негомеоморфності. Розглянемо деякі її неочікувані застосування, що пов'язані з узагальненням класичної теореми аналіза про проміжне значення. Вона легко випливає з уже відомого (як було і з теоремою Веєрштраса):

Теорема 2.12.1 (Больцано – Коші про проміжне значення)**.** *Нехай топологічний простір X зв'язний, а функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ й для будь-якого $c \in \mathbb{R}$, що належить відрізку з кінцями у $f(x)$ і $f(y)$, існує $z \in X$ така, що $c = f(z)$.*

Доведення. Дійсно, в силу твердження 2.10.20, $f(X)$ зв'язна в $\mathbb{R}$ як неперервний образ зв'язного простору, тобто є проміжком в силу теореми 2.10.16. Саме це й стверджується в умові.

∎

Наслідок 2.12.2 (Одновимірна теорема Брауера про нерухому точку)**.** *Для будь-якого неперервного відображення $f\colon D^1 \to D^1$ існує $x \in D^1$ така, що $f(x) = x$.*

Доведення. Нагадаємо, що $D^1 = [-1, 1]$. Припустимо, що $f(x) \neq x$ для будь-якого $x \in D^1$. Визначимо функцію $g\colon D^1 \to \mathbb{R}$ умовою $g(x) \coloneqq f(x) - x$. Вона неперервна, $g(-1) > 0$ (бо $f(-1) \in D^1$ і $f(-1) \neq -1$), і $g(1) < 0$ (аналогічно), тому за попередньою теоремою існує $x \in D^1$ така, що $g(x) = 0$, тобто $f(x) = x$, суперечність.

∎

Твердження попереднього наслідку буде вірним і для будь-якого відрізка $[a, b]$ (чому?).

Наслідок 2.12.3. *Для будь-яких натурального $n \geqslant 2$ і непарної неперервної функції $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ (тобто такої, що $f(-x) = -f(x)$ для будь-якої $x \in S^n$, де $-x$ – діаметрально протилежна до x точка сфери), існує $x \in S^n$ така, що $f(x) = 0$.*

Доведення. Дійсно, або $f = 0$ – постійна, або існує $x \in S^n$ така, що $f(x) \neq 0$, але тоді $f(-x)$ має протилежний знак. Залишилося застосувати зв'язність S^n і теорему про проміжне значення.

∎

Інший спосіб доведення – припустивши, що $f(x) \neq 0$ для усіх x, розглянути на S^n неперервну функцію g, що визначена умовою $g(x) \coloneqq \frac{f(x)}{|f(x)|}$ і множина значень якої $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ незв'язна, що суперечить твердженню 2.10.20.

Наслідок 2.12.4. *Для будь-яких натурального $n \geqslant 1$ і неперервної функції $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ існує $x \in S^n$ така, що $f(-x) = f(x)$.*

Доведення. Застосуємо попередній наслідок до непарної неперервної функції $g\colon S^n \to \mathbb{R}$, що визначена умовою $g(x) := f(x) - f(-x)$.

■

Звідси можна зробити висновок, що в будь-який момент часу на земній кулі (й навіть на кожному з меридіанів) існують дві діаметрально протилежні точки з однаковою температурою, якщо, звичайно, вважати її неперервною функцією.

Наслідок 2.12.5. *Для жодного натурального* $n \geqslant 1$ *не існує вкладення сфери* S^n *у пряму* $\mathbb{R}$.

Доведення. Дійсно, з попереднього наслідку випливає, що жодне неперервне відображення $S^n \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним.

■

Вправа 2.12.6 (Задачі про млинці)**.** Нехай підмножини $A, B \subset \mathbb{R}^2$ компактні та вимірні (тобто їхню площу можна знайти, наприклад, за допомогою інтеграла Рімана, як вивчається в курсі аналіза). Показати, що тоді вірні наступні твердження.

1. Існує пряма l, що ділить кожну з множин A і B на дві частини рівної площі.

2. Існують ортогональні прямі l і m, що ділять множину A на чотири частини рівної площі.

Ці факти, що проілюстровані на рис. 2.17, також є наслідками теореми про проміжне значення. Їхні доведення можна знайти у [20, с. 63-67].

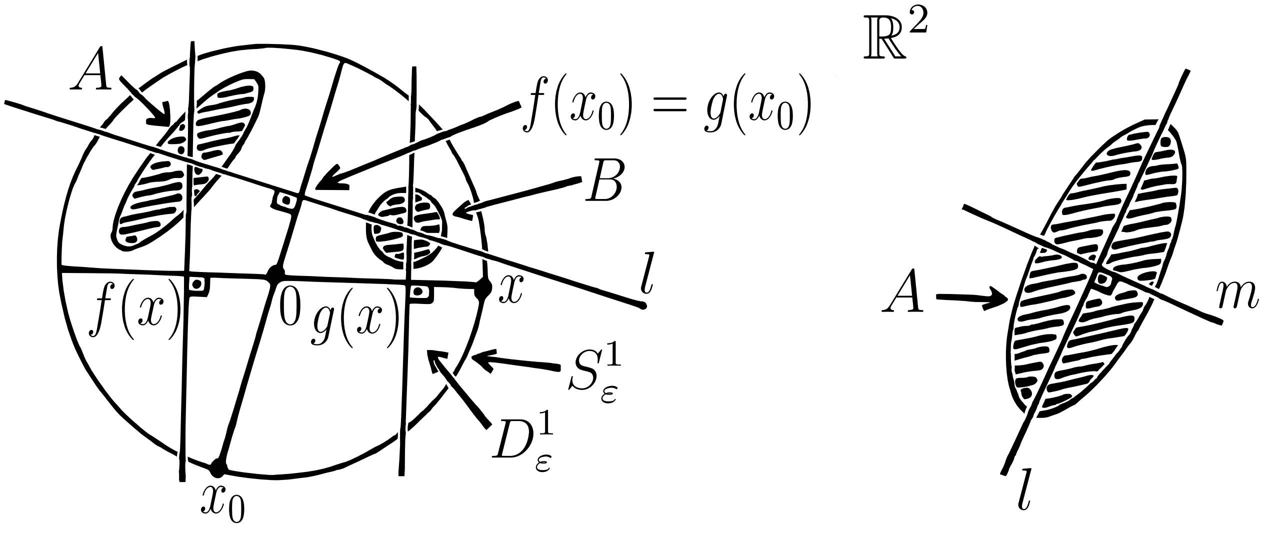


Рис. 2.17: Задачі про млинці

Наведемо без додаткових обґрунтувань ідею доведення для задачі 1. (що також демонструється на рис. 2.17 зліва). Оскільки A і B обмежені, вони містяться у замкненому крузі D^2_ε деякого радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у початку координат 0, межею якого є коло S^1_ε. Для кожної точки $x \in S^1_\varepsilon$ існує пряма, що ортогональна до діаметра кола $0x$ та ділить A навпіл. Якщо таких прямих багато (наприклад, коли A незв'язна), то вони утворюють смугу, тоді візьмемо її центральну пряму (вісь симетрії). Позначимо через $f(x)$ відстань від x до цієї прямої. Аналогічно визначається $g(x)$ для множини B. Тоді $f, g \in C(S^1_\varepsilon, [0, 2\varepsilon])$, і за побудовою $f(-x) = 2\varepsilon - f(x)$, $g(-x) = 2\varepsilon - g(x)$. Визначимо функцію h на S^1_ε умовою $h(x) \coloneqq f(x) - g(x)$, вона теж неперервна і непарна за властивостями f і g. Отже, за наслідком 2.12.3 існує $x_0 \in S^1_\varepsilon$ така, що $f(x_0) = g(x_0)$. Тоді пряма l, що проходить ортогонально до діаметра $0x_0$ на відстані $f(x_0)$ від x_0, і є потрібною.

2.13 Шляхи та лінійна зв'язність

Існує геометрично наочніший варіант зв'язності, що мотивований, зокрема, прикладами опуклих множин (2.10.24) і сфер (2.10.25), кожні дві точки яких з'єднувалися деяким "шляхом" (відрізком і дугою великого кола відповідно). Дамо цим поняттям точні означення.

Означення 2.13.1. *Шляхом* у топологічному просторі X називають будь-яке неперервне відображення $f\colon [a, b] \to X$ деякого відрізка дійсної прямої в X. Образ $f([a, b])$ тоді зветься *носієм* f. Якщо при цьому $f(a) = x$ і $f(b) = y$, то кажуть, що x – *початок* f, y – *кінець* f, а f *з'єднує* x та y (або x з y).

Якщо не вказане інше, далі завжди будемо областю визначення шляху вважати відрізок $[0, 1]$, який для економії місця (і традиційно для топологічної літератури) позначатимемо через I. Визначимо деякі операції зі шляхами:

Означення 2.13.2. Нехай X – топологічний простір. Для будь-якої $x \in X$ постійне відображення $e_x\colon I \to X\colon t \mapsto x$ будемо називати *постійним шляхом* у x. Нехай $f\colon I \to X$ – деякий шлях, тоді $\overline{f}\colon I \to X\colon t \mapsto f(1-t)$ назвемо *оберненим шляхом* до f. Нарешті, нехай $g\colon I \to X$ – теж деякий шлях, причому $f(1) = g(0)$. Тоді *добутком шляхів* f і g зветься відображення $f * g\colon I \to X$, що визначене умовою

$$t \mapsto \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Усі ці відображення є шляхами. Дійсно, e_x неперервне, бо постійне, $\overline{f}$ неперервне як композиція неперервних. Добуток $f * g$ коректно визначений, бо при $t = \frac{1}{2}$ перший вираз дає $f(1)$, а другий – $g(0)$, що збігаються за умовою, і є неперервним відображенням, бо $t \mapsto f(2t)$ і $t \mapsto g(2t-1)$ неперервні як композиції неперервних (як саме звідси випливає неперервність $f * g$?). У подальшому нам ще зустрічатимуться подібні конструкції, де неперервне відображення "зшивається" з кількох.

При цьому e_x з'єднує x з собою. Якщо f з'єднує x з y, то $\overline{f}$ з'єднує y з x. Якщо до того ж g з'єднує y з z, то $f * g$ з'єднує x з z. Зауважимо також, що шляхи $(f * g) * h$ і $f * (g * h)$, якщо вони визначені, мають спільний носій, зокрема, спільні початок та кінець, але, взагалі кажучи, не збігаються, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?).

Означення 2.13.3. Топологічний простір X зветься *лінійно зв'язним*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує шлях у X, що з'єднує x та y. Підмножина топологічного простору зветься *лінійно зв'язною*, якщо вона є лінійно зв'язним простором в індукованій топології.

Твердження 2.13.4. *Множина A у топологічному просторі X лінійно зв'язна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x, y \in A$ існує шлях у X такий, що він з'єднує x та y, а його носій лежить у A.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, якщо A лінійно зв'язна, то для будь-яких $x, y \in A$ існує шлях $f \in C(I, A)$ такий, що $f(0) = x$, $f(1) = y$. Тоді його композиція з відображенням включення $i \colon A \to X$ є неперервною, тобто шляхом у X, й тому задовольняє умові твердження.

$\underline{\Leftarrow}$ Якщо $f \in C(I, X)$ – шлях, для якого $f(0) = x$, $f(1) = y$ і $f(I) \subset A$, то відображення $f \colon I \to A$ є неперервним як обмеження неперервного, тобто є шляхом у A з індукованою топологією, що з'єднує x та y. Тому A лінійно зв'язна за означенням.

■

В силу цього твердження далі ми, як правило, будемо демонструвати лінійну зв'язність підмножин A простору X, розглядаючи шляхи в X, носії яких лежать у A. Також інколи ми писатимемо $C(I, A) \subset C(I, X)$, маючи на увазі, що шляху f з першої множини відповідає композиція $i \circ f$ з другої.

Приклад 2.13.5. Порожня множина (тривіальним чином) і одноточкові підмножини $\{x\}$ (бо постійний шлях e_x з'єднує x з собою) є лінійно зв'язними у будь-якому просторі.

Приклад 2.13.6. У $\mathbb{R}^n$ відрізок $[x, y]$ є носієм шляху $f \colon t \mapsto (1 - t)\, x + t\, y$ (див. приклад 2.10.24). Тому будь-яка опукла підмножина A простору $\mathbb{R}^n$ є лінійно зв'язною за означенням. Зокрема, усі проміжки дійсної прямої $\mathbb{R}$ лінійно зв'язні.

Якщо ж A зірчата відносно $x \in A$, то для будь-яких $y, z \in A$ позначимо через f та g шляхи, носіями яких є відрізки $[x, y]$ та $[x, z]$ відповідно. Тоді шлях $\overline{f} * g$ (носієм якого є дволанкова ламана) з'єднує y і z. Тому усі зірчаті множини лінійно зв'язні.

Приклад 2.13.7. Аналогічно, у прикладі 2.10.25 ми встановили, що будь-які дві точки сфери S^n для $n \geqslant 1$ можна з'єднати дугою великого кола, що є носієм деякого шляху g (який був явно описаний у згаданому прикладі). Тому S^n лінійно зв'язна (а отже й проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ згідно з наслідками 2.13.10 і 2.13.11 нижче).

Твердження 2.13.8. *Нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – сукупність лінійно зв'язних підмножин топологічного простору та існує індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такий, що $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \varnothing$ для будь-якого $\lambda \in \Lambda$. Тоді об'єднання $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ цих множин лінійно зв'язне.*

Доведення. Нехай $x, y \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, тобто існують $\lambda, \mu \in \Lambda$ такі, що $x \in A_\lambda$ та $y \in A_\mu$. За умовою, також існують $z \in A_{\lambda_0} \cap A_\lambda$ і $w \in A_{\lambda_0} \cap A_\mu$. В силу лінійної зв'язності цих множин, існують шляхи f, g і h в A_λ, A_{λ_0} і A_μ, що з'єднують x з z, z з w і w з y відповідно. Тоді $(f * g) * h$ – шлях у $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, що з'єднує x з y, доведено.

■

Зауважимо, що ця достатня умова слабша за аналогічну умову зв'язності (твердження 2.10.15), бо умову нерозділеності в ній замінено на сильнішу умову перетину. Деякі інші властивості лінійно зв'язних просторів повторюють властивості зв'язних дослівно:

Твердження 2.13.9. *Якщо $\varphi\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X лінійно зв'язний, то $\varphi(X) \subset Y$ лінійно зв'язна.*

Доведення. Дійсно, для будь-яких $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(X)$ існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує x та y у X. Тоді $\varphi \circ f \in C(I, \varphi(X))$ (неперервне як композиція неперервних) – шлях, що з'єднує $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$ у $\varphi(X)$.

■

Наслідок 2.13.10. *Лінійна зв'язність є топологічним інваріантом.*

Наслідок 2.13.11. *Факторпростір лінійно зв'язного простору (за деяким відношенням еквівалентності) є лінійно зв'язним.*

Теорема 2.13.12 (Лінійна зв'язність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ лінійно зв'язний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y лінійно зв'язні.*

Доведення. Дослівно повторимо доведення теореми 2.10.30 (із заміною посилань на твердження 2.10.20, 2.10.15 і наслідок 2.10.21 на твердження 2.13.9, 2.13.8 і наслідок 2.13.10 відповідно).

■

Є й інший спосіб доведення достатності у цій теоремі. Нехай X та Y лінійно зв'язні. Для будь-яких $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ тоді існують шляхи $f \in C(I, X)$ та $g \in C(I, Y)$, що з'єднують x_0 з x_1 та y_0 з y_1 відповідно. Тоді $(f, g)\colon I \to X \times Y$, що визначене умовою $t \mapsto (f(t), g(t))$, неперервне за пунктом 3. твердження 2.1.5, тобто є шляхом, що з'єднує (x_0, y_0) з (x_1, y_1). Як і аналогічні теореми 2.7.16 про компактність та 2.10.30 про зв'язність, це узагальнюється на будь-який скінченний добуток $X_1 \times \ldots \times X_n$ (за індукцією або з використанням викладеного тут альтернативного способу доведення).

Приклад 2.13.13. Паралелепіпеди $A^1 \times \ldots \times A^n$, де $A^i \subset \mathbb{R}$ – проміжки, зокрема замкнений куб I^n, лінійно зв'язні в $\mathbb{R}^n$ в силу попередньої теореми та прикладу 2.13.6.

Приклад 2.13.14. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ лінійно зв'язний (див. приклад 2.13.7).

2.14 Зв'язок зв'язності та лінійної зв'язності. Локальні властивості зв'язності

Зауважимо, що усі приклади лінійно зв'язних просторів та множин, що наведені у попередньому параграфі, повторюють приклади зв'язності з параграфа 2.10. Це не є випадковим:

Твердження 2.14.1. *Будь-який лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним.*

Доведення. Дійсно, якщо простір X лінійно зв'язний, то він задовольняє умові твердження 2.10.19, де у якості A_{xy} для $x, y \in X$ беремо носій $f(I)$ шляху f, що з'єднує x з y (він зв'язний за твердженням 2.10.20 як неперервний образ зв'язного I), отже X зв'язний.

■

Приклад 2.14.2. Таким чином, усі лінійно зв'язні підмножини дійсної прямої зі стандартною топологією – це проміжки за теоремою 2.10.16. Іншими словами, в $\mathbb{R}$ лінійна зв'язність, зв'язність та опуклість (див. також приклад 2.13.6) – це еквівалентні властивості підмножин, і задовольняють їм в точності проміжки.

Приклад 2.14.3 ("Гребінка та блоха")**.** Нехай $X = A \cup B$ – підмножина площини $\mathbb{R}^2$, де "гребінка"

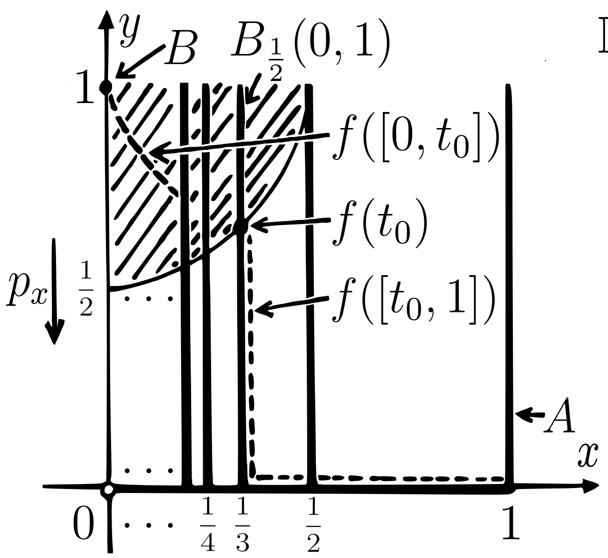
$$A \coloneqq (0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right)$$

є об'єднанням проміжків, а "блоха" $B \coloneqq \{(0,1)\}$ – одноточкова множина. Її зображено на рис. 2.18 зліва разом з ілюстраціями подальших міркувань. Тоді A і B – лінійно зв'язні (для A це випливає з твердження 2.13.8), отже зв'язні за попереднім твердженням. Помітимо, що $A \subset X \subset \overline{A}$, тому X зв'язна за твердженням 2.10.17.

Припустимо, що X лінійно зв'язна. Тоді, зокрема, існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує "блоху" з протилежним кутом квадрата, у якому міститься "гребінка": $f(0) = (0, 1)$, $f(1) = (1, 0)$. Розглянемо функцію $t \mapsto \rho((1, 0), f(t))$ на I (де ρ – евклідова метрика, точніше, її обмеження на X; кулі далі також будемо розглядати для цієї метрики). Вона неперервна (чому?), тому прообраз під її дією точки $\frac{1}{2}$ замкнений та повинен містити свій інфімум. До того ж, цей прообраз непорожній за теоремою про проміжне значення, бо функція приймає значення 0 при $t = 0$ і $\sqrt{2}$ при $t = 1$. Тому існує $t_0 \coloneqq \min\{t \mid \rho((1, 0), f(t)) = \frac{1}{2}\} > 0$. Тоді $f([0, t_0)) \subset B_{\frac{1}{2}}(0, 1)$ (бо інакше знову ж за теоремою про проміжне значення знайшлася б $t < t_0$ таке, що $\rho((1, 0), f(t)) = \frac{1}{2}$). З монотонності замикання та властивості неперервних відображень ($f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$ для будь-якої C; перевірте це) маємо:

$$f([0, t_0]) = f\left(\overline{[0, t_0)}\right) \subset \overline{f([0, t_0))} \subset \overline{B_{\frac{1}{2}}(0, 1)} = D_{\frac{1}{2}}(0, 1).$$

Тобто обмеження шляху f на $[0, t_0]$ залишається серед вертикальних "зубців гребінки" і не доходить до її горизонтальної частини, причому $\rho((1, 0), f(t_0)) = \frac{1}{2}$, отже принаймні $f(t_0) \in A$. Тому під дією ортогональної проєкції p_x на вісь x множина $f([0, t_0])$ перейде у множину вигляду $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in M} \subset \mathbb{R}$ (де $M \subset \mathbb{N}$ непорожня), що є незв'язною. З іншого боку, ця множина $(p_x \circ f)([0, t_0])$ є образом зв'язної множини під дією неперервного відображення, що суперечить твердженню 2.10.20. Отже, X не є лінійно зв'язною. Це демонструє, що обернене твердження до 2.14.1, взагалі кажучи, невірне.



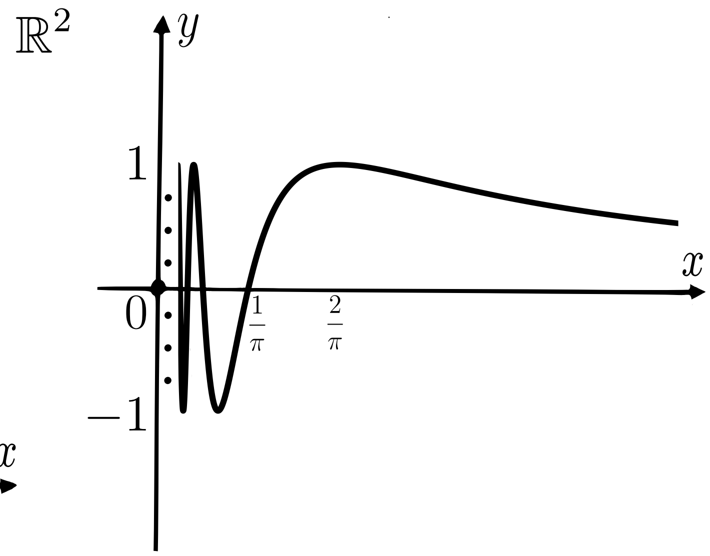


Рис. 2.18: Приклади зв'язних, але не лінійно зв'язних просторів: "гребінка та блоха" і "топологічний синус"

Приклад 2.14.4 ("Топологічний синус"). Аналогічно можна показати, що підмножина площини $X \coloneqq \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x},\ x > 0\}$ (див. рис. 2.18 справа) теж є зв'язною, але не лінійно зв'язною. Зробіть це самостійно, або див. [26, с. 137-138], де обговорюються властивості цього (щоправда, для функції $\sin\frac{1}{x}$, що визначена на $(0,1]$, а не на $(0,+\infty)$, що забезпечує компактність замикання такої множини) та споріднених прикладів.

Таким чином, щоб зі зв'язності виводити лінійну зв'язність, потрібні додаткові умови.

Означення 2.14.5. Топологічний простір X зветься *локально зв'язним* (відповідно, *локально лінійно зв'язним*), якщо для будь-яких $x \in X$ й відкритої $U \ni x$ існує відкрита зв'язна (лінійно зв'язна) $V \subset X$ така, що $x \in V \subset U$.

З означень та відомих інваріантностей випливає, що ці властивості є топологічними інваріантами (перевірте це). З локальної лінійної зв'язності простору випливає його локальна зв'язність за твердженням 2.14.1. При цьому із жодної з властивостей зв'язності та локальної зв'язності простору, взагалі кажучи, не випливає інша, і так само для відповідних лінійних властивостей. Це демонструють наступні приклади:

Приклад 2.14.6. Простір з дискретною топологією, що складається більш ніж з однієї точки, незв'язний за прикладом 2.10.9 (а отже й не лінійно зв'язний), але локально лінійно зв'язний (а отже локально зв'язний): у якості множини V завжди можна взяти одноточкову $\{x\}$.

Приклад 2.14.7. У позначеннях прикладу 2.14.3 розглянемо множину

$$X \coloneqq \overline{A} = [0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{0\} \times [0,1],$$

тобто "гребінку", якій повернули перший "зубець" (див. рис. 2.19 зліва; перевірте, що замикання A саме таке). Цей простір лінійно зв'язний за твердженням 2.13.8, а отже зв'язний. При цьому він не локально зв'язний (а отже й не локально лінійно зв'язний). Дійсно, нехай локальна зв'язність має місце. Тоді у відкритому околі $B_{\frac{1}{2}}(0,1)$ точки $(0,1)$ міститься деякий її зв'язний відкритий окіл V: $(0,1) \in V \subset B_{\frac{1}{2}}(0,1)$. У свою чергу, тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(0,1) \subset V$. Звідси, аналогічно до міркувань у прикладі 2.14.3, маємо, що $p_x(V) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in M} \subset \mathbb{R}$ для непорожньої $M \subset \mathbb{N}$ (що містить, зокрема, усі n такі, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$). Ця множина незв'язна, що суперечить зв'язності V і твердженню 2.10.20. Зауважимо, що при цьому сама A є локально лінійно зв'язним простором (перевірте це).

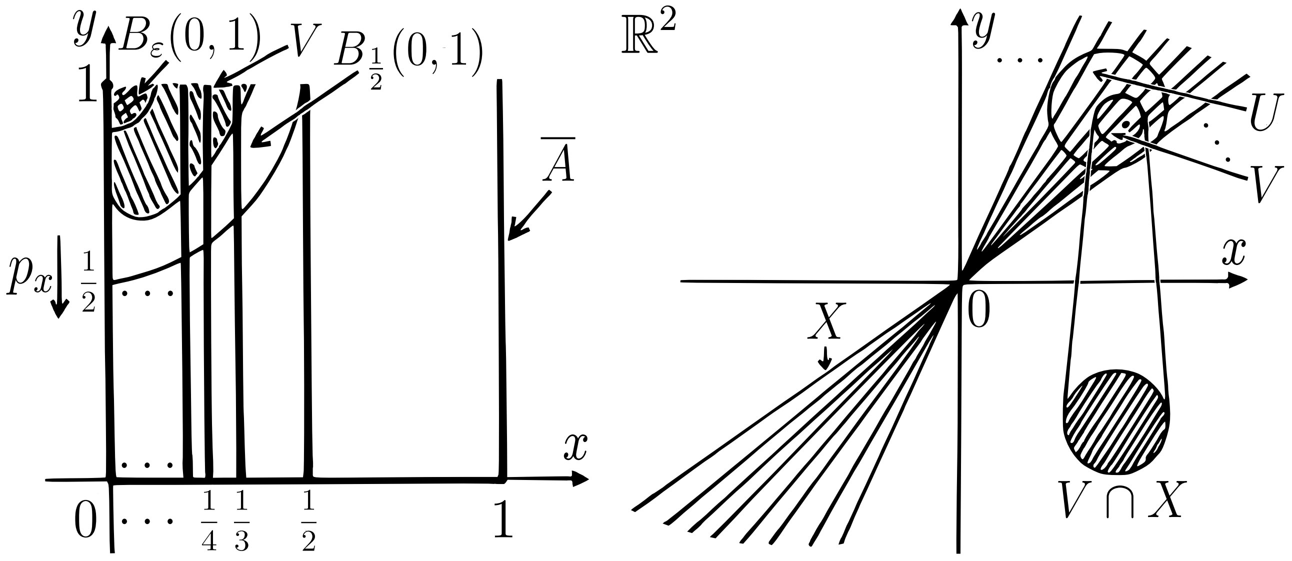


Рис. 2.19: Приклади лінійно зв'язних, але не локально зв'язних просторів: замикання "гребінки" та об'єднання прямих

Приклад 2.14.8. Підмножина площини $X := \{(x, y) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{Q} \colon y = \lambda x\}$, тобто об'єднання прямих з раціональними кутовими коефіцієнтами, що проходять через початок координат, також лінійно зв'язна, але не є локально зв'язним простором (перевірте це, використавши ідею, що проілюстрована на рис. 2.19 справа).

Приклад 2.14.9. Простір $\mathbb{R}^n$ локально лінійно зв'язний: для будь-яких $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ з відкритості U випливає існування $\varepsilon > 0$ такого, що $V := B_\varepsilon(x) \subset U$, причому евклідова куля $V = B_\varepsilon(x)$ опукла (перевірте це; ще простіше показати, що вона зірчата відносно x, використавши радіальні відрізки), а отже лінійно зв'язна згідно з прикладом 2.13.6. Цей випадок можна узагальнити:

Означення 2.14.10. Топологічний простір X називається *локально евклідовим*, якщо існує таке ціле невід'ємне n, що для будь-якої $x \in X$ існують відкрита $U \ni x$ і гомеоморфізм $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ (де на U розглядається індукована топологія).

При $n = 0$ це дає дискретний простір (чому?). Неважко встановити, що локальна евклідовість є топологічним інваріантом. Крім $\mathbb{R}^n$ (просто покладемо $U := \mathbb{R}^n$ та $\varphi := id_{\mathbb{R}^n}$), локально евклідовою також є будь-яка відкрита підмножина $V \subset \mathbb{R}^n$ (перевірте це). Інші приклади (скажімо, S^n) будуть наведені у параграфі 4.1. Інколи розглядають більш загальне поняття локальної евклідовості, дозволяючи різні значення вимірності n в околах різних точок простору.

Твердження 2.14.11. *Будь-який локально евклідовий топологічний простір є локально лінійно зв'язним.*

Доведення. Отже, нехай простір X локально евклідовий, $x \in X$, U – відкрита та містить x. Тоді за означенням існують відкрита $V \ni x$ і гомеоморфізм $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$. За властивостями гомеоморфізма $\varphi(U \cap V)$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset \varphi(U \cap V)$ (див. умовну ілюстрацію цього на рис. 2.20), де евклідова куля $B_\varepsilon(\varphi(x))$ лінійно зв'язна. Тоді $W := \varphi^{-1}\big(B_\varepsilon(\varphi(x))\big) \subset U \cap V \subset U$ є відкритим лінійно зв'язним околом x за наслідком 2.13.10. Таким чином, X – локально лінійно зв'язний.

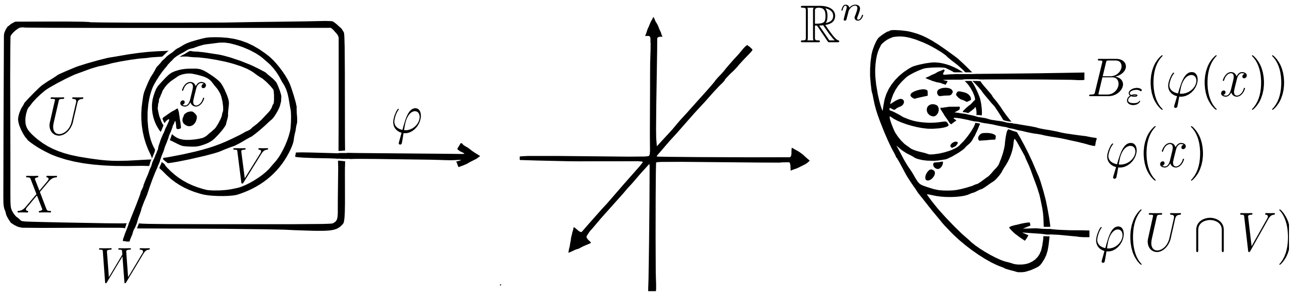


Рис. 2.20: Доведення локальної лінійної зв'язності локально евклідового простору

■

Теорема 2.14.12 (Достатня умова лінійної зв'язності областей)**.** *Будь-яка відкрита зв'язна підмножина локально лінійно зв'язного топологічного простору є лінійно зв'язною.*

Зокрема, будь-який зв'язний локально лінійно зв'язний простір є лінійно зв'язним. Відкриті зв'язні підмножини топологічного простору часто називають його *областями*, що пояснює назву теореми. Зауважимо, що підмножини площини з прикладів 2.14.3 і 2.14.4 не є відкритими, тобто умова відкритості у теоремі суттєва.

Доведення. Отже, нехай простір X локально лінійно зв'язний, а $U \subset X$ відкрита і зв'язна. Якщо $U = \varnothing$, твердження є очевидним. Тому можемо вважати, що існує $x \in U$. Покладемо

$$V := \{y \in U \mid \exists\, f \in C(I, U)\colon f(0) = x,\ f(1) = y\}.$$

Тобто V складається з усіх точок U, з якими можна з'єднати x деяким шляхом, що лежить в U.

Покажемо, що V відкрита (в топології X, а отже й у індукованій топології множини U). Дійсно, нехай $y \in V$. В силу локальної лінійної зв'язності простору X, існує відкрита лінійно зв'язна W така, що $y \in W \subset U$. За побудовою V існує шлях $f \in C(I, U)$, що з'єднує x та y. Оскільки W лінійно зв'язна, для будь-якої $z \in W$ існує шлях $g \in C(I, W) \subset C(I, U)$, що з'єднує y і z. Тому шлях $f * g \in C(I, U)$ з'єднує x і z, тобто $z \in V$. Таким чином, ми показали, що $W \subset V$, а отже будь-яка $y \in V$ є внутрішньою точкою V, що й було потрібно. Цей і наступний кроки доведення умовно показані на рис. 2.21.

Тепер покажемо, що $U \setminus V$ відкрита (теж в X, а отже в U). Аналогічно до попередньої частини доведення, для кожної $\widetilde{y} \notin V$ також існує відкрита лінійно зв'язна $\widetilde{W}$ така, що $\widetilde{y} \in \widetilde{W} \subset U$. Припустимо, що існує $\widetilde{z} \in V \cap \widetilde{W}$. Тоді існують шляхи $\widetilde{f} \in C(I, U)$ і $\widetilde{g} \in C(I, \widetilde{W}) \subset C(I, U)$, що з'єднують x та $\widetilde{z}$ і $\widetilde{z}$ та $\widetilde{y}$ відповідно. Тому шлях $\widetilde{f} * \widetilde{g} \in C(I, U)$ з'єднує x та $\widetilde{y}$, тобто $\widetilde{y} \in V$, протиріччя. Отже, $\widetilde{W} \cap V = \varnothing$, тобто будь-яка точка $\widetilde{y}$ множини $U \setminus V$ є внутрішньою. Тому V замкнена в U.

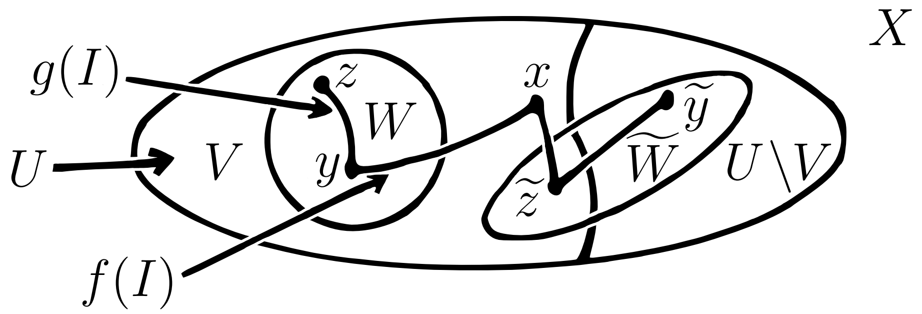


Рис. 2.21: Доведення достатньої умови лінійної зв'язності областей

Таким чином, V – непорожня (бо містить x) відкритозамкнена підмножина U. В силу зв'язності U і твердження 2.10.4, тоді $V = U$, тобто точку x можна з'єднати з будь-якою точкою $y \in U$ деяким шляхом, що лежить в U. З цього випливає лінійна зв'язність U аналогічно до зірчатих множин у прикладі 2.13.6: x можна з'єднати з будь-якими $y, z \in U$ шляхами f і g відповідно, тоді $\overline{f} * g$ з'єднує y і z.

■

2.15 Компоненти лінійної зв'язності. Теорема Жордана

Введемо поняття компонент для лінійної зв'язності так само, як для зв'язності у параграфі 2.11. Виявляється, що більшість їх властивостей повторюють властивості зв'язних компонент, за виключенням замкненості, як побачимо у прикладі 2.15.4 нижче.

Означення 2.15.1. Підмножина топологічного простору зветься його *компонентою лінійної зв'язності*, якщо вона є максимальною за включенням лінійно зв'язною підмножиною.

Твердження 2.15.2 (Властивості компонент лінійної зв'язності)**.** *Нехай X – топологічний простір.*

1. *Для будь-якої $x \in X$ існує єдина компонента лінійної зв'язності B_x простору X, що містить x.*

2. *Для будь-яких $x, y \in X$ або $B_x = B_y$, або $B_x \cap B_y = \varnothing$.*

3. *Будь-яка компонента лінійної зв'язності X міститься у деякій його зв'язній компоненті.*

Доведення. Перші два пункти доводяться дослівно як перші два пункти твердження 2.11.2 (із заміною твердження 2.10.15 на твердження 2.13.8). Третій випливає з того, що кожна компонента B_x лінійної зв'язності X є зв'язною за твердженням 2.14.1, а отже міститься у найбільшій за включенням зв'язній підмножині X, що містить x, – її зв'язній компоненті.

∎

Як і для зв'язності, звідси випливає, що B_x – це найбільша за включенням лінійно зв'язна підмножина X, що містить x, і що X є диз'юнктним об'єднанням своїх попарно різних компонент лінійної зв'язності. Зокрема, це означає, що належність точок до однієї компоненти лінійної зв'язності є відношенням еквівалентності (звичайно, це так і для зв'язних компонент, і взагалі для будь-якого розбиття X на підмножини, що попарно не перетинаються). Для цього відношення можна сформулювати корисний критерій:

Твердження 2.15.3. *Дві точки $x, y \in X$ топологічного простору належать одній компоненті лінійної зв'язності тоді й тільки тоді, коли існує шлях, що їх з'єднує.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай B – компонента лінійної зв'язності простору X. В силу її лінійної зв'язності, для будь-яких $x, y \in B$ існує шлях $f \in C(I, B) \subset C(I, X)$, що з'єднує x та y.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай точки $x, y \in X$ можна з'єднати шляхом $f \in C(I, X)$. Тоді $x, y \in f(I)$, причому $f(I)$ є лінійно зв'язною за твердженням 2.13.9, отже міститься в деякій компоненті лінійної зв'язності X (як у найбільшій за включенням лінійно зв'язній підмножині X, що містить x).

∎

Приклад 2.15.4. Ще раз повернімося до прикладу 2.14.3. Оскільки $X = A \sqcup B$ не є лінійно зв'язним, а підмножини A і B – є, це максимальні за включенням лінійно зв'язні підмножини (аналогічно до прикладу 2.11.3), тобто компоненти лінійної зв'язності X, що містяться у його єдиній зв'язній компоненті X. При цьому A не є замкненою (вона всюди щільна в X).

Приклад 2.15.5. Нагадаємо означення ортогональної групи:

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; AA^T = A^T A = E \right\}.$$

Тут через $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ позначено векторний простір усіх $(n \times n)$-матриць з коефіцієнтами, що належать до поля $\mathbb{K}$, який природним чином ототожнюється з $\mathbb{K}^{n^2}$. У нашому випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Перенесемо на $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ стандартну топологію $\mathbb{R}^{n^2}$ (тобто вважатимемо відкритими в точності ті підмножини, що переходять у відкриті підмножини $\mathbb{R}^{n^2}$ при такому ототожненні) й розглянемо індуковану топологію на $\mathrm{O}(n)$. Згадаємо, що будь-яка ортогональна матриця має визначник 1 або -1 (це неважко вивести з наведеного вище означення), тобто $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \sqcup \mathrm{O}^-(n)$, де $\det A = 1$ для $A \in \mathrm{SO}(n)$ (це т. зв. *спеціальна ортогональна група*, що є підгрупою у $\mathrm{O}(n)$ – перевірте, що для неї виконується означення A.14) і $\det A = -1$ для $A \in \mathrm{O}^-(n)$. Покажемо, що ці дві підмножини є лінійно зв'язними. З курсу лінійної алгебри відомо, що для будь-якої $A \in \mathrm{SO}(n)$ існує $B \in \mathrm{O}(n)$ така, що

$$A = B \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & & & \\ & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Покладемо для $t \in I$

$$f(t) := B \begin{pmatrix} \cos t\varphi_1 & -\sin t\varphi_1 & & & & & & \\ \sin t\varphi_1 & \cos t\varphi_1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos t\varphi_k & -\sin t\varphi_k & & & \\ & & & \sin t\varphi_k & \cos t\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Відображення $f\colon I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ неперервне, бо задається неперервними функціями, й діє в $\mathrm{SO}(n)$, бо для будь-якого t матриця $f(t)$ ортогональна як добуток ортогональних, а її визначник дорівнює добутку $(\det B)^2 = 1$ на визначник середньої матриці, що теж дорівнює 1. Таким чином, $f \in C(I, \mathrm{SO}(n))$ – шлях, що з'єднує $f(0) = BEB^T = BB^T = E$ і $f(1) = A$. Отже, $\mathrm{SO}(n)$ лінійно зв'язна (аналогічно до завершення доведення теореми 2.14.12: якщо будь-які дві матриці можна з'єднати шляхами з E, то їх можна з'єднати й одну з одною). Аналогічно можна показати, що $\mathrm{O}^-(n)$ лінійно зв'язна (зробіть це). При цьому $\mathrm{O}(n)$ не є зв'язною (а отже й лінійно зв'язною) за твердженням 2.10.20, оскільки неперервна (бо поліноміальна) функція det переводить $\mathrm{O}(n)$ у незв'язну множину $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. Тобто $\mathrm{SO}(n)$ і $\mathrm{O}^-(n)$ є компонентами зв'язності та лінійної зв'язності $\mathrm{O}(n)$. Зокрема, вони відкритозамкнені.

Зауважимо, що $\mathrm{O}(n)$ є локально евклідовим простором, але доведення цього факта виходить за межі даного курсу.

Вправа 2.15.6. Показати, що *унітарна група*

$$\mathrm{U}(n) := \left\{ A \in \ \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; A\,\overline{A^T} = \overline{A^T}\,A = E \right\}$$

та її підгрупа – *спеціальна унітарна група* $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$ – лінійно зв'язні (з топологіями, що вводяться аналогічно до попереднього прикладу, але з використанням очевидного ототожнення просторів $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}^{n^2}$ і $\mathbb{R}^{2n^2}$).

Вправа 2.15.7. Показати, що *псевдоортогональна група*

$$\mathrm{O}(1,1) := \left\{ A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \;\middle|\; A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^T = A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

з топологією, що вводиться аналогічно до попередніх прикладів, складається з чотирьох компонент зв'язності та лінійної зв'язності.

Наступні два твердження доводяться і використовуються аналогічно до відповідних властивостей зв'язних компонент.

Твердження 2.15.8. *При гомеоморфізмі компоненти лінійної зв'язності переходять у компоненти лінійної зв'язності.*

Наслідок 2.15.9. *Число компонент лінійної зв'язності топологічного простору є топологічним інваріантом.*

На завершення теми зв'язності наведемо без доведення теорему, що є хрестоматійним прикладом "геометрично очевидного", але насправді нетривіального твердження. Навіть у класичному випадку $n = 1$ її повне доведення досить складне. Різні його варіанти можна знайти у [10, с. 112-115] (для більш слабкого твердження), [24, с. 376-394] (це доведення використовує ідеї, що будуть викладені у наступному розділі) і [28], а для часткового випадку ламаних – у [2, с. 250-252]. У [17, с. 169-174] показано, як довести цю теорему для довільної вимірності методами алгебраїчної топології.

Теорема 2.15.10 (Жордан)**.** *Нехай відображення $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, де $n \geqslant 1$, ін'єктивне і неперервне. Тоді $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(S^n)$ складається з двох зв'язних компонент A і B, кожна з яких є відкритою підмножиною $\mathbb{R}^{n+1}$, причому $\partial A = \partial B = f(S^n)$, A обмежена, а B необмежена.*

В силу теореми 2.14.12, оскільки зв'язні A і B відкриті в локально лінійно зв'язному (чому?) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(S^n)$, вони є у ньому лінійно зв'язними, а отже є також компонентами лінійної зв'язності. З наслідку 2.7.22 випливає, що в умовах теореми f є вкладенням S^n у $\mathbb{R}^{n+1}$, бо S^n компактна, а $\mathbb{R}^{n+1}$ хаусдорфовий. Наприклад, якщо $f = i$ – стандартне вкладення (тобто включення) S^n у $\mathbb{R}^{n+1}$, то $A = B^{n+1}$ і $B = \mathbb{R}^{n+1} \setminus D^{n+1}$. При $n = 1$ відображення f з умови теореми Жордана зветься *простою замкненою (жордановою) кривою* у $\mathbb{R}^2$.

Розділ 3

Елементи алгебраїчної топології: фундаментальна група та накриття

Алгебраїчна (алгебрична) топологія вивчає інваріанти алгебраїчної природи, які певним чином визначаються даним топологічним простором. Це можуть бути алгебраїчні об'єкти, такі як групи або векторні простори, чи пов'язані з ними числа. Найчастіше вони є інваріантами відносно слабшого за гомеоморфність відношення еквівалентності – гомотопічної еквівалентності. Алгебраїчна топологія як предмет систематичного вивчення виникла у кінці дев'ятнадцятого сторіччя у роботах А. Пуанкаре й досі займає центральне місце в топології та її застосуваннях. Ми почнемо з деяких важливих для неї загальнотопологічних понять, після чого детально ознайомимося з одним алгебро-топологічним інваріантом – фундаментальною групою. Для її обчислення ми будемо використовувати техніку накрить – корисного спеціального класу неперервних відображень. Наприкінці розділу наведені деякі цікаві застосування фундаментальних груп. Для подальшого знайомства з алгебраїчною топологією рекомендуються книга [20], що добре доповнює матеріал цього розділу, та ґрунтовне викладення багатьох інших тем у [17].

3.1 Гомотопія

У цьому параграфі ми побачимо, що топологія встановлює відношення еквівалентності не тільки між просторами, а й між відображеннями. Поняття гомотопії формалізує інтуїтивне уявлення про неперервну "деформацію" одного неперервного відображення в інше. Нагадаємо, що літерою I традиційно позначається відрізок $[0,1]$.

Означення 3.1.1. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. *Гомотопією* f і g зветься неперервне відображення $F\colon X \times I \to Y$ таке, що $F(x,0) = f(x)$ і $F(x,1) = g(x)$ для будь-якої $x \in X$. Гомотопія F відображень f і g зветься A-*гомотопією*, де $A \subset X$ – деяка підмножина, якщо крім цього $F(x,s) = f(x) = g(x)$ для будь-яких $x \in A$ і $s \in I$. Якщо існує гомотопія (відповідно, A-гомотопія) f і g, то говорять, що f *гомотопне* (A-*гомотопне*) g і пишуть $f \sim g$ ($f \underset{A}{\sim} g$).

Тут на $X \times I$ вводиться, як зазвичай, топологія прямого добутку. A-гомотопію ще називають гомотопією, що *зв'язана на* A. З означення випливає, що для її існування необхідне співпадіння f і g на A: $f|_A = g|_A$. "Звичайна" гомотопія (т. зв. *вільна*) – це $\varnothing$-гомотопія.

Твердження 3.1.2. *A-гомотопність відображень є відношенням еквівалентності на $\{f \in C(X,Y) \mid f|_A = f_A\}$ (підмножині неперервних відображень з X у Y, що збігаються на A з деяким фіксованим f_A). Зокрема, гомотопність – відношення еквівалентності на $C(X,Y)$.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом еквівалентності для відношення A-гомотопності (звичайно, вони тоді будуть виконуватися, зокрема, для $A = \varnothing$, тобто у випадку гомотопності).

- $f \underset{A}{\sim} f$ для будь-якого f з $f|_A = f_A$: неважко перевірити, що $F(x,s) := f(x)$ задає потрібну A-гомотопію.

- Якщо $f \underset{A}{\sim} g$ і F – відповідна A-гомотопія, то визначимо $G\colon X \times I \to Y$ умовою $(x,s) \mapsto F(x,1-s)$. Воно неперервне як композиція неперервних відображень, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ для $x \in X$, $G(x,s) = F(x,1-s) = f_A(x) = f(x) = g(x)$ для $x \in A$, $s \in I$, тому G – A-гомотопія g і f. Отже, $g \underset{A}{\sim} f$.

- Нехай $f \underset{A}{\sim} g$, $g \underset{A}{\sim} h$. Зауважимо, що при цьому $h|_A = g|_A = f|_A = f_A$ за означенням A-гомотопності. Нехай F і G – відповідні A-гомотопії. Визначимо $H\colon X \times I \to Y$ умовою

$$H(x,s) := \left[\begin{array}{ll} F(x,2s), & s \in [0,\frac{1}{2}]; \\ G(x,2s-1), & s \in [\frac{1}{2},1]. \end{array}\right.$$

  Це відображення коректно визначене, бо при $s = \frac{1}{2}$ маємо $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ за умовою. Його неперервність випливає з неперервності F і G (аналогічно до неперервності добутку шляхів). При цьому $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ для $x \in X$ і $H(x,s) = f_A(x) = f(x) = h(x)$ для $x \in A$, $s \in I$ за властивостями F і G. Отже, H – A-гомотопія, тобто $f \underset{A}{\sim} h$.

■

Гомотопія F задає для кожного $s \in I$ відображення $f_s := F(\cdot,s)\colon X \to Y$ (тобто $f_s(x) = F(x,s)$ для $x \in X$), що є неперервним як композиція неперервних $x \mapsto (x,s)$ (перевірте, що таке відображення $X \to X \times I$ дійсно неперервне) і F. Тобто гомотопію можна розуміти як "неперервну сім'ю" відображень $\{f_s\}_{s\in I} \subset C(X,Y)$ або як "шлях" $I \to C(X,Y)\colon s \mapsto f_s$. При цьому за означенням $f_0 = f$ і $f_1 = g$, тобто цей "шлях" з'єднує f і g у $C(X,Y)$.

Виникає природне запитання: чи можна ввести топологію на $C(X,Y)$ так, щоб гомотопії дійсно були шляхами у цьому просторі? Відповідь міститься у наступній вправі (див. також детальні обговорення у [14, с. 105-112, 156-166], [24, с. 281-290] та главі 7 книги [19]):

Вправа 3.1.3. Нехай X та Y – топологічні простори. Для будь-яких компактної $K \subset X$ і відкритої $U \subset Y$ позначимо

$$W(K,U) \coloneqq \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

1. Показати що система $\{W(K,U)\}$ (для усіх пар K і U) є передбазою деякої топології на $C(X,Y)$. Вона зветься *компактно-відкритою*.

2. Показати, що якщо X компактний а Y метричний з метрикою ρ, то компактно-відкрита топологія на $C(X,Y)$ породжується метрикою *рівномірної збіжності*

   $$\sigma(f,g) \coloneqq \max_{x\in X} \{\rho(f(x), g(x))\}.$$

   Показати також, що збіжність послідовності відображень у цій метриці рівносильна рівномірній збіжності (у сенсі означення 2.6.3).

3. Показати, що якщо X локально компактний та хаусдорфовий, то шляхи у $C(X,Y)$ з компактно-відкритою топологією – це в точності відображення вигляду $s \mapsto F(\cdot, s)$, де F – деяка гомотопія.

З аналогічних міркувань випливає, що для кожної $x \in X$ відображення $I \to Y\colon s \mapsto F(x,s)$ неперервне, а отже є шляхом, що з'єднує точки $F(x,0) = f(x)$ і $F(x,1) = g(x)$. Зокрема, $f(x)$ і $g(x)$ повинні тоді лежати в одній компоненті лінійної зв'язності Y (за твердженням 2.15.3):

Наслідок 3.1.4. *Якщо $f, g\colon X \to Y$ гомотопні, то для будь-якої $x \in X$ її образи $f(x)$ і $g(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності Y.*

Приклад 3.1.5. Нехай $X = \{x\}$ – одноточковий простір. Будь-які відображення $f, g\colon X \to Y$ у довільний простір Y мають вигляд $f\colon x \mapsto f(x)$, $g\colon x \mapsto g(x)$ (і автоматично є неперервними як постійні). Якщо f і g гомотопні, то $f(x)$ і $g(x)$ можна з'єднати шляхом в Y за попереднім наслідком. Неважко побачити, що в даному випадку вірне й обернене: якщо $h\colon I \to Y$ – шлях, що з'єднує $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x,s) \coloneqq h(s)$ задає гомотопію f і g.

Приклад 3.1.6. Нехай $Y \subset \mathbb{R}^n$ – опукла підмножина. Тоді для будь-яких топологічного простору X, підмножини $A \subset X$ і відображень $f, g \in C(X,Y)$

таких, що $f|_A = g|_A$, маємо $f \underset{A}{\sim} g$. Дійсно, відображення $F\colon X \times I \to Y$, що визначене умовою $F(x,s) := (1-s)\,f(x) + s\,g(x)$ (тобто з'єднує $f(x)$ і $g(x)$ відрізками, пор. з прикладом 2.10.24) є тоді неперервним і задовольняє означенню A-гомотопії f і g.

Вправа 3.1.7. Показати, що те ж саме вірне для зірчатої $Y \subset \mathbb{R}^n$ і $A = \varnothing$ (тобто для вільних гомотопій).

Приклад 3.1.8. Нехай тепер $Y \subset S^n$ – відкрита напівсфера n-вимірної сфери для $n \geqslant 1$, тобто її перетин з відкритим напівпростором $\mathbb{R}^{n+1}$ відносно деякої гіперплощини, що проходить через початок координат (центр сфери), а простір X довільний. Аналогічно до попереднього прикладу можна показати, що тоді будь-які $f, g \in C(X,Y)$ є A-гомотопними (звичайно, якщо $f|_A = g|_A$). Гомотопія F при цьому будується за допомогою менших дуг великих кіл сфери (випишіть її явно, використовуючи формулу з прикладу 2.10.25).

Інколи розглядають гомотопії між відображеннями, що задовольняють деяким додатковим обмеженням, такі, що усі "проміжні" відображення f_s задовольняють тим же обмеженням. У цьому випадку гомотопію зазвичай називають *ізотопією.*

Приклад 3.1.9. *(Ручним) вузлом* називається регулярне вкладення кола S^1 у $\mathbb{R}^3$, тобто будь-яке ін'єктивне відображення $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$, координатні функції якого (від кутового параметра кола) належать до класу C^1, а вектор f' з їхніх похідних ненульовий у кожній точці. Зокрема, f є вкладенням в силу компактності кола і наслідку 2.7.22. *(Гладкою) ізотопією* вузлів f і g зветься їх гомотопія $F \in C^1(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$ така, що $f_s = F(\cdot, s)\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$ (де гладкість розуміємо як вище). Якщо існує ізотопія вузлів, вони називаються *ізотопними.* На рис. 3.1 зображені т. зв. *тривіальний вузол*, вузол, що ізотопний тривіальному, і вузол, що їм не ізотопний – *трилисник* (але доведення цієї неізотопності потребує спеціальних інваріантів). Детальніше див., наприклад, у [10, с. 213-239] та [20, с. 209-238].

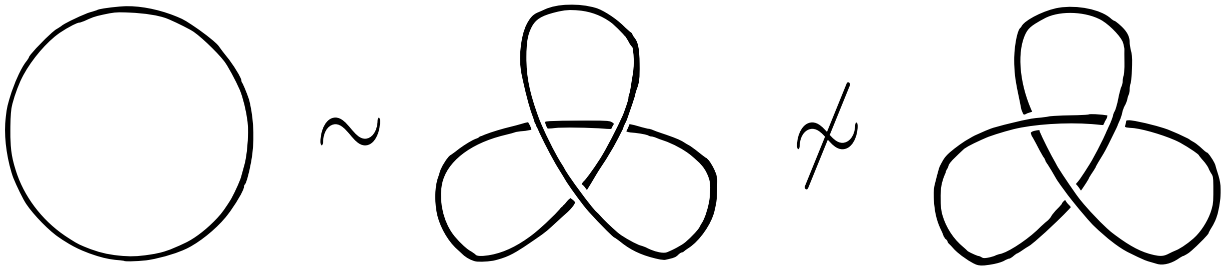


Рис. 3.1: Тривіальні вузли та трилисник

Розглянемо цікавий приклад застосування гомотопії до задачі продовження відображень (іншими прикладами цього класу топологічних задач є теорема 2.6.8 Тітце та вправа 3.2.10 далі). Нагадаємо, що межею стандартної замкненої кулі є стандартна сфера: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Твердження 3.1.10. *Нехай Y – топологічний простір і $n \geqslant 1$. Неперервне відображення $f\colon S^{n-1} \to Y$ продовжується до неперервного $\overline{f}\colon D^n \to Y$ (тобто $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$) тоді й тільки тоді, коли воно гомотопне постійному відображенню.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай відображення $f \in C(S^{n-1}, Y)$ продовжується до $\overline{f} \in C(D^n, Y)$. Виберемо $x_0 \in S^{n-1}$ і покладемо $F(x, s) := \overline{f}((1-s)\,x + s\,x_0)$. Таке $F\colon S^{n-1} \times I \to Y$ коректно визначене в силу опуклості D^n, неперервне як композиція неперервних, $F(\cdot, 0) = \overline{f}|_{S^{n-1}} = f$ і $F(\cdot, 1) = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$ – постійне відображення. Тобто F і буде потрібною гомотопією.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай існує гомотопія F відображення f і постійного відображення S^{n-1} у точку $y_0 \in Y$. Побудуємо $\overline{f}\colon D^n \to Y$ наступним чином:

$$\overline{f}(x) := \left[\begin{array}{ll} y_0, & |x| \in [0, \frac{1}{2}]; \\ F\left(\frac{x}{|x|}, 2 - 2|x|\right), & |x| \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $\overline{f}$ коректно визначене і неперервне, оскільки при $|x| = \frac{1}{2}$ маємо $F\left(\frac{x}{|x|}, 1\right) = y_0$. При цьому для $|x| = 1$ (тобто $x \in S^{n-1}$) за побудовою $\overline{f}(x) = F(x, 0) = f(x)$. Таким чином, $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$.

■

3.2 Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність

Відношення еквівалентності між топологічними просторами не обмежуються гомеоморфністю. Розглянемо більш загальне відношення, що є основним саме для алгебраїчної топології.

Означення 3.2.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Неперервні відображення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$ звуться *гомотопічно оберненими* одне до одного, якщо $g \circ f \sim id_X$ і $f \circ g \sim id_Y$. Якщо такі f і g існують, то X та Y називають *гомотопічно еквівалентними* й пишуть $X \sim Y$.

Лема 3.2.2. *Нехай $f_0, f_1\colon X \to Y$, $g_0, g_1\colon Y \to Z$ – неперервні відображення топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ – такі підмножини, що $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, і $f_0 \underset{A}{\sim} f_1$, $g_0 \underset{B}{\sim} g_1$. Тоді $g_0 \circ f_0 \underset{A}{\sim} g_1 \circ f_1$.*

Доведення. З умови випливає, що $f_0|_A = f_1|_A$ і $g_0|_B = g_1|_B$, тому $(g_0 \circ f_0)|_A = (g_1 \circ f_1)|_A$. Якщо F – A-гомотопія f_0 і f_1, а G – B-гомотопія g_0 і g_1, то $H(x,s) \coloneqq G(F(x,s),s)$ визначає A-гомотопію $g_0 \circ f_0$ і $g_1 \circ f_1$. Дійсно, це неперервне відображення $X \times I \to Z$ як композиція неперервних, $H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x))$ та аналогічно для $s = 1$, і $H(x,s) = G(F(x,s),s) = G(f_0(x),s) = g_0(f_0(x)) = g_1(f_1(x))$ для $x \in A$ та довільного $s \in I$, бо $f_0(x) \in B$.

■

Твердження 3.2.3. *Гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо аксіоми еквівалентності.

- $X \sim X$ для будь-якого простору X: достатньо взяти $f = g = id_X$.
- Умови $X \sim Y$ та $Y \sim X$ еквівалентні за означенням (воно симетричне відносно X та Y).
- Покажемо тепер транзитивність. Нехай $X \sim Y$ та $Y \sim Z$, тобто існують $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$, $h \in C(Y,Z)$ і $k \in C(Z,Y)$ такі, що $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_Z$ і $k \circ h \sim id_Y$. Тоді $h \circ f \in C(X,Z)$ і $g \circ k \in C(Z,X)$ гомотопічно обернені:

  $$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ id_Y \circ k = h \circ k \sim id_Z,$$

  $$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X,$$

  де перші гомотопності в кожному рядку випливають з умови та попередньої леми для випадку вільних гомотопій (застосованої двічі, до кожної з композицій). Таким чином, $X \sim Z$.

■

Приклад 3.2.4. Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм, то f і f^{-1} неперервні та гомотопічно обернені (бо вони просто обернені). Отже, гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні.

Приклад 3.2.5. Простір $\mathbb{R}^n$ гомотопічно еквівалентний одноточковому простору $\{y\}$. Дійсно, вибір відображень тут невеликий: нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \{y\}$ переводить всі точки $\mathbb{R}^n$ в y, а $g\colon \{y\} \to \mathbb{R}^n$ переводить y в якусь $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обидва ці відображення постійні, а отже неперервні. Тоді $f \circ g = id_{\{y\}}$ і $(g \circ f)(x) = x_0$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$. З прикладу 3.1.6 випливає, що постійне відображення $g \circ f$ опуклої $\mathbb{R}^n$ в себе гомотопне $id_{\mathbb{R}^n}$ (а $F(x,s) = (1-s)\,x_0 + s\,x$ задає потрібну гомотопію). Отже, f і g гомотопічно обернені. Також зауважимо, що в силу транзитивності тоді $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Далі цей приклад узагальнимо у прикладі 3.2.13.

Вправа 3.2.6. Показати, що з $X \sim Y$ і $Z \sim W$ випливає $X \times Z \sim Y \times W$. Так, в силу попереднього прикладу, циліндр гомотопічно еквівалентний колу: $S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1 \times \{y\} \cong S^1$.

Ці приклади демонструють, зокрема, що гомотопічна еквівалентність – це слабше за гомеоморфність відношення еквівалентності: класи гомотопічної еквівалентності, взагалі кажучи, ширші. Вона не зберігає компактність і навіть потужність множини (але зберігає зв'язність та лінійну зв'язність, див. наступну вправу). Далі ми наведемо ще декілька прикладів гомотопічних еквівалентностей, що пов'язані з поняттям ретракції.

Вправа 3.2.7. Показати, що якщо $X \sim Y$ і простір X зв'язний (відповідно, лінійно зв'язний), то й простір Y (лінійно) зв'язний. Більш того, у загальному випадку гомотопічно еквівалентні X та Y мають однакові кількості компонент зв'язності та лінійної зв'язності відповідно. Чи вірні аналогічні твердження для властивостей локальних зв'язності та лінійної зв'язності?

Означення 3.2.8. *Ретракцією* топологічного простору X на його підмножину $A \subset X$ зветься будь-яке неперервне відображення $f\colon X \to A$ таке, що $f|_A = id_A$, тобто $f(x) = x$ для будь-якої $x \in A$. Множину A у цьому випадку звуть *ретрактом* X.

Приклад 3.2.9. Будь-яка одноточкова підмножина $\{x\} \subset X$ будь-якого простору є його ретрактом: відповідною ретракцією є постійне відображення у x.

Вправа 3.2.10. Показати, що $A \subset X$ є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли будь-яке неперервне відображення $g\colon A \to Y$ можна продовжити до неперервного $\overline{g}\colon X \to Y$.

Означення 3.2.11. Ретракція простору X на підмножину $A \subset X$ зветься *деформаційною* (відповідно, *строгою деформаційною*), якщо вона гомотопна (A-гомотопна) тотожному відображенню id_X. У цьому випадку A називають *(строгим) деформаційним ретрактом* X.

Тут, коли йдеться про гомотопність ретракції $f\colon X \to A$ і тотожного $id_X\colon X \to X$, фактично мається на увазі не f, а його композиція з включенням $i\colon A \to X$.

Твердження 3.2.12. *Якщо $A \subset X$ – деформаційний ретракт топологічного простору X, то $X \sim A$.*

Доведення. Дійсно, нехай $f\colon X \to A$ – деформаційна ретракція, а $i\colon A \to X$ – відображення включення. Тоді $f \circ i = id_A$ та $i \circ f \sim id_X$ за умовою (див. попереднє зауваження). Отже, ці відображення гомотопічно обернені, тому маємо $X \sim A$.

■

Приклад 3.2.13. Всі ретракти будь-якої опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$, зокрема, всі одноточкові підмножини $\{x\} \subset X$, є строгими деформаційними. Дійсно, якщо A – ретракт X, то відповідна ретракція f та id_X збігаються на A (обидва дорівнюють id_A), а тому A-гомотопні за прикладом 3.1.6. Аналогічно, всі ретракти будь-якої зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$ є деформаційними в силу вправи 3.1.7. Тоді з попереднього твердження випливає, що, зокрема, $X \sim \{x\}$ для будь-якої зірчатої (зокрема опуклої) $X \subset \mathbb{R}^n$ і кожної $x \in X$.

Приклад 3.2.14. Аналогічно до попереднього прикладу, всі ретракти будь-якої відкритої напівсфери S^n для $n \geqslant 1$ є строгими деформаційними в силу прикладу 3.1.8. Зокрема, така напівсфера гомотопічно еквівалентна кожній своїй точці.

Приклад 3.2.15. Сфера S^{n-1} є строгим деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (тут $n \geqslant 1$). Дійсно, $f(x) := \frac{x}{|x|}$, очевидно, визначає ретракцію. При цьому $F(x,s) := (1-s)\frac{x}{|x|} + s\,x$ задає неперервне відображення $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (бо відрізок $[\frac{x}{|x|}, x]$ не проходить через 0), $F(\cdot,0) = f$, $F(\cdot,1) = id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ і $F(x,s) = x$ для будь-яких $x \in S^{n-1}$, $s \in I$. Отже, F є S^{n-1}-гомотопією, тому ретракція f – строга деформаційна. Зокрема, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ за попереднім твердженням. Інший спосіб це побачити – використати вправу 3.2.6: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, як пам'ятаємо, гомеоморфний $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (ми використовували цей факт у прикладі 2.10.29), що, у свою чергу, гомотопічно еквівалентний $S^{n-1} \times \{y\} \cong S^{n-1}$.

Означення 3.2.16. Топологічний простір X зветься *стяжним*, якщо він гомотопічно еквівалентний одноточковому простору: $X \sim \{y\}$.

Твердження 3.2.17. *Топологічний простір X стяжний тоді й тільки тоді, коли існує точка $x_0 \in X$ така, що $\{x_0\}$ – деформаційний ретракт X.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай X стяжний, тобто існують гомотопічно обернені $f\colon X \to \{y\}$ і $g\colon \{y\} \to X$. Це постійні відображення (пор. з прикладом 3.2.5), зокрема, g переводить y у якусь $x_0 \in X$. Тоді $g \circ f\colon x \mapsto x_0$ – ретракція X на $\{x_0\}$, і $g \circ f \sim id_X$ за умовою, тобто ця ретракція деформаційна.

$\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут випливає з твердження 3.2.12.

■

Насправді в якості x_0 можна використати будь-яку точку X (перевірте; це випливає з наступного твердження і того, що будь-які два постійні відображення у лінійно зв'язний простір гомотопні за прикладом 3.1.5). З прикладів 3.2.13 та 3.2.14 випливає, що зірчаті (зокрема опуклі) підмножини $\mathbb{R}^n$ та відкриті напівсфери S^n (при $n \geqslant 1$) стяжні. Іншим прикладом стяжного простору є скінченне (зв'язне) *дерево*, яке можна побудувати, послідовно склеюючи відрізки кінцями. Наступне твердження легко виводиться з вправи 3.2.7, але ми доведемо його безпосередньо.

Твердження 3.2.18. *Будь-який стяжний топологічний простір є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай X стяжний. З попереднього твердження випливає, що ретракція f на деяку $\{x_0\} \subset X$ гомотопна id_X. В силу наслідку 3.1.4, тоді для будь-якої $x \in X$ точки $x_0 = f(x)$ та $x = id_X(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X. Це й означає, що цей простір лінійно зв'язний.

■

3.3 Гомотопії шляхів

Наступна вправа демонструє, що поняття гомотопності шляхів у топологічному просторі є не дуже змістовним без додаткових обмежень. Це мотивує наступне за цією вправою означення.

Вправа 3.3.1. Показати, що шляхи $f, g\colon I \to X$ у топологічному просторі X гомотопні (вільно, тобто у сенсі означення 3.1.1 при $A = \varnothing$) тоді й тільки тоді, коли $f(I)$ та $g(I)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X.

Означення 3.3.2. Шляхи f і g у топологічному просторі X зі спільними початком та кінцем ($f(0) = g(0)$ і $f(1) = g(1)$) будемо називати *гомотопними*, якщо вони $\{0, 1\}$-гомотопні. Класи еквівалентності шляхів відносно цього відношення еквівалентності (тобто $\{0, 1\}$-гомотопності) звуться їх *гомотопічними класами*.

Тобто f і g гомотопні, якщо існує $\{0, 1\}$-гомотопія (або *гомотопія з закріпленими кінцями*) – відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = f(0) = g(0)$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, для кожного s відображення $f_s = F(\cdot, s)$ (див. обговорення після твердження 3.1.2) теж буде шляхом з тими ж початком та кінцем, що f і g. Нагадаємо, що $\{0, 1\}$-гомотопність є відношенням еквівалентності в силу твердження 3.1.2. У подальшому гомотопність шляхів будемо завжди розуміти саме в сенсі цього нового означення, при цьому писатимемо просто $f \sim g$, а описану вище $\{0, 1\}$-гомотопію F будемо називати *гомотопією шляхів* f і g. Гомотопічний клас шляху f позначатимемо через $[f]$ (тобто $[f] = [g]$ означає, що $f \sim g$).

Приклад 3.3.3. З прикладу 3.1.6 випливає, що у опуклій підмножині $X \subset \mathbb{R}^n$ будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні (це вірно й для зірчатої X, і взагалі для будь-якого стяжного простору, як покажемо далі у твердженні 3.6.2).

Приклад 3.3.4. Аналогічно, будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем у відкритій напівсфері S^n для $n \geqslant 1$ гомотопні за прикладом 3.1.8 (звичайно, така напівсфера теж стяжна).

Лема 3.3.5. *Нехай* $f_0, f_1, g_0, g_1 \colon I \to X$ *– шляхи у просторі* X*, причому* $f_0(0) = f_1(0) = x$*,* $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0) = y$*,* $g_0(1) = g_1(1) = z$*. Якщо* $f_0 \sim f_1$ *і* $g_0 \sim g_1$*, то* $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$*.*

Доведення. Нехай F, G – гомотопії f_0 і f_1, g_0 і g_1 відповідно. Визначимо відображення $H \colon I \times I \to X$ умовою

$$H(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} F(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1}{2}$ маємо $F(1,s) = y = G(0,s)$ для будь-якого $s \in I$ за умовою. При цьому $H(\cdot,0) = f_0 * g_0$, $H(\cdot,1) = f_1 * g_1$, $H(0,\cdot) = F(0,\cdot) = x$ і $H(1,\cdot) = G(1,\cdot) = z$. Отже, H – гомотопія шляхів $f_0 * g_0$ і $f_1 * g_1$.

■

Нагадаємо, що у загальному випадку $(f * g) * h \neq f * (g * h)$, тобто добуток шляхів неасоціативний. Але він є таким "у гомотопічному сенсі", як демонструє наступна лема.

Лема 3.3.6. *Нехай* $f, g, h \colon I \to X$ *– шляхи у просторі* X *такі, що* $f(1) = g(0) = y$*,* $g(1) = h(0) = z$*. Тоді* $(f * g) * h \sim f * (g * h)$*.*

Доведення. За означенням добутку шляхів маємо

$$((f*g)*h)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ g(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Аналогічно,

$$(f*(g*h))(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ h(4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{array} \right.$$

Визначимо відображення $F \colon I \times I \to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{4}]; \\ g(4t-s-1), & t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]; \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t \in [\frac{s+2}{4}, 1]. \end{array} \right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{4}$ і $t = \frac{s+2}{4}$ маємо $f(1) = y = g(0)$ і $g(1) = z = h(0)$ відповідно. Крім того, $F(\cdot,0) = (f*g)*h$, $F(\cdot,1) = f*(g*h)$, $F(0,\cdot) = f(0)$, $F(1,\cdot) = h(1)$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зокрема, звідси випливає, що для гомотопічних класів шляхів можна писати $[f*g*h]$, не розставляючи дужки (замість $[(f*g)*h] = [f*(g*h)]$). За індукцією отримуємо, що це так і для довільної скінченної кількості шляхів.

Лема 3.3.7. *Нехай* $f\colon I \to X$ *– шлях у просторі* X *з початком* $f(0) = x$ *та кінцем* $f(1) = y$. *Тоді* $e_x * f \sim f \sim f * e_y$.

Доведення. Нагадаємо, що постійний шлях e_x – це просто постійне відображення I в точку x. Доведемо другу гомотопність, перша доводиться аналогічно (зробіть це). За означенням добутку шляхів:

$$(f * e_y)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Визначимо відображення $F\colon I \times I \to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{s+1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{2}$ маємо $f(1) = y$, і $F(\cdot, 0) = f * e_y$, $F(\cdot, 1) = f$, $F(0, \cdot) = f(0) = x$, $F(1, \cdot) = y$. Таким чином, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Лема 3.3.8. *Нехай* $f\colon I \to X$ *– шлях у просторі* X *з початком* $f(0) = x$ *та кінцем* $f(1) = y$. *Тоді* $f * \overline{f} \sim e_x$ *і* $\overline{f} * f \sim e_y$.

Доведення. Згадаймо, що обернений шлях $\overline{f}$ визначений умовою $\overline{f}(t) = f(1-t)$. Зауважимо, що друга гомотопність випливає з першої (просто поміняємо f та $\overline{f}$ місцями і помітимо, що $\overline{\overline{f}} = f$), отже достатньо довести першу. За означенням добутку:

$$(f * \overline{f})(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Визначимо відображення $F\colon I \times I \to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1-s), & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{2}$ і $t = \frac{1+s}{2}$ маємо одне й те саме значення $f(1-s)$. При цьому $F(\cdot, 0) = f * \overline{f}$, $F(\cdot, 1) = e_x$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = f(0) = x$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Деяке уявлення про логіку побудови гомотопій в цих лемах дають діаграми на рис. 3.2, де область визначення $I \times I$ розділена на частини, кожна з яких позначена символом відображення, що "відповідає" за гомотопію на цій підмножині.

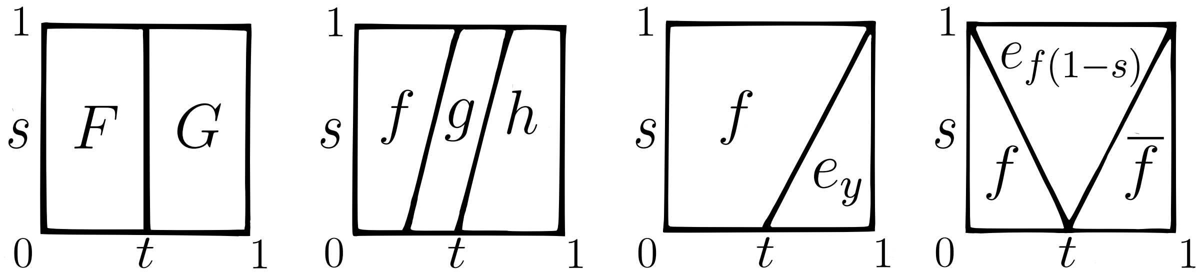


Рис. 3.2: Побудова гомотопій у доведеннях лем про добуток шляхів

3.4 Фундаментальна група

Тут нам будуть необхідні деякі відомості з теорії груп, які можна знайти у доповненні. Крім означення та прикладів груп, що вже використовувалися у цьому курсі, це поняття гомоморфізма та ізоморфізма (означення А.8 та А.10 відповідно). У цьому та інших параграфах, що присвячені фундаментальній групі, будуть вживатися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення. Як і у доповненні, $G \simeq H$ означатиме ізоморфність груп G і H.

Означення 3.4.1. Нехай X – топологічний простір. *Петлею* (або *замкненим шляхом*) у точці $x \in X$ зветься шлях $f\colon I \to X$ з початком та кінцем у x: $f(0) = f(1) = x$.

Теорема 3.4.2 (Конструкція фундаментальної групи)**.** *Гомотопічні класи петель у точці x топологічного простору X з операцією $[f][g] := [f * g]$ утворюють групу.*

Доведення. Перш за все, зауважимо, що для петель f і g у x добуток $f * g$ визначений і теж є петлею у x, тому можна говорити про його клас $[f * g]$. Переконаємося тепер у коректності введеної операції. Дійсно, якщо $[f_0] = [f_1]$ і $[g_0] = [g_1]$, то $[f_0 * g_0] = [f_1 * g_1]$ за лемою 3.3.5. Асоціативність операції випливає з леми 3.3.6:

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f][g * h] = [f]([g][h])$$

для будь-яких гомотопічних класів петель $[f]$, $[g]$ і $[h]$. З леми 3.3.7 маємо, що $[f][e_x] = [e_x][f] = [f]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[e_x]$ є нейтральним елементом (одиницею групи). Нарешті, з леми 3.3.8 випливає, що $[f][\overline{f}] = [\overline{f}][f] = [e_x]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[\overline{f}]$ є елементом, що обернений до $[f]$: $[f]^{-1} = [\overline{f}]$. Разом це й означає, що гомотопічні класи $[f]$ з даною операцією утворюють групу.

■

Означення 3.4.3. Група, що описана в теоремі 3.4.2, зветься *фундаментальною групою* (або *першою гомотопічною групою*) простору X у точці x. Її позначають через $\pi_1(X, x)$:

$$\pi_1(X, x) = \{[f] \mid f \in C(I, X) \colon f(0) = f(1) = x\}.$$

Аналогічно до фундаментальної групи можна розглянути *n-ту гомотопічну групу* $\pi_n(X, x)$ простору X у x для довільного натурального n. Це множина гомотопічних класів *n-вимірних сфероїдів*, тобто неперервних відображень n-вимірного куба I^n в X таких, що межа ∂I^n переходить у x (відносно ∂I^n-гомотопій). Детальніше про ці групи, зокрема, як визначається групова операція і чому $\pi_n(X, x)$ виявляється абелевою при $n \geqslant 2$, можна дізнатися у главі 4 книги [17]. Через $\pi_0(X, x)$ (або просто $\pi_0(X)$) зазвичай позначають множину компонент лінійної зв'язності простору X, на якій структура групи не вводиться. Замість відображень з I^n у простір можна розглядати відображення зі сфери S^n аналогічно до наступної вправи:

Вправа 3.4.4. Нехай f – петля в x. Оскільки $f(0) = f(1) = x$, це відображення факторизується у неперервне $\widehat{f} \coloneqq f/_{\sim} \colon I/_{\{0,1\}} \to X$, де $I/_{\{0,1\}}$ можна ототожнити з S^1 (згадаймо приклад 2.2.12). І навпаки, для будь-якого неперервного $\widehat{f} \colon S^1 \to X$, що переводить точку $1 = e^0 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ у x, відображення $f \colon I \to X : t \mapsto \widehat{f}(e^{2\pi i t})$ є петлею в x. Показати, що тоді $\{1\}$-гомотопним відображенням кола відповідають гомотопні шляхи, тобто множина гомотопічних класів таких відображень (відносно $\{1\}$-гомотопії) таким чином ототожнюється з $\pi_1(X, x)$, більш того, це ототожнення можна перетворити на ізоморфізм груп. Для цього, звичайно, доведеться визначити добуток класів відображень $S^1 \to X$. Таким чином, отримуємо альтернативний опис фундаментальної групи.

Приклад 3.4.5. Фундаментальна група одноточкового простору, очевидно, тривіальна: $\pi_1(\{x\}, x) = \{[e_x]\}$.

Приклад 3.4.6. Для опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якої $x \in X$ кожна петля f у x гомотопна постійній в силу прикладу 3.3.3: $[f] = [e_x]$. Тому фундаментальна група також тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$.

Твердження 3.4.7. *Нехай точки x та y топологічного простору X з'єднані шляхом $h \colon I \to X$. Тоді відображення фундаментальних груп*

$$\alpha \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) \colon [f] \mapsto [\overline{h} * f * h]$$

коректно визначене та є ізоморфізмом груп.

Доведення. Зауважимо, що для будь-якого класу $[f] \in \pi_1(X, x)$ петля f починається і закінчується в x, тому визначений добуток $(\overline{h} * f) * h$, що починається і закінчується в y, а отже його клас $[\overline{h} * f * h]$ належить до $\pi_1(X, y)$.

Перевіримо коректність визначення α: якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то з леми 3.3.5 (застосованої двічі) випливає, що $(\overline{h} * f_0) * h \sim (\overline{h} * f_1) * h$, тобто $[\overline{h} * f_0 * h] = [\overline{h} * f_1 * h]$.

Покажемо тепер, що α – гомоморфізм груп. Для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\alpha([f][g]) = \alpha([f * g]) = [\overline{h} * f * g * h] = [\overline{h} * f * e_x * g * h] =$$
$$= [\overline{h} * f * h * \overline{h} * g * h] = [\overline{h} * f * h][\overline{h} * g * h] = \alpha([f])\, \alpha([g]),$$

де третя рівність випливає з лем 3.3.5 і 3.3.7, а четверта – з лем 3.3.5 і 3.3.8 (і, звичайно, ми постійно використовуємо лему 3.3.6, записуючи гомотопічні класи добутків без розставляння дужок).

Розглянемо відображення

$$\beta\colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)\colon [f] \mapsto [h * f * \overline{h}].$$

Це теж коректно визначений гомоморфізм груп, що перевіряється аналогічно до α. Покажемо, що α і β взаємно обернені. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\beta(\alpha([f])) = [h * \overline{h} * f * h * \overline{h}] = [e_x * f * e_x] = [f],$$

де теж використали усі перелічені вище леми (як саме?). Таким чином, $\beta \circ \alpha = id_{\pi_1(X,x)}$. Аналогічно встановлюємо, що $\alpha \circ \beta = id_{\pi_1(X,y)}$. Це означає, що α і β дійсно взаємно обернені, тому вони є біекціями, а отже ізоморфізмами груп.

∎

Наслідок 3.4.8. *Якщо топологічний простір X лінійно зв'язний, то фундаментальні групи у будь-яких двох точках X ізоморфні: $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ для будь-яких $x, y \in X$.*

Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору не залежить від точки з точністю до ізоморфізма. Тому для такого простору X часто позначають через $\pi_1(X)$ єдиний клас еквівалентності (ізоморфності) його фундаментальних груп, і говорять про нього просто як про *фундаментальну групу* X. Наприклад, кажуть, що фундаментальна група опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ тривіальна (в силу прикладу 3.4.6): $\pi_1(X) = \{e\}$. Зауважимо також, що α з твердження 3.4.7, взагалі кажучи, залежить від h. Аналогічним чином використовують позначення $\pi_n(X)$ для вищих гомотопічних груп лінійно зв'язного простору X (див. зауваження після означення 3.4.3), для яких теж виконується аналог попереднього наслідку.

Вправа 3.4.9. Показати, що α не змінюється при заміні h в межах гомотопічного класу (тобто на $\widetilde{h} \sim h$). Показати також, що α взагалі не залежить від h тоді й тільки тоді, коли група $\pi_1(X, x)$ абелева (тобто $[f][g] = [g][f]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$).

Існує цікавий клас топологічних просторів, для яких фундаментальні групи завжди абелеві:

Приклад 3.4.10. *Топологічною групою* зветься множина G зі структурами групи та топологічного простору, що узгоджені у наступному сенсі: *відображення добутку* $\mu\colon G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$ та *відображення взяття оберненого елемента* $\iota\colon G \to G\colon a \mapsto a^{-1}$ є неперервними (де $G \times G$ розглядається з топологією прямого добутку). Прикладами топологічних груп є простір $\mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів, коло $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ з операцією комплексного добутку, тори $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зі структурами прямого добутку груп (див. означення A.12) і топологічних просторів, матричні групи $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ та $\mathrm{O}(1, 1)$ з топологіями, що описані у прикладі 2.15.5, вправах 2.15.6 і 2.15.7, а також матрична група $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ з прикладу 2.4.5, топологія на якій вводиться аналогічним чином (як саме?) та її комплексний аналог $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Перевірте, що вони всі дійсно є топологічними групами. Детальніше з топологічними групами та їхніми загальнотопологічними властивостями можна ознайомитися, наприклад, за доповненням 5 до книги [23].

Вправа 3.4.11. Показати, що для будь-якої топологічної групи G і для кожного її елемента $a \in G$ фундаментальна група $\pi_1(G, a)$ абелева. Тут можна використати критерій абелевості, що наведений у вправі 3.4.9, або діяти наступним чином. Помітимо, що для будь-яких петель $f, g\colon I \to G$ у точці $e \in G$ (одиниці цієї групи) їхній "груповий добуток", тобто відображення $f \odot g\colon I \to G\colon t \mapsto f(t)g(t)$, теж буде петлею у e в силу неперервності групової операції G (чому?). Таким чином, на множині $\Omega(G, e)$ таких петель виникає бінарна операція

$$\odot\colon \Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \to \Omega(G, e)\colon (f, g) \mapsto f \odot g.$$

Показати, що ця операція перетворює $\Omega(G, e)$ на групу і що вона коректно "факторизується" у операцію

$$\odot\colon \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)\colon ([f], [g]) \mapsto [f \odot g].$$

Показати, що ця операція збігається з груповою операцією $\pi_1(G, e)$, тобто $[f] \odot [g] = [f][g]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(G, e)$, і є комутативною, що й демонструє абелевість $\pi_1(G, e)$. Для цього можна розглянути шлях $(f * e_e) \odot (e_e * g)$ для довільних $f, g \in \Omega(G, e)$. Нарешті, показати, що усі фундаментальні групи топологічної групи ізоморфні навіть якщо вона не є лінійно зв'язною. Для цього можуть знадобитися техніка і результати наступного параграфа та відображення *лівого зсуву* на довільний елемент $a \in G$, що діє множенням на цей елемент зліва: $L_a\colon G \to G\colon b \mapsto ab$. Воно, зокрема, є гомеоморфізмом G на себе (чому?).

3.5 Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи

Перевіримо тепер, що фундаментальна група – дійсно інваріант: гомотопічний (значення цього терміна пояснюється у зауваженні після наслідку 3.5.4), а отже й топологічний. Для цього знадобиться поняття індукованого гомоморфізма, що важливе й саме по собі.

Твердження 3.5.1 (Конструкція індукованого гомоморфізма)**.** *Нехай X та Y – топологічні простори, $\varphi\colon X \to Y$ – неперервне відображення, $x \in X$ – довільна точка. Тоді відображення*

$$\varphi_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))\colon [f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

коректно визначене і має наступні властивості:

1. *φ_* – гомоморфізм груп.*
2. *$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ для будь-яких неперервних $\varphi\colon X \to Y$ і $\psi\colon Y \to Z$.*
3. *$(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}$.*
4. *Якщо відображення $\varphi, \psi\colon X \to Y$ гомотопні, F – їхня гомотопія, а $\alpha\colon \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(Y, \psi(x))$ – ізоморфізм, що побудований з використанням шляху $t \mapsto F(x, t)$ як у твердженні 3.4.7, то $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$.*

Доведення. Якщо $f\colon I \to X$ – петля в x, то з $f(0) = f(1) = x$ випливає $(\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x)$. Тому відображення $\varphi \circ f\colon I \to Y$, що неперервне як композиція неперервних, є петлею в $\varphi(x)$. Крім того, якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ за лемою 3.2.2 (для гомотопії шляхів f_0 і f_1 та тривіальної гомотопії), тому $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1]$. Отже, φ_* визначене коректно. Перевіримо заявлені властивості.

1. Для будь-яких гомотопічних класів петель $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо за означеннями

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([f * g]) = [\varphi \circ (f * g)] =$$

$$= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\, \varphi_*([g]),$$

тобто φ_* – дійсно гомоморфізм.

2. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$:

$$\psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = (\psi \circ \varphi)_*([f])$$

з означень.

<u>3.</u> Це так, бо $(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]$ для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$.

<u>4.</u> Іншими словами, нам потрібно показати, що діаграма з груп та їхніх гомоморфізмів

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, \varphi(x)) \arrow[dd, "\alpha"] \\
\pi_1(X, x) \arrow[ur, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, \psi(x))
\end{tikzcd}$$

комутативна (див. пояснення про комутативні діаграми після означення 2.2.6). Отже, нехай F – гомотопія φ і ψ: $F(\cdot, 0) = \varphi$, $F(\cdot, 1) = \psi$. Позначимо шлях з умови через $h\colon I \to Y : t \mapsto F(x, t)$. Він з'єднує $F(x, 0) = \varphi(x)$ і $F(x, 1) = \psi(x)$. Тоді, згідно з побудовою у твердженні 3.4.7, для довільного $[f] \in \pi_1(X, x)$ будемо мати $\alpha(\varphi_*([f])) = [\overline{h} * (\varphi \circ f) * h]$. Нам треба довести, що цей гомотопічний клас дорівнює $\psi_*([f]) = [\psi \circ f]$, тобто побудувати гомотопію петель $(\overline{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $\psi \circ f$ у $\psi(x)$. За означеннями оберненого шляху і добутку шляхів, для кожного $t \in I$ маємо

$$((\overline{h} * (\varphi \circ f)) * h)(t) = \left[\begin{array}{ll} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \varphi(f(4t - 1)), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Визначимо відображення $H\colon I \times I \to X$ умовою

$$H(t, s) := \left[\begin{array}{ll} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1-s}{4}]; \\ F(f\left(\frac{4t+s-1}{3s+1}\right), s), & t \in [\frac{1-s}{4}, \frac{1+s}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

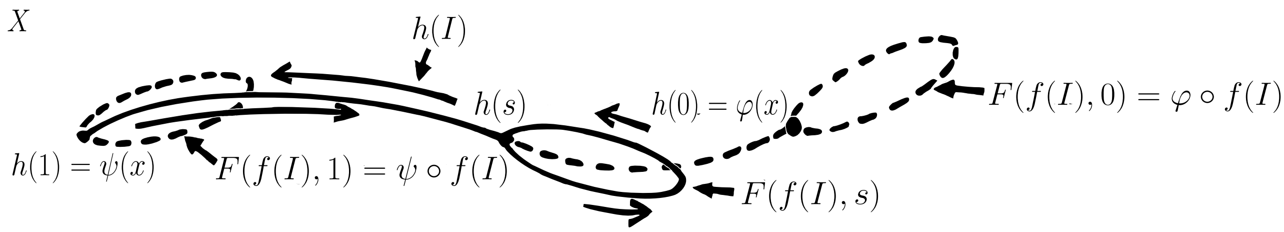


Рис. 3.3: Побудова гомотопії у доведенні властивості зв'язку між індукованими гомоморфізмами гомотопних відображень

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{4}$ маємо вірну рівність $F(x, s) = F(f(0), s)$, а при $t = \frac{1+s}{2}$ – $F(x, s) = F(f(1), s)$. При цьому $H(0, s) = H(1, s) = F(x, 1) = \psi(x)$ для будь-якого $s \in I$, отже

H дійсно є потрібною нам гомотопією петель $H(\cdot, 0) = (\overline{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $H(\cdot, 1) = \psi \circ f$. Ідея її побудови полягає у наступному: для кожного s ми проходимо уздовж h від точки $\psi(x) = h(1)$ до $h(s) = F(x, s)$, далі уздовж петлі $t \mapsto F(f(t), s)$ у точці $F(x, s)$ і назад у $\psi(x)$ уздовж h, як показано на рис. 3.3.

■

Означення 3.5.2. Відображення φ_* з попереднього твердження будемо називати гомоморфізмом фундаментальних груп, що *індукований* відображенням φ (у точці x).

Звичайно, φ_* залежить не тільки від φ, а й від точки x, але її зазвичай не вказують явно у позначенні, що може привести до певних незручностей.

Твердження 3.5.3. *Нехай $\varphi\colon X \to Y$ і $\psi\colon Y \to X$ – гомотопічно обернені відображення топологічних просторів. Тоді*

- $\varphi_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ – *ізоморфізм груп для будь-якої $x \in X$;*

- $\psi_*\colon \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, \psi(y))$ – *ізоморфізм груп для будь-якої $y \in Y$.*

Доведення.

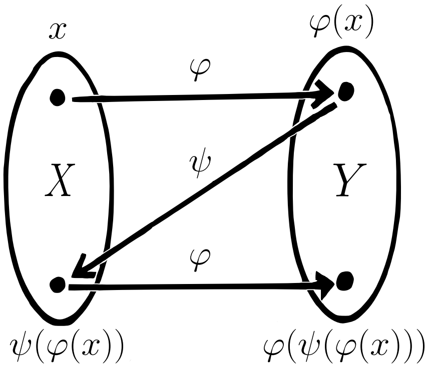


Рис. 3.4: Відповідності між точками у доведенні гомотопічної інваріантності

Те, що це гомоморфізми, вже доведено у пункті 1. попереднього твердження. Залишилося довести їх бієктивність. Фіксуємо якусь довільну $x \in X$, і далі розглядаємо такі індуковані гомоморфізми (див. рис. 3.4):

$$\begin{aligned} \varphi_*\colon &\quad \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x)), \\ \psi_*\colon &\quad \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(x))), \\ \varphi'_*\colon &\quad \pi_1(X, \psi(\varphi(x))) \to \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x)))), \end{aligned}$$

де штрих нам знадобився саме для компенсації відсутності базової точки у позначенні.

З умови гомотопічної оберненості $\psi \circ \varphi \sim id_X$ маємо

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = \alpha \circ (id_X)_* = \alpha \circ id_{\pi_1(X,x)} = \alpha,$$

де перші три рівності випливають з пунктів 2., 4. і 3. попереднього твердження відповідно, а α – деякий ізоморфізм $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$. Зокрема, звідси випливає, що гомоморфізм ψ_* сюр'єктивний. Дійсно, для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$

$$[f] = \alpha(\alpha^{-1}([f])) = \psi_*(\varphi_*(\alpha^{-1}([f]))) \in \psi_*(\pi_1(Y, \varphi(x))).$$

Аналогічним чином з $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ отримуємо, що $\varphi'_* \circ \psi_* = \beta$ для деякого ізоморфізма $\beta\colon \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))$ (перевірте це). У свою чергу, з цього випливає ін'єктивність ψ_*. Дійсно, нехай $\psi_*([f]) = \psi_*([g])$ для деяких $[f], [g] \in \pi_1(Y, \varphi(x))$. Тоді

$$\beta([f]) = \varphi'_*(\psi_*([f])) = \varphi'_*(\psi_*([g])) = \beta([g]),$$

й тому $[f] = [g]$. Отже ψ_* – бієкція, а тоді й $\varphi_* = (\psi_*)^{-1} \circ \alpha$ теж. Аналогічно доведемо друге твердження, починаючи з $y \in Y$ (або просто використаємо симетричність гомотопічної еквівалентності).

■

Наслідок 3.5.4. *Якщо лінійно зв'язні топологічні простори X та Y гомотопічно еквівалентні, то $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, y)$ для будь-яких точок $x \in X$ та $y \in Y$.*

Доведення. Випливає з попереднього твердження та наслідку 3.4.8.

■

У позначеннях, що введені в зауваженні після наслідку 3.4.8, це виглядатиме як $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ для лінійно зв'язних гомотопічно еквівалентних X та Y (або просто $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$, бо це класи ізоморфності груп). Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору зберігається (з точністю до ізоморфізма) при гомотопічних еквівалентностях – є, як кажуть, його *гомотопічним інваріантом*. Зокрема, вона є й топологічним інваріантом. Точніше буде сказати, що гомотопічна інваріантність – це властивість *функтора* з *категорії* топологічних просторів *з відміченими точками* та їх неперервних відображень, що переводять відмічені точки у відмічені, у категорію груп та їх гомоморфізмів, що визначений конструкціями фундаментальної групи та індукованого гомоморфізма. Детальніше про цю термінологію див., наприклад, у [13, с. 911-918], [17, с. 162-165] або [22, с. 209-214]. Такого роду інваріанти і є одним з основних предметів алгебраїчної топології. Вищі гомотопічні групи $\pi_n(X, x)$, що згадувалися у зауваженні після означення 3.4.3, також будуть гомотопічними інваріантами.

Твердження 3.5.5. *Для будь-яких топологічних просторів X, Y і будь-якої точки $(x, y) \in X \times Y$*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y),$$

тобто фундаментальна група прямого добутку X та Y ізоморфна прямому добутку їх фундаментальних груп (див. означення A.12).

Доведення. Зауважимо, що для будь-якої петлі f у (x, y) її композиції з канонічними проєкціями $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ є петлями у X та Y відповідно. Тому можна коректно визначити відображення $\alpha\colon \pi_1(X \times Y, (x, y)) \to$

$\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$ умовою $\alpha([f]) \coloneqq ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f])$. Це відображення буде гомоморфізмом груп:

$$\alpha([f][g]) = ((p_X)_*([f][g]), (p_Y)_*([f][g])) =$$
$$= ((p_X)_*[f](p_X)_*[g], (p_Y)_*[f](p_Y)_*[g]) =$$
$$= ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f])((p_X)_*[g], (p_Y)_*[g]) = \alpha([f])\,\alpha([g])$$

для будь-яких $[f],[g] \in \pi_1(X \times Y, (x,y))$ за означенням і гомоморфністю $(p_X)_*$ та $(p_Y)_*$. Щоб показати бієктивність α, побудуємо відображення $\beta\colon \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X \times Y, (x,y))$, що переводить кожну пару гомотопічних класів $([g],[h]) \in \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$ у гомотопічний клас $[(g,h)]$ відображення $(g,h)\colon I \to X \times Y$, яке визначене умовою $t \mapsto (g(t), h(t))$ і є петлею у (x,y) (див. також зауваження після доведення теореми 2.13.12). Воно коректно визначене, бо з гомотопностей шляхів $g_0 \sim g_1$ і $h_0 \sim h_1$ випливає $(g_0,h_0) \sim (g_1,h_1)$ (перевірте це), і

$$\alpha(\beta([g],[h])) = \alpha([(g,h)]) = ([p_X \circ (g,h)], [p_Y \circ (g,h)]) = ([g],[h]),$$

$$\beta(\alpha([f])) = \beta([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = [(p_X \circ f, p_Y \circ f)] = [f],$$

тобто α і β взаємно обернені, а отже є ізоморфізмами.

■

Приклад 3.5.6. Згадаймо, що $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ для $n \geqslant 1$. Тоді з (топологічної) інваріантності фундаментальної групи, твердження 3.5.5, прикладу 3.4.6 та властивостей прямого добутку груп випливає, що

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x) \simeq \pi_1(S^{n-1}, y) \times \pi_1(\mathbb{R}, z) = \pi_1(S^{n-1}, y) \times \{[e_z]\} \simeq \pi_1(S^{n-1}, y)$$

для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, де $(y,z) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ – точка, у яку переходить x при гомеоморфізмі. Або у спрощених позначеннях для лінійно зв'язних просторів: $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ (при $n \geqslant 2$). Втім, цей ізоморфізм можна було встановити й без застосування добутків: він також випливає з прикладу 3.2.15 та гомотопічної інваріантності фундаментальної групи.

Твердження 3.5.5 також узагальнюється очевидним чином на будь-яку скінченну кількість множників (за індукцією або безпосередньо).

3.6 Однозв'язні простори

Введемо клас просторів, для яких фундаментальні групи найпростіші – тобто тривіальні:

Означення 3.6.1. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається *однозв'язним*, якщо всі його фундаментальні групи тривіальні: $\pi_1(X,x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$.

Лінійно зв'язний простір, що гомотопічно еквівалентний однозв'язному, також буде однозв'язним в силу наслідку 3.5.4. З наслідку 3.4.8 випливає, що умову тривіальності фундаментальної групи достатньо перевірити в одній точці. Неформально кажучи, вона означає, що будь-яку петлю у цьому просторі можна стягнути в точку (тобто вона гомотопна постійній). Виявляється, що вірна й більш загальна умова:

Твердження 3.6.2. *Лінійно зв'язний топологічний простір є однозв'язним тоді й тільки тоді, коли у ньому будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні.*

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Достатність виконується автоматично, бо петлі – теж шляхи, отже за умовою кожна петля гомотопна постійній.

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай тепер X однозв'язний, f і g – якісь шляхи в X, і $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Нам потрібно побудувати їх гомотопію, тобто відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = x$ і $F(1, s) = y$ для будь-яких $t, s \in I$. Цю задачу можна інтерпретувати як продовження на квадрат $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ неперервного відображення, що задане на його межі $\partial(I \times I)$. Зауважимо, що $I \times I$ гомеоморфний замкненому кругу D^2. Гомеоморфізм можна побудувати, наприклад, за допомогою центральної проєкції у площині, і при ньому межа квадрата переходить у межу круга – коло S^1. Тому для побудови потрібної нам гомотопії шляхів достатньо побудувати продовження деякого неперервного відображення $\widehat{h} \colon S^1 \to X$ на D^2 (перевірте це формально, використавши композиції з відповідним гомеоморфізмом аналогічно до міркувань у прикладі 3.6.4 нижче). Згідно з твердженням 3.1.10, для цього, у свою чергу, потрібно, щоб $\widehat{h}$ було гомотопне постійному відображенню. Далі діємо аналогічно до вправи 3.4.4 (власне, потрібна гомотопність випливає з її твердження, але ми тут випишемо її окремо).

Розглянемо відображення $h \colon I \to X \colon t \mapsto \widehat{h}(e^{2\pi it})$. Воно неперервне як композиція неперервних, і $h(0) = h(1) = \widehat{h}(1)$, тобто це петля. За умовою однозв'язності існує гомотопія H петлі h та постійної петлі $e_{\widehat{h}(1)}$. Визначимо тепер відображення $\widehat{H} \colon S^1 \times I \to X$ умовою $\widehat{H}(e^{2\pi it}, s) \coloneqq H(t, s)$. Воно коректно визначене і неперервне (чому?), при цьому $\widehat{H}(e^{2\pi it}, 0) = H(t, 0) = h(t) = \widehat{h}(e^{2\pi it})$ і $\widehat{H}(e^{2\pi it}, 1) = H(t, 1) = \widehat{h}(1)$ для будь-якого t, тобто це гомотопія $\widehat{h}$ і постійного відображення в точку $\widehat{h}(1)$. Це й завершує доведення.

■

Приклад 3.6.3. Будь-який стяжний простір є однозв'язним згідно з наслідком 3.5.4 і прикладом 3.4.5. Зокрема, у таких просторах (наприклад, у зірчатих підмножинах $\mathbb{R}^n$) будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні в силу попереднього твердження.

Приклад 3.6.4. Сфери S^n однозв'язні при $n \geqslant 2$. Дійсно, нехай f – петля у деякій $x \in S^n$. Треба встановити, що ця петля гомотопна постійній. Спочатку припустимо, що носій f не покриває всю сферу, тобто існує $x_0 \in S^n \setminus f(I)$. Позначимо через $\varphi \colon S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ стереографічну проєкцію відносно x_0 (див. приклад 1.10.10), що є гомеоморфізмом. Тоді $\varphi \circ f$ коректно визначене і неперервне, а отже є петлею в $\mathbb{R}^n$ у точці $\varphi(x)$ (див. рис. 3.5 зліва). Оскільки $\mathbb{R}^n$ однозв'язний за попереднім прикладом, існує гомотопія F петлі $\varphi \circ f$ та постійної петлі $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F$ (що неперервне як композиція неперервних) є гомотопією $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 0) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$ і $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 1) = \varphi^{-1} \circ e_{\varphi(x)} = e_x$, яка нам і потрібна.

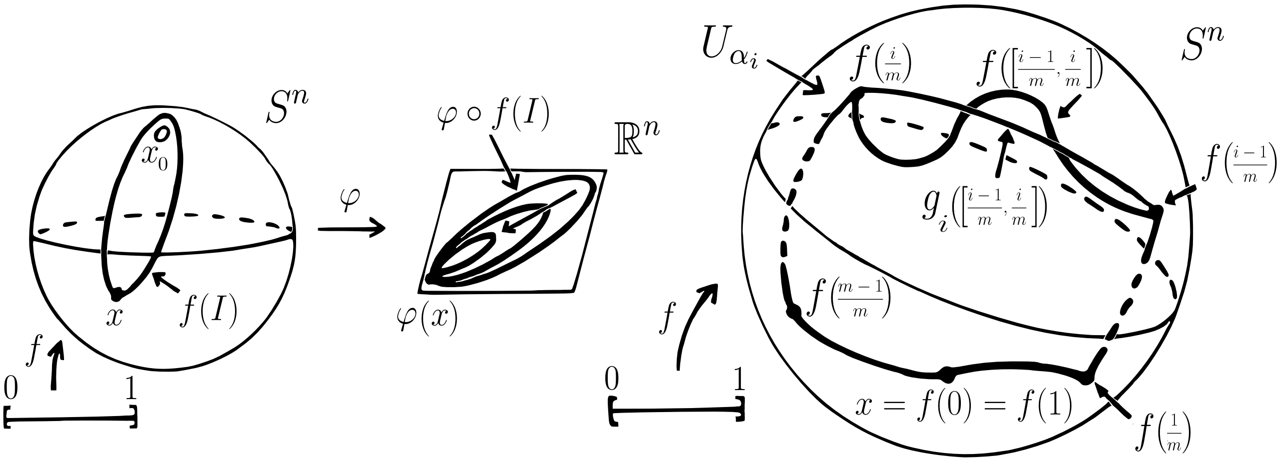


Рис. 3.5: Доведення однозв'язності сфери S^n при $n \geqslant 2$

Тепер розглянемо загальний випадок. Якщо існування петлі, носій якої покриває всю сферу, видається неможливим, можна згадати про класичний приклад *кривої Пеано* у площині, тобто шляху, образом якого є квадрат $I^2 = I \times I$, див. [10, с. 36-38] або [24, с. 271-275]. Цей приклад природним чином узагальнюється на шляхи в багатовимірних кубах I^n та багатьох інших компактах, зокрема S^n. Нашою задачею буде побудувати гомотопію петель f і деякої g такої, що $g(I) \neq S^n$. Тим самим ми зведемо цей випадок до попереднього й нарешті покажемо однозв'язність S^n. Розглянемо деяке покриття $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сфери S^n, що складається з відкритих напівсфер. За неперервністю f прообраз цього покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ є тоді відкритим покриттям компактного метричного простору I. Застосуємо до цього покриття лему Лебега і знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді з означення числа Лебега випливає, що для кожного i від 1 до m існує таке $\alpha_i \in A$, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$, а отже $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{\alpha_i}$: образ $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ міститься у деякій відкритій напівсфері. З прикладу 3.1.8 (і аналогічно до прикладу 3.3.4) тоді випливає, що для кожного i шлях $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ буде $\{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$-гомотопний деякому шляху $g_i \in C([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}], U_{\alpha_i})$ з тими ж кінцями, носієм якого є дуга великого кола S^n, як показано на рис. 3.5 справа.

Визначимо тепер відображення $g\colon I \to S^n$ умовою $g|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]} = g_i$ для кожного i. Зауважимо, що за побудовою $g_i(\frac{i-1}{m}) = f(\frac{i-1}{m}) = g_{i-1}(\frac{i-1}{m})$ для i від 2 до m, $g_1(0) = f(0) = x$ і $g_m(1) = f(1) = x$, тому g коректно визначене, неперервне і є петлею в x. Гомотопію між f і g можна побудувати, "зшиваючи" гомотопії між їхніми частинами, аналогічно до доведення леми 3.3.5. Більш точно, нехай F_i – $\{\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\}$-гомотопія $f|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]}$ та g_i для i від 1 до m. Тоді неважко перевірити, що відображення $F\colon I\times I \to S^n$, що задане умовою $F|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]\times I} = F_i$ для кожного i, коректно визначене та є потрібною гомотопією. При цьому носій g міститься у скінченному об'єднанні дуг великих кіл S^n, а отже не дорівнює S^n (саме тут умова $n \geqslant 2$ є суттєвою). Отже, це потрібна нам петля, і, комбінуючи дві частини доведення, отримуємо $f \sim g \sim e_x$.

Приклад 3.6.5. Простір $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ однозв'язний при $n \geqslant 3$ в силу попереднього прикладу, оскільки $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ за прикладом 3.5.6 (або просто в силу гомотопічної еквівалентності, що була встановлена у прикладі 3.2.15).

Приклад 3.6.6. Прямий добуток будь-яких двох однозв'язних просторів однозв'язний за теоремою 2.13.12 (що забезпечує лінійну зв'язність) та твердженням 3.5.5. При цьому прямий добуток двох стяжних просторів стяжний за вправою 3.2.6. Це також вірно для прямого добутку довільної скінченної кількості просторів за очевидними узагальненнями згаданих тверджень.

Вправа 3.6.7. Показати, що вірне й обернене: якщо $X \times Y$ однозв'язний (відповідно, стяжний), то простори X та Y однозв'язні (стяжні). Узагальнити це на довільну скінченну кількість множників.

3.7 Накриття

Ми вже достатньо багато дізналися про фундаментальні групи, але поки що не маємо жодного нетривіального прикладу і навіть не знаємо, чому дорівнює фундаментальна група кола. У цьому та наступних параграфах ми познайомимося з технікою накрить, що є одним з важливих інструментів алгебраїчної топології та її застосувань. Зокрема, за допомогою накрить, як побачимо, можна обчислювати фундаментальні групи. Накриття є окремим випадком більш загальної топологічної конструкції *розшарування* (див., наприклад, [17, с. 375-384]).

Означення 3.7.1. Трійка (X, Y, p), де $p\colon X \to Y$ – сюр'єктивне неперервне відображення топологічних просторів, зветься *накриттям*, якщо для будь-якої точки $y \in Y$ існує відкрита $U \ni y$ така, що $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, де

- усі U_α відкриті;
- $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для будь-яких $\alpha \neq \beta$ (тобто об'єднання диз'юнктне);

- $p|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to U$ є гомеоморфізмом для будь-якого α (відносно індукованих топологій).

При цьому X називають *накриваючим простором* цього накриття, Y – його *базою* (а також говорять, що (X, Y, p) – накриття простору Y), p – *накриваючим відображенням* (або просто накриттям), $p^{-1}(y)$ – *шаром* накриття над точкою $y \in Y$. Накриття зветься *універсальним*, якщо його накриваючий простір однозв'язний.

Також називатимемо окіл U з попереднього означення *правильно накритим*, а про множини U_α для $\alpha \in A$ будемо говорити, що вони *правильно накривають* U (і взагалі будемо так говорити про будь-яку відкриту множину U, що задовольняє умовам із означення). З означеня тоді випливає, що правильно накриті околи утворюють відкрите покриття Y. Зауважимо, що будь-яка відкрита підмножина $V \subset U$ правильно накритої множини також правильно накрита: якщо покласти $V_\alpha \coloneqq (p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ для кожного індекса $\alpha \in A$, то $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$ також задовольняє усім умовам із означення (перевірте це).

Приклад 3.7.2. Будь-який гомеоморфізм $p\colon X \to Y$ задає приклад накриття (т. зв. *тривіальне накриття*). У цьому випадку в якості U можна взяти простір Y, а в якості єдиного U_α – X.

Вправа 3.7.3. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p відкрите, тобто у загальному випадку йому "заважає" бути гомеоморфізмом лише відсутність ін'єктивності (див. також вправу 3.8.7 нижче).

Приклад 3.7.4. Нехай Y – довільний топологічний простір, F – простір з дискретною топологією, $X = Y \times F$, і $p = p_Y\colon X \to Y$ – канонічна проєкція на Y. Тоді для $U = Y$ маємо $p^{-1}(Y) = Y \times F = \bigcup\limits_{f\in F} Y \times \{f\}$ – диз'юнктне об'єднання. Тут усі $Y \times \{f\}$ відкриті за побудовою топології прямого добутку (бо одноточкові $\{f\}$ відкриті у дискретному F), а обмеження $p|_{Y\times\{f\}}$ – гомеоморфізми за пунктом 4. твердження 2.1.5, тому (X, Y, p) – накриття.

Вправа 3.7.5. Показати, що будь-яке накриття (X, Y, p) локально влаштоване як у попередньому прикладі: якщо $U \subset Y$ – правильно накритий окіл, то його прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфний добутку $U \times p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка U, а шар $p^{-1}(y)$ наділений індукованою топологією, що є дискретною.

Вправа 3.7.6. Показати, що якщо підмножина $A \subset Y$ бази накриття (X, Y, p) зв'язна (зокрема лінійно зв'язна), то усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in A$ рівнопотужні.

Якщо усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in Y$ складаються з n елементів, говорять, що накриття – *n-листове*. Зауважимо, що для прообразу правильного накритого околу $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ з означення накриття доповненням до кожної відкритої U_α буде $\bigcup\limits_{\beta\neq\alpha} U_\beta$ – об'єднання відкритих множин, тому всі U_α будуть відкритозамкненими в $p^{-1}(U)$. Звідси можна вивести, що, наприклад, ортогональна проєкція $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини на вісь x не визначає накриття. Дійсно, якщо припустити, що існує правильно накритий окіл U, скажімо, точки 0, то він повинен містити інтервал (a, b), який теж буде правильно накритим, як було зауважено вище. Його прообраз $p^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ – смуга у площині, що є зв'язною, а отже єдина її непорожня відкритозамкнена підмножина – це вона сама. Тобто об'єднання $p^{-1}((a, b)) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$ складається з єдиної $V_\alpha = (a, b) \times \mathbb{R}$, яка за означенням повинна бути гомеоморфна (a, b). Але вони негомеоморфні (це випливає з прикладу 2.10.29), протиріччя.

Для нас особливе значення матимуть приклади, що утворені за допомогою дії групи на просторі (див. параграф 2.4). Для фіксованої дії λ групи G на множині X, як і раніше, будемо використовувати позначення з точками: $\lambda\colon G \times X \to X\colon (a, x) \mapsto \lambda(a, x) = a \cdot x$.

Означення 3.7.7. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *неперервною*, якщо для будь-якого $a \in G$ відображення $\lambda_a := \lambda(a, \cdot)\colon X \to X\colon x \mapsto a \cdot x$ неперервне.

Для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$ за властивістю дії $\lambda_a(\lambda_b(x)) = a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$, тобто $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}$. Зокрема, $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \lambda_e = id_X$ (бо $\lambda_e(x) = e \cdot x = x$ для будь-якої $x \in X$), тобто відображення $\lambda_{a^{-1}}$ є оберненим до λ_a: $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$. Тому ці відображення є бієкціями. Якщо дія неперервна, то усі λ_a і обернені до них $\lambda_{a^{-1}}$ неперервні, тобто це гомеоморфізми:

Наслідок 3.7.8. *Дія λ групи G на просторі X неперервна тоді й тільки тоді, коли $\lambda_a\colon X \to X$ є гомеоморфізмом для будь-якого $a \in G$.*

Означення 3.7.9. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *цілком розривною*, якщо для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap \lambda_a(U) = \varnothing$ для будь-якого $a \in G$, $a \neq e$.

Це один зі способів вказати, що група діє на просторі "дискретно". З означень випливає, що будь-яка цілком розривна дія є вільною (зокрема ефективною). Для фіксованої дії далі будемо використовувати позначення $a \cdot U := \lambda_a(U) = \{a \cdot x \mid x \in U\}$. З означення випливає, що умова цілком розривності еквівалентна формально сильнішій умові:

Наслідок 3.7.10. *Дія групи G на просторі X цілком розривна тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $a \cdot U \cap b \cdot U = \varnothing$ для будь-яких $a, b \in G$, $a \neq b$.*

Доведення. $\Leftarrow$ Достатньо покласти $b = e$ в умові.

$\underline{\Rightarrow}$ Для будь-якої $x \in X$ розглянемо відкриту $U \ni x$ з означення цілком розривної дії. Тоді $U \cap a^{-1}b \cdot U = \varnothing$ для довільних $a \neq b$, оскільки $a^{-1}b \neq e$. Застосовуючи до цієї рівності біекцію λ_a, отримуємо потрібне:

$$a \cdot U \cap b \cdot U = a \cdot U \cap a \cdot (a^{-1}b \cdot U) = \varnothing.$$

■

Твердження 3.7.11. *Якщо група G діє на топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, а $p\colon X \to X/_G$ – канонічна проєкція на простір орбіт $X/_G$ цієї дії, то $(X, X/_G, p)$ є накриттям.*

Доведення. Нагадаємо, що образом кожної точки $x \in X$ під дією канонічної проєкції є її орбіта: $p(x) = G \cdot x$. Ми знаємо, що p неперервна і сюр'єктивна. Для будь-якої орбіти $G \cdot x \in X/_G$ розглянемо окіл $U \ni x$ з означення цілком розривної дії (при цьому в якості x можна обрати довільну точку цієї орбіти). Тоді множина $G \cdot U \coloneqq \{G \cdot y \mid y \in U\}$ є відкритим околом $G \cdot x$ у просторі $X/_G$. Дійсно, вона містить $G \cdot x$ за побудовою, і

$$p^{-1}(G \cdot U) = \{a \cdot x \mid a \in G,\, x \in U\} = \bigcup_{a \in G} a \cdot U = \bigcup_{a \in G} \lambda_a(U)$$

відкрита, оскільки дія неперервна, а отже всі λ_a є гомеоморфізмами за наслідком 3.7.8, тому всі $\lambda_a(U)$ відкриті. Тоді $G \cdot U$ відкрита за означенням фактортопології на $X/_G$.

Більш того, відкриті множини $a \cdot U$ для $a \in G$ правильно накривають $G \cdot U$ (звідки й випливає за означенням, що $(X, X/_G, p)$ – накриття). Дійсно, ми тільки що побачили, що $p^{-1}(G \cdot U)$ є їх об'єднанням, яке диз'юнктне, бо $a \cdot U \cap b \cdot U = \varnothing$ при $a \neq b$ за наслідком 3.7.10 (зауважимо, що множина U в його доведенні – та ж, що і в означенні цілком розривної дії). Залишилося перевірити, що для будь-якого a обмеження канонічної проєкції $p|_{a \cdot U} \colon a \cdot U \to G \cdot U$ – гомеоморфізм. Оскільки $G = \{ba \mid b \in G\}$ (чому?), за властивостями дії $p(a \cdot y) = G \cdot (a \cdot y) = G \cdot y$ для кожної $a \cdot y \in a \cdot U$. Це обмеження сюр'єктивне, бо $G \cdot y = p(a \cdot y)$ для будь-якої $G \cdot y \in G \cdot U$. Якщо $p(a \cdot y) = p(a \cdot z)$, тобто $G \cdot y = G \cdot z$, то існує $b \in G$ такий, що $z = b \cdot y$. Оскільки $y, z \in U$, $b = e$ за умовою на U, тому $y = z$ і $a \cdot y = a \cdot z$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – ін'єкція. Вона неперервна як обмеження неперервної проєкції p. Нарешті, будь-яка відкрита підмножина $a \cdot U$ має вигляд $a \cdot V$ для деякої відкритої $V \subset U$, бо λ_a – гомеоморфізм. Тоді її образ $p(a \cdot V) = G \cdot V$ буде відкритим у $X/_G$ (аналогічно до $G \cdot U$), а отже і в індукованій топології $G \cdot U$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – відкрита неперервна біекція, тобто гомеоморфізм.

■

Для таких накрить шаром над будь-якою точкою (орбітою) $G \cdot x \in X/_G$ буде $p^{-1}(G \cdot x) = \{a \cdot x \mid a \in G\}$, що ототожнюється з G: $a \cdot x \leftrightarrow a$, при цьому

a визначений однозначно, бо дія вільна. І взагалі, індексуюча множина A з означення накриття природним чином ототожнюється з шаром $p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка правильно накритого околу U (як саме?).

Часто корисною є наступна достатня умова виконання попереднього твердження:

Твердження 3.7.12. *Будь-яка вільна неперервна дія скінченної групи на хаусдорфовому топологічному просторі є цілком розривною.*

Доведення. Отже, нехай $G = \{a_i\}_{i=0}^n$ – скінченна група, що вільно й неперервно діє на хаусдорфовому просторі X, де $a_0 = e$ – одиниця групи. Для довільної $x \in X$ та кожного i від 1 до n з того, що дія вільна, випливає $x \neq a_i \cdot x$. В силу хаусдорфовості тоді існують такі відкриті $U_i \ni x$, $V_i \ni a_i \cdot x$, що $U_i \cap V_i = \varnothing$. Оскільки прообрази $a_i^{-1} \cdot V_i = (\lambda_{a_i})^{-1}(V_i)$ є відкритими за лемою 3.7.8 та містять точку $a_i^{-1} \cdot (a_i \cdot x) = x$ для усіх i, перетин $U \coloneqq \left(\bigcap\limits_{i=1}^n U_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^n a_i^{-1} \cdot V_i\right)$ є відкритим околом x. При цьому $U \subset U_i$ та $a_i \cdot U \subset a_i \cdot (a_i^{-1} \cdot V_i) = V_i$, а отже $U \cap a_i \cdot U = \varnothing$ для кожного ненульового i, що й означає цілком розривність даної дії за означенням.

■

Приклад 3.7.13. Дія $G = \mathbb{R}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 2.4.7 ($a \cdot x = x + a$) є неперервною, бо паралельні перенесення неперервні, але не цілком розривною (хоч і вільною). Дійсно, будь-який відкритий окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^n$ повинен містити евклідову кулю $B_\varepsilon(0)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Але тоді дія елементом $a = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots, 0) \neq 0$ переводить 0 у $a \cdot 0 = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots, 0) \in B_\varepsilon(0)$, тобто $U \cap a \cdot U \neq \varnothing$.

Вправа 3.7.14. Чи є неперервними дії з прикладів 2.4.5 і 2.4.6? Чи є вони цілком розривними?

Приклад 3.7.15. Розглянемо тепер дію $G = \mathbb{Z}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 2.4.8 (знову $a \cdot x = x + a$). Як і у попередньому прикладі, вона неперервна. Щоб показати, що вона цілком розривна, покладемо $U = B_{\frac{1}{2}}(x)$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$ (тут кулі знову евклідові). Оскільки для $a \neq 0$ евклідова відстань між x і $a \cdot x$ не менша за 1, з нерівності трикутника випливає, що $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = \varnothing$ (де $a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(a \cdot x)$). Нагадаємо, що простір орбіт для даної дії гомеоморфний n-вимірному тору T^n, далі для спрощення позначень будемо їх ототожнювати. При цьому ототожненні канонічній проєкції відповідатиме відображення $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n\colon (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n})$. Таким чином, з твердження 3.7.11 випливає, що $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ – накриття T^n, яке є універсальним за прикладом 3.6.3. Зокрема, при $n = 1$ маємо універсальне накриття $(\mathbb{R}, S^1, p)$ кола.

Приклад 3.7.16. У прикладі 2.4.10 було показано, зокрема, що n-вимірний дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфний простору орбіт дії групи $G = \mathbb{Z}_2$ на сфері $X = S^n$ (знову ж будемо їх ототожнювати для спрощення позначень). Тут $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ – група з двох елементів (див. приклад А.5), а її дія задається умовами $[0]\cdot x = x$ і $[1]\cdot x = -x$. Оскільки тотожне відображення і центральна симетрія сфери неперервні, ця дія неперервна. Вона також цілком розривна: для будь-якої $x \in S^n$ у якості U можна взяти будь-яку відкриту напівсферу, що містить x (або просто пошлемося на твердження 3.7.12). Отже, $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ – дволистове накриття $\mathbb{R}P^n$ за твердженням 3.7.11. Тут канонічна проєкція має вигляд $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n\colon (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1 : \ldots : x^{n+1})$. При $n \geqslant 2$ це накриття універсальне в силу прикладу 3.6.4.

Приклад 3.7.17. Нехай тепер $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$ – група залишків за модулем n з прикладу А.5, $X = S^1$ – коло (яке знову ототожнюємо з множиною комплексних чисел модуля 1), а дія задається умовою $[k] \cdot e^{it} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} e^{it} = e^{i(t + \frac{2\pi k}{n})}$, тобто клас еквівалентності $[k]$ діє обертанням кола на кут $\frac{2\pi k}{n}$. Це коректно визначена дія (чому?), вона неперервна (бо обертання неперервні) та цілком розривна: для $x \in S^1$ у якості U візьмемо відкриту дугу довжини $\frac{2\pi}{n}$, що містить x (або знову ж використаємо твердження 3.7.12). Визначимо відображення $p\colon S^1 \to S^1$ умовою $p(e^{it}) = e^{int}$. Воно переводить усі точки кожної орбіти $\mathbb{Z}_n \cdot e^{it}$ в одну точку e^{int} кола (й різні орбіти – у різні точки), тому факторизується у бієкцію $S^1/_{\mathbb{Z}_n} \to S^1$ (див. рис. 3.6). Можна сказати, що p "намотує" коло на себе n разів. Його факторизація є гомеоморфізмом (покажіть це), тобто $S^1/_{\mathbb{Z}_n} \cong S^1$. Ототожнюючи ці простори, маємо за твердженням 3.7.11, що (S^1, S^1, p) – накриття кола, де канонічній проєкції відповідає описане вище відображення p. Усі шари цього накриття складаються з n елементів, тобто воно n-листове. Зауважимо, що при $n = 1$ це тривіальне накриття з прикладу 3.7.2, а при $n = 2$ – накриття проєктивної прямої $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ з попереднього прикладу.

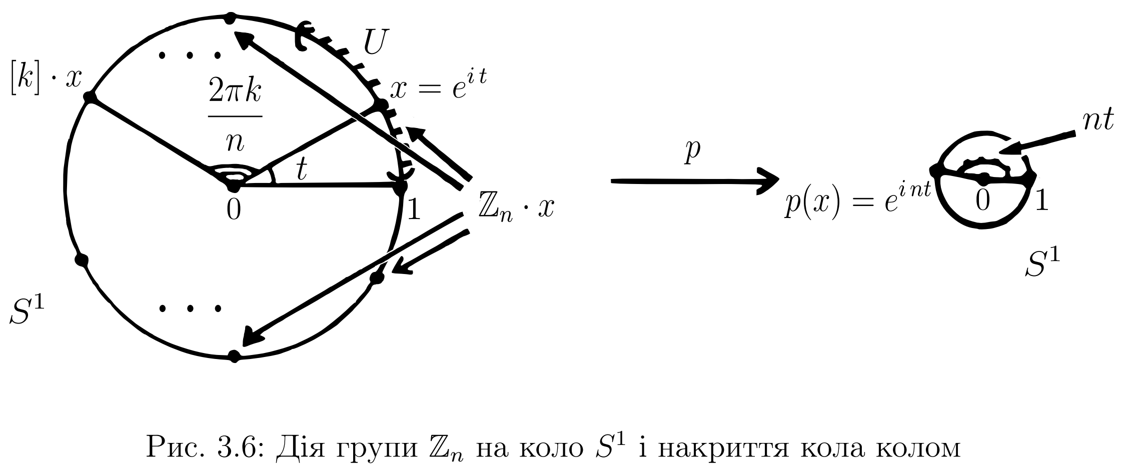


Рис. 3.6: Дія групи $\mathbb{Z}_n$ на коло S^1 і накриття кола колом

Приклад 3.7.18. Розглянемо дію тієї ж групи $G = \mathbb{Z}_n$, що у попередньому прикладі, на тривимірній сфері $X = S^3$. Її зручно представляти як одиничну сферу у просторі $\mathbb{C}^2$, що очевидним чином ототожнюється з $\mathbb{R}^4$, тобто як множину пар комплексних чисел, сума квадратів модулів яких дорівнює одиниці:

$$S^3 = \big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \;\big|\; |z|^2 + |w|^2 = 1\big\}.$$

З урахуванням цього ототожнення дія $\mathbb{Z}_n$ на S^3, що крім натурального n визначається деяким взаємно простим з ним натуральним числом $m < n$, задається умовами

$$[k] \cdot (z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i\, k}{n}} z, e^{\frac{2\pi i\, mk}{n}} w\right)$$

для будь-яких $[k] \in \mathbb{Z}_n$, $(z, w) \in S^3$. Зауважимо, що пара комплексних чисел у правій частині попередньої рівності теж належить до S^3, бо множення на комплексні числа модуля 1 не змінює модулі z і w. Тому з аналогічних до попереднього прикладу міркувань випливає, що це коректно визначена неперервна дія (перевірте це). Вона цілком розривна в силу твердження 3.7.12. Простір орбіт цієї дії позначається через $L(n, m)$ і зветься *лінзовим простором*. Таким чином, $(S^3, L(n, m), p)$, де p – канонічна проєкція, є n-листовим накриттям цього простору в силу твердження 3.7.11 і зауваження після нього. Це накриття універсальне за прикладом 3.6.4. Зокрема, $L(2, 1)$ гомеоморфний $\mathbb{R}P^3$, а накриття у цьому випадку те ж, що у прикладі 3.7.16 для $n = 3$ (чому?). Детальніше про лінзові простори та їхні узагальнення див., наприклад, у [17, с. 144-146].

Також приклади накрить виникають у комплексному аналізі як т. зв. *ріманові поверхні* функцій комплексної змінної. Див, наприклад, [6, с. 50-59, 69-70, 164-166].

3.8 Накриття та шляхи

Для опису фундаментальної групи за допомогою накрить нам потрібно спочатку сформулювати та довести кілька важливих технічніх результатів, що стосуються шляхів.

Лема 3.8.1 (Про підняття шляху)**.** *Нехай (X, Y, p) – накриття, а $f\colon I \to Y$ – шлях у його базі з початком у точці $f(0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдиний шлях $\widetilde{f}\colon I \to X$ у накриваючому просторі, що починається в x і накриває f: $\widetilde{f}(0) = x$, $p \circ \widetilde{f} = f$.*

Доведення.

За означеням накриття, для будь-якого $t \in I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_t \ni f(t)$. Тоді $\{f^{-1}(U_t)\}_{t \in I}$ – відкрите покриття компактного I. Застосувавши лему Лебега, оберемо число Лебега $\delta > 0$ цього покриття і натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді для будь-якого $i = \overline{1, m}$ існує t_i таке, що $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{t_i}$. Далі позначатимемо $U_i \coloneqq U_{t_i}$.

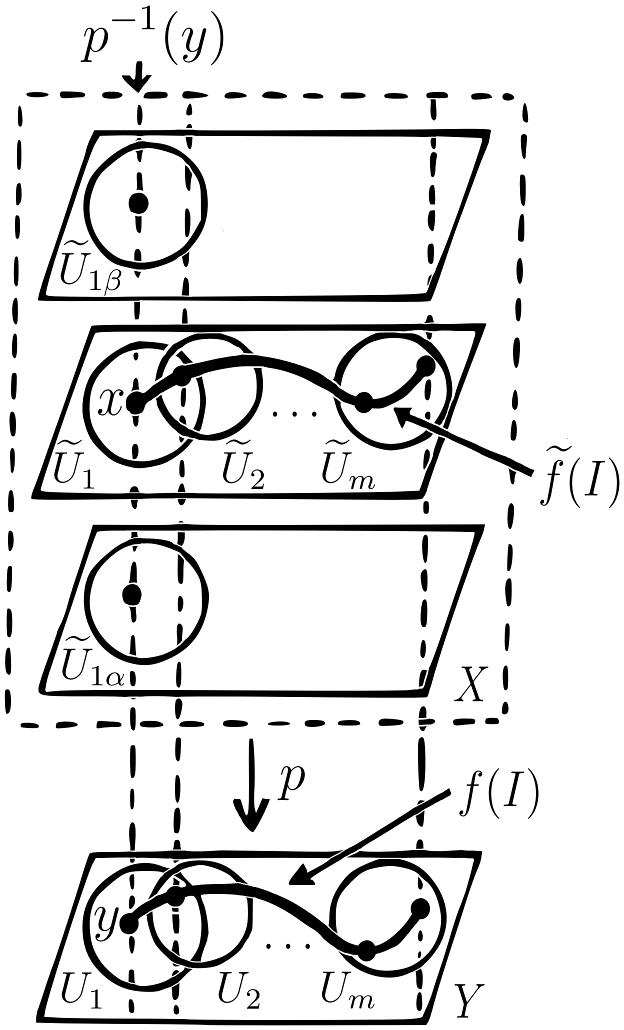


Рис. 3.7: Побудова підняття шляху

Прообраз $p^{-1}(U_1)$ є об'єднанням $\bigcup_{\alpha \in A_1} \widetilde{U}_{1\alpha}$ околів, що правильно накривають U_1, й містить, зокрема, прообраз точки $y = f(0)$. Тому існує індекс $\alpha_1 \in A_1$ такий, що $x \in \widetilde{U}_{1\alpha_1}$; позначимо $\widetilde{U}_1 \coloneqq \widetilde{U}_{1\alpha_1}$. За означенням, $p|_{\widetilde{U}_1}$ – гомеоморфізм, причому $(p|_{\widetilde{U}_1})^{-1}(y) = x$, тому $\widetilde{f}_1 \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_1})^{-1} \circ f|_{[0,\frac{1}{m}]} \colon [0, \frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_1$ коректно визначене і неперервне, тобто є шляхом (в $\widetilde{U}_1$, а отже і в X) з початком у $\widetilde{f}_1(0) = x$. За побудовою, він накриває перший відрізок f: $p \circ \widetilde{f}_1 = f|_{[0,\frac{1}{m}]}$ (див. рис. 3.7). Кінець цього шляху лежить у прообразі правильно накритого U_2, для якого використовуємо аналогічні позначення: $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in p^{-1}(f(\frac{1}{m})) \subset p^{-1}(U_2) = \bigcup_{\alpha \in A_2} \widetilde{U}_{2\alpha}$. Тоді існує індекс $\alpha_2 \in A_2$ такий, що $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in \widetilde{U}_{2\alpha_2}$; позначимо $\widetilde{U}_2 \coloneqq \widetilde{U}_{2\alpha_2}$ і покладемо $\widetilde{f}_2 \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_2})^{-1} \circ f|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} \colon [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \to \widetilde{U}_2$. Це шлях в $\widetilde{U}_2$ і в X з початком у $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m})$, і $p \circ \widetilde{f}_2 = f|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]}$.

Далі аналогічним чином обираємо околи $\widetilde{U}_i$, що правильно накривають U_i, й будуємо шляхи $\widetilde{f}_i \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_i})^{-1} \circ f|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]} \colon [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \to \widetilde{U}_i$ для кожного i від 3 до m. Нарешті, визначимо $\widetilde{f} \colon I \to X$ умовою $\widetilde{f}|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]} = \widetilde{f}_i$ для кожного i (пор. з конструкцією у прикладі 3.6.4). За побудовою це коректно визначений шлях, $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}_1(0) = x$ і $p \circ \widetilde{f} = f$.

Тепер перевіримо єдиність такого $\widetilde{f}$. Нехай $\widetilde{\widetilde{f}} \colon I \to X$ – якийсь ще шлях такий, що $\widetilde{\widetilde{f}}(0) = x$ і $p \circ \widetilde{\widetilde{f}} = f$. Зокрема, $p \circ \widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) = f([0, \frac{1}{m}]) \subset U_1$, тому $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset p^{-1}(U_1) = \bigcup_{\alpha \in A_1} \widetilde{U}_{1\alpha}$. Оскільки $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ містить $\widetilde{\widetilde{f}}(0) = x$, вона перетинається з $\widetilde{U}_1$, що є відкритозамкненою підмножиною $p^{-1}(U_1)$ (див. зауваження після вправи 3.7.6). Оскільки $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ до того ж зв'язна як носій шляху, $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset \widetilde{U}_1$. З бієктивності обмеження $p|_{\widetilde{U}_1} \colon \widetilde{U}_1 \to U_1$ та рівності відображень $p \circ \widetilde{\widetilde{f}}|_{[0,\frac{1}{m}]} = f|_{[0,\frac{1}{m}]} = p \circ \widetilde{f}|_{[0,\frac{1}{m}]}$ випливає, що $\widetilde{\widetilde{f}}|_{[0,\frac{1}{m}]} = \widetilde{f}|_{[0,\frac{1}{m}]}$. Зокрема, $\widetilde{f}(\frac{1}{m}) = \widetilde{\widetilde{f}}(\frac{1}{m})$. Далі повторюємо аналогічні міркування для $\widetilde{U}_2$ і т. д. Таким чином, $\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{f}}$.

■

Означення 3.8.2. Шлях $\widetilde{f}$ з попередньої леми зветься *підняттям* (або *накриваючим шляхом*) шляху f у накриваючий простір X.

Також нам знадобиться наступне безпосереднє узагальнення леми про підняття шляху:

Лема 3.8.3 (Про підняття відображень квадрата)**.** *Нехай (X, Y, p) – накриття, а $F\colon I \times I \to Y$ – неперервне відображення у його базу таке, що $F(0,0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдине неперервне відображення $\widetilde{F}\colon I \times I \to X$ у накриваючий простір таке, що $\widetilde{F}(0,0) = x$ і $p \circ \widetilde{F} = F$.*

Доведення. Будемо діяти як у попередньому доведенні. Для будь-якого $(t,s) \in I \times I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_{(t,s)} \ni F(t,s)$, тому $\{F^{-1}(U_{(t,s)})\}_{t,s \in I}$ є відкритим покриттям компактного $I \times I$. Нехай $\delta > 0$ – якесь його число Лебега. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{\sqrt{2}}{m} < \delta$. Тоді для будь-яких $i, j = \overline{1,m}$ існує точка (t_{ij}, s_{ij}) така, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subset F^{-1}(U_{(t_{ij},s_{ij})})$ (бо евклідовий діаметр цього квадратика, що дорівнює його діагоналі $\frac{\sqrt{2}}{m}$, менший за δ), а отже $F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]) \subset U_{(t_{ij},s_{ij})}$. Позначимо тоді $U_{ij} \coloneqq U_{(t_{ij},s_{ij})}$ (див. рис. 3.8, де через V_{ij} позначені $F^{-1}(U_{ij})$).

Прообраз правильно накритого околу U_{11} містить $p^{-1}(y)$ і має вигляд $p^{-1}(U_{11}) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_{11}} \widetilde{U}_{11\alpha}$, тому існує індекс $\alpha_{11} \in A_{11}$ такий, що $x \in \widetilde{U}_{11\alpha_{11}}$. Позначимо $\widetilde{U}_{11} \coloneqq \widetilde{U}_{11\alpha_{11}}$ і покладемо $\widetilde{F}_{11} \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{[0,\frac{1}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}\colon [0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_{11}$. Тоді $\widetilde{F}_{11}$ неперервне, і $p \circ \widetilde{F}_{11} = F|_{[0,\frac{1}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}$. Зокрема, образ правої сторони квадратика $p \circ \widetilde{F}_{11}(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) = F(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) \subset U_{11} \cap U_{21}$. Далі вибираємо з околів, що правильно накривають U_{21}, окіл $\widetilde{U}_{21}$, що містить $\widetilde{F}_{11}(\frac{1}{m}, 0)$, і будуємо $\widetilde{F}_{21} \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_{21}})^{-1} \circ F|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}\colon [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_{21}$. Це відображення неперервне, $p \circ \widetilde{F}_{21} = F|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}$, і $\widetilde{F}_{11}|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]} = \widetilde{F}_{21}|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]}$, бо на підмножині $\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]$ обидва ці обмеження збігаються з $(p|_{\widetilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]}$.

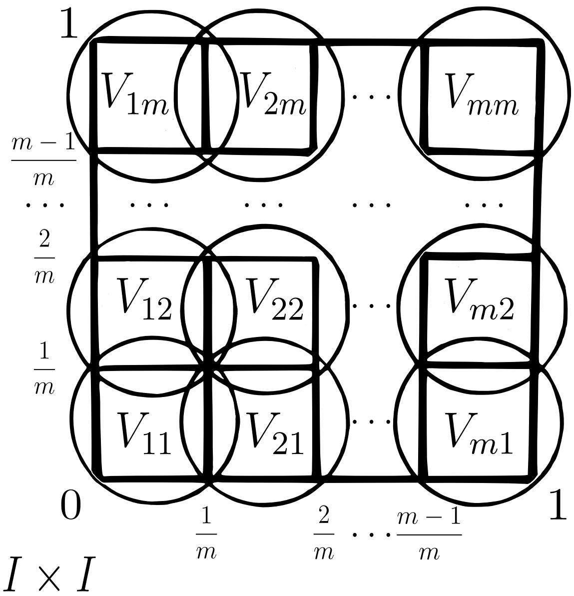


Рис. 3.8: Побудова підняття відображення квадрата

Далі, рухаючися вправо, отримаємо аналогічним чином відображення $\widetilde{F}_{i1}$ для усіх i від 1 до m. Після цього переходимо на другий рядок квадратиків, починаючи з відображення $\widetilde{F}_{12}\colon [0, \frac{1}{m}] \times [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \to \widetilde{U}_{12}$, що збігається з $\widetilde{F}_{11}$ на верхній стороні $[0, \frac{1}{m}] \times \{\frac{1}{m}\}$ нижнього лівого квадратика. Далі отримаємо таким чином відображення $\widetilde{F}_{i2}$ і т. д. Зрештою, ми отримаємо набір неперервних відображень $\widetilde{F}_{ij}\colon [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \to X$ для усіх пар $i, j = \overline{1, m}$, що узгоджені на перетинах їхніх областей визначення і є такими, що $p \circ \widetilde{F}_{ij} = F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]}$ для усіх i та j. Визначимо тепер $\widetilde{F}\colon I \times I \to X$ умовою $\widetilde{F}|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]} = \widetilde{F}_{ij}$ для кожної пари $i, j = \overline{1, m}$. За побудовою це коректно визначене неперервне відображення, $\widetilde{F}(0, 0) = \widetilde{F}_{11}(0, 0) = x$ і $p \circ \widetilde{F} = F$. Єдиність такого $\widetilde{F}$ перевіряється аналогічно до попереднього доведення (зробіть це).

■

Вправа 3.8.4. Сформулювати та довести узагальнення цієї леми на відображення n-вимірного куба I^n для довільного n.

Твердження про існування та єдиність піднять відображень довільного простору у базу накриття, що узагальнюють дві попередні леми та вправу, можна знайти у [17, с. 60-63] або [20, с. 162-169]

Лема 3.8.5 (Про накриваючу гомотопію). *Нехай $f, g\colon I \to Y$ – шляхи у базі деякого накриття (X, Y, p), що гомотопні й мають спільний початок у точці y: $f \sim g$, $y = f(0) = g(0)$, а $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon I \to X$ – підняття f і g відповідно у накриваючий простір зі спільним початком у деякій точці $x \in p^{-1}(y)$. Тоді ці підняття теж гомотопні, зокрема, їхні кінці збігаються: $\widetilde{f} \sim \widetilde{g}$ і $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$.*

Доведення.

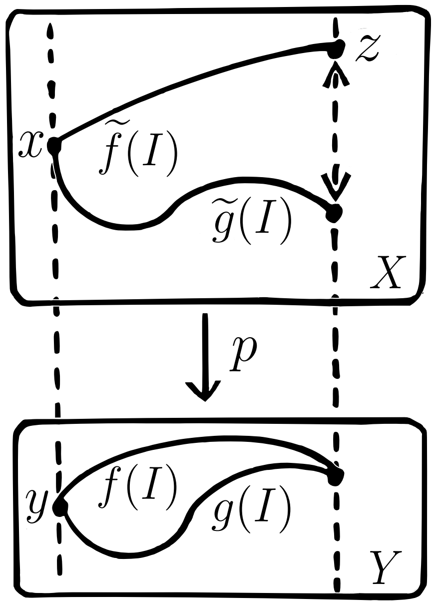


Рис. 3.9: Лема про накриваючу гомотопію

Твердження цієї леми проілюстроване на рис. 3.9. Нехай $F\colon I \times I \to Y$ – гомотопія шляхів f і g. Тобто це неперервне відображення, $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = y$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, $F(0, 0) = y$. Тоді з леми 3.8.3 випливає, що існує неперервне $\widetilde{F}\colon I \times I \to X$ таке, що $\widetilde{F}(0, 0) = x$ і $p \circ \widetilde{F} = F$. Зауважимо, що тоді $s \mapsto \widetilde{F}(0, s)$ – шлях у X з початком у x, що є підняттям шляху $s \mapsto F(0, s) = y$ в Y. Але цей шлях в Y є постійним e_y за умовою на F, тому постійний шлях e_x є його підняттям з початком у x. Тоді $s \mapsto \widetilde{F}(0, s)$ дорівнює e_x в силу єдиності в лемі 3.8.1, тобто $\widetilde{F}(0, s) = x$ для будь-якого s.

Далі діємо аналогічно. Розглянемо шляхи $t \mapsto \widetilde{F}(t,0)$ і $t \mapsto \widetilde{F}(t,1)$. З доведеного вище випливає, що вони мають спільний початок у точці x. При цьому вони є підняттями шляхів $F(\cdot,0) = f$ і $F(\cdot,1) = g$ відповідно. З єдиності в лемі 3.8.1 маємо тоді, що вони повинні дорівнювати $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ відповідно, тобто $\widetilde{F}(t,0) = \widetilde{f}(t)$ і $\widetilde{F}(t,1) = \widetilde{g}(t)$ для будь-якого t. Зокрема, $\widetilde{F}(1,0) = \widetilde{f}(1)$. Позначимо цю точку через z. Тоді $s \mapsto \widetilde{F}(1,s)$ є підняттям $F(1,\cdot) = e_{f(1)}$ з початком у z, і знову ж з єдиності в лемі 3.8.1 випливає, що це e_z, тобто $\widetilde{F}(1,s) = z$ для будь-якого s, зокрема $\widetilde{g}(1) = \widetilde{F}(1,1) = z = \widetilde{f}(1)$. Встановлене вище означає, що $\widetilde{F}$ – гомотопія шляхів $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$.

■

Твердження про підняття гомотопії відображень з довільного простору, що можна використати для узагальнення попередньої леми, наведене у [17, с. 60]. Наслідком леми про накриваючу гомотопію є, зокрема, *теорема про монодромію* з комплексного аналізу, що встановлює достатні умови існування та єдиності *аналітичного продовження* функції комплексної змінної (див. [6, с. 156-159]). Інші застосування техніки піднять можна знайти у наступних вправах та у багатьох твердженнях параграфа 3.9.

Вправа 3.8.6. Нехай (X, Y, p) – накриття, де простір Y локально лінійно зв'язний. Показати, що тоді будь-яка відкрита однозв'язна підмножина Y є правильно накритою.

Вправа 3.8.7. Відображення топологічних просторів $p\colon X \to Y$ зветься *локальним гомеоморфізмом*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $p(U)$ відкрита і обмеження $p|_U\colon U \to p(U)$ – гомеоморфізм (відносно індукованих топологій).

1. Показати, що будь-який локальний гомеоморфізм є неперервним відкритим відображенням. Вивести з цього, що відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли це бієкція і локальний гомеоморфізм.

2. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p є локальним гомеоморфізмом.

3. Нехай $p\colon X \to Y$ – сюр'єктивний локальний гомеоморфізм хаусдорфових локально лінійно зв'язних топологічних просторів, що є *власним відображенням*, тобто прообрази компактних підмножин Y компактні в X. Показати, що тоді (X, Y, p) – накриття і що, крім того, воно *скінченнолистове*, тобто шар над будь-якою точкою скінченний. Підказка: спочатку показати, що для відображення p виконується твердження леми 3.8.1.

3.9 Накриття та фундаментальні групи

У цьому параграфі ми нарешті сформулюємо і доведемо результати (теорему 3.9.2 і наслідок 3.9.3), що дозволять обчислювати фундаментальні групи топологічних просторів за допомогою накрить. Необхідні для цього алгебраїчні поняття та конструкції містяться у доповненні (зокрема, означення A.14–A.22, твердження A.19 і A.23). Почнемо з дослідження властивостей індукованого гомоморфізма накриваючого відображення для довільного накриття.

Твердження 3.9.1. *Нехай* (X, Y, p) *– накриття, а* $p_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ *– гомоморфізм фундаментальних груп, що індукований відображенням* p *у деякій точці* $x \in X$*, де* $y = p(x) \in Y$*.*

1. *Гомоморфізм* p_* *є ін'єктивним.*

2. *Гомотопічний клас деякої петлі* f *в* y *міститься в образі* p_* *тоді й тільки тоді, коли підняття* f *у накриваючий простір з початком у* x *має кінець теж у* x*, тобто є петлею в* x*.*

При цьому за пунктом 2. твердження A.23 образ $\operatorname{Im} p_* = p_*(\pi_1(X, x))$ гомоморфізма p_* є підгрупою групи $\pi_1(Y, y)$, а з ін'єктивності та наслідку A.25 випливає, що $\pi_1(X, x) \simeq p_*(\pi_1(X, x))$.

Доведення.

1. З пункту 1. твердження A.23 випливає, що достатньо перевірити рівність $\operatorname{Ker} p_* = \{[e_x]\}$. Нагадаємо, що $p_*([f]) = [p \circ f]$ для будь-якого гомотопічного класу петель $[f] \in \pi_1(X, x)$. Нехай $[f] \in \operatorname{Ker} p_*$, тобто $[e_y] = p_*([f]) = [p \circ f]$, що означає гомотопність петель e_y і $p \circ f$. (Єдині за лемою 3.8.1) підняття цих петель в X з початком у x – це e_x і f відповідно. Тоді з леми 3.8.5 отримуємо, що $e_x \sim f$, тобто $[f] = [e_x]$. Це й означає, що $\operatorname{Ker} p_* = \{[e_x]\}$.

2. Дійсно, клас $[f] \in \pi_1(Y, y)$ належить до $p_*(\pi_1(X, x))$ тоді й тільки тоді, коли має вигляд $p_*([\widetilde{g}]) = [p \circ \widetilde{g}]$ для деякої петлі $\widetilde{g}$ в x, що є (єдиним за лемою 3.8.1) підняттям петлі $g \coloneqq p \circ \widetilde{g}$ з початком у x. При цьому рівність $[f] = [p \circ \widetilde{g}] = [g]$ еквівалентна в силу леми 3.8.5 тому, що підняття $\widetilde{f}$ петлі f з початком у x гомотопне $\widetilde{g}$ і тому теж є петлею (точніше, ця лема потрібна для доведення необхідності, а при доведенні достатності можна просто покласти $\widetilde{g} \coloneqq \widetilde{f}$).

∎

Теорема 3.9.2 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття)**.** *Нехай* X *та* Y *– лінійно зв'язні топологічні простори, а* (X, Y, p) *– накриття.*

1. *Для будь-яких $y \in Y$ та $x \in p^{-1}(y)$ існує бієкція між множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, y)$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ і шаром $p^{-1}(y)$.*

2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/_G, p)$, де G – група, що діє на X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проєкція, то $p_*(\pi_1(X, x))$ – нормальна підгрупа $\pi_1(X/_G, G \cdot x)$ для будь-якої $x \in X$, і бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/_G, G \cdot x)/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq G.$$

Якщо простір X лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то з неперервності й сюр'єктивності p випливає, що простір $Y = p(X)$ також лінійно зв'язний, тому умову на нього можна прибрати з формулювання теореми. Те, що у пункті 1. йдеться саме про праві класи, теж насправді несуттєве, бо між множинами лівих та правих класів суміжності за підгрупою існує бієкція. У пункті 2. ми використовуємо твердження 3.7.11 (згідно з яким $(X, X/_G, p)$ – дійсно накриття) і ототожнення шарів даного накриття з групою G із зауваження після цього твердження. Якщо, як у пункті 2., $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(Y, y)$, то визначена в силу твердження A.19 факторгрупа $\pi_1(Y, y)/p_*(\pi_1(X, x))$, що знаходиться у бієктивній відповідності з шаром $p^{-1}(y)$ за пунктом 1., інколи зветься *групою монодромії* накриття (X, Y, p) у точці x (див. також теорему 3.9.19 та наслідок 3.9.21 далі).

Доведення.

Отже, нехай $x \in X$ і $y = p(x)$. Для кожного класу петель $[f] \in \pi_1(Y, y)$ нехай f – деякий його представник (петля в y), а $\widetilde{f}$ – підняття петлі f з початком у x (що існує і єдине за лемою 3.8.1). Воно повинне закінчуватися у деякій точці з $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(y)$. Покладемо $\alpha([f]) := \widetilde{f}(1)$ (див. рис. 3.10). Покажемо перш за все, що так можна коректно визначити відображення $\alpha\colon \pi_1(Y, y) \to p^{-1}(y)$. Нехай f і g – петлі в y, для яких $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$. Тоді $\widetilde{f} \sim \widetilde{g}$ за лемою 3.8.5, зокрема, $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Це й означає коректність визначення α. Перевіримо, що це відображення сюр'єктивне. Оскільки X лінійно зв'язний, для будь-якої $z \in p^{-1}(y)$ існує шлях h, що з'єднує x і z. Тоді $(p \circ h)(0) = p(x) = y$

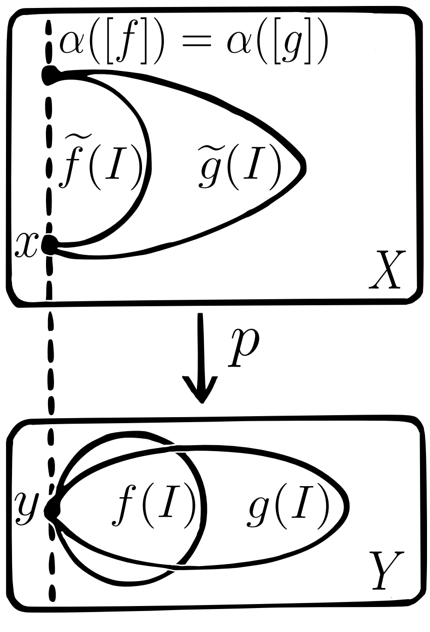


Рис. 3.10: Побудова відображення з фундаментальної групи у шар

і $(p\circ h)(1) = p(z) = y$, тобто $p\circ h$ – петля в y, і в наших позначеннях $h = \widetilde{p\circ h}$ (підняття $p\circ h$ з початком у x), тому $\alpha([p\circ h]) = h(1) = z$, що й демонструє сюр'єктивність α.

Позначимо $H := p_*(\pi_1(X,x))$. Як зазначалося вище, це підгрупа групи $\pi_1(Y,y)$. Щоб довести пункт 1., нам залишилося показати, що $\alpha([f]) = \alpha([g])$ тоді й тільки тоді, коли рівні класи суміжності $H[f] = H[g]$ за H у $\pi_1(Y,y)$. Дійсно, у цьому випадку ми можемо факторизувати α у коректно визначене ін'єктивне відображення з множини правих класів суміжності $\pi_1(Y,y)$ за H у $p^{-1}(y)$, що визначене умовою $H[f]\mapsto \alpha([f]) = \widetilde{f}(1)$, і це буде сюр'єкцією, бо α – сюр'єкція. Так і отримаємо потрібну бієкцію.

Отже, нехай $\alpha([f]) = \alpha([g])$, тобто $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Тоді добуток шляхів $\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}$ визначений і є петлею в x, тому задає гомотопічний клас $[\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}] \in \pi_1(X,x)$. Звідси за означеннями маємо

$$[f][g]^{-1} = [f * \overline{g}] = [(p\circ \widetilde{f}) * \overline{(p\circ \widetilde{g})}] =$$
$$= [p\circ(\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}})] = p_*([\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}]) \in p_*(\pi_1(X,x)) = H.$$

Таким чином, $[f][g]^{-1}\in H$, що еквівалентне $H[f] = H[g]$ (чому?).

Тепер нехай $H[f] = H[g]$, тобто існує $[h]\in H$ таке, що $[f] = [h][g] = [h * g]$, отже $f\sim h*g$. Оскільки $[h]\in p_*(\pi_1(X,x))$, $\widetilde{h}(1) = x$ за пунктом 2. твердження 3.9.1. Тому визначений шлях $\widetilde{h}*\widetilde{g}$, що накриває $h*g$ і починається в x, тобто $\widetilde{h*g} = \widetilde{h}*\widetilde{g}$. Тоді

$$\alpha([f]) = \widetilde{f}(1) = \widetilde{h*g}(1) = \widetilde{h}*\widetilde{g}(1) = \widetilde{g}(1) = \alpha([g]),$$

де друга рівність випливає з гомотопності $f\sim h*g$ і леми 3.8.5. Це завершує доведення пункту 1.

Нехай тепер $(X,Y,p) = (X, X/_G, p)$, де група G діє на X неперервно та цілком розривно, і $x\in X$. Ототожнимо $p^{-1}(G\cdot x)$ з G як у зауваженні після твердження 3.7.11: $a\cdot x \leftrightarrow a$, де $a\in G$ (нагадаємо, що це бієкція, бо дія вільна). За допомогою цього ототожнення перетворимо α із доведення пункту 1. на відображення $\alpha\colon \pi_1(X/_G, G\cdot x)\to G$, тобто тепер у введених вище позначеннях $\widetilde{f}(1) = \alpha([f])\cdot x$ для кожного $[f]\in\pi_1(X/_G, G\cdot x)$. Тоді з уже доведеного випливає, що α коректно визначене та сюр'єктивне.

Покажемо, що α є гомоморфізмом груп $\pi_1(X/_G, G\cdot x)$ і G. Нехай $[f],[g]\in \pi_1(X/_G, G\cdot x)$. Для піднять $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ петель f і g відповідно з початком у x маємо $\widetilde{f}(1) = \alpha([f])\cdot x$ і $\widetilde{g}(1) = \alpha([g])\cdot x$. Тепер зауважимо, що шлях $\alpha([f])\cdot\widetilde{g} := \lambda_{\alpha([f])}\circ\widetilde{g}\colon t\mapsto \alpha([f])\cdot\widetilde{g}(t)$ теж накриває g, бо

$$(p\circ(\alpha([f])\cdot\widetilde{g}))(t) = G\cdot(\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(t)) = G\cdot\widetilde{g}(t) = (p\circ\widetilde{g})(t) = g(t)$$

для кожного t. Друга рівність тут випливає з того, що $\{a\,\alpha([f]) \mid a\in G\} = G$ (аналогічно до дослідження властивостей відображення p у доведенні твердження 3.7.11). Крім того, шлях $\alpha([f])\cdot\widetilde{g}$ починається в $\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(0) =$

$\alpha([f])\cdot x = \widetilde{f}(1)$. Тому визначений шлях $\widetilde{f} * (\alpha([f])\cdot\widetilde{g})$ з початком у $\widetilde{f}(0) = x$, що накриває $f * g$, тобто $\widetilde{f * g} = \widetilde{f} * (\alpha([f])\cdot\widetilde{g})$. Отже за означеннями

$$\alpha([f][g])\cdot x = \alpha([f * g])\cdot x = \widetilde{f * g}(1) = \widetilde{f} * (\alpha([f])\cdot\widetilde{g})(1) =$$

$$= \alpha([f])\cdot\widetilde{g}(1) = \alpha([f])\cdot(\alpha([g])\cdot x) = \alpha([f])\,\alpha([g])\cdot x,$$

звідки маємо $\alpha([f][g]) = \alpha([f])\,\alpha([g])$, що й означає гомоморфність α.

Зауважимо, що ядро α має вигляд $\operatorname{Ker}\alpha = H = p_*(\pi_1(X, x))$. Дійсно, з доведення пункту 1. випливає, що $\alpha([f]) = e = \alpha([e_{G\cdot x}])$ тоді й тільки тоді, коли $H[f] = H[e_{G\cdot x}] = H$, тобто $[f] \in H$. Тому, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/_G, G\cdot x)$ за пунктом 1. твердження A.23, і, оскільки гомоморфізм α сюр'єктивний, за пунктом 3. того ж твердження маємо ізоморфність

$$\pi_1(X/_G, G\cdot x)/p_*(\pi_1(X, x)) = \pi_1(X/_G, G\cdot x)/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha = G,$$

причому ізоморфізм отримуємо факторизацією α: $p_*(\pi_1(X, x))[f] \mapsto \alpha([f])$, тобто це та ж сама бієкція, що й у доведенні пункту 1. Це, у свою чергу, завершує доведення пункту 2.

■

Наслідок 3.9.3 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою універсального накриття)**.** *Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття.*

1. *Для будь-якої $y \in Y$ існує бієкція між фундаментальною групою $\pi_1(Y, y)$ і шаром $p^{-1}(y)$.*
2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/_G, p)$, де G – група, що діє на просторі X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проєкція, то для будь-якої $x \in X$ бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/_G, G\cdot x) \simeq G.$$

Доведення. Якщо накриття універсальне, то простір X однозв'язний. Тобто X (а отже й Y) лінійно зв'язний, і $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\}$ для $x \in p^{-1}(y)$. Тому твердження пунктів 1. і 2. випливають з відповідних пунктів попередньої теореми разом з прикладом A.21.

■

Результат пункту 2. цього наслідку можна записати у спрощених позначеннях (див. зауваження після наслідку 3.4.8) в силу лінійної зв'язності X: $\pi_1(X/_G) \simeq G$.

Твердження 3.9.4. *Якщо накриваючий простір X накриття (X, Y, p) лінійно зв'язний, а його база Y однозв'язна, то p – гомеоморфізм.*

Доведення. З пункту 1. твердження 3.9.1 і зауваження після його формулювання випливає, що для будь-якої $x \in X$ і $y = p(x)$ група $\pi_1(X, x)$ ізоморфна підгрупі $p_*(\pi_1(X, x))$ групи $\pi_1(Y, y)$. Але у нас простір Y однозв'язний, тобто $\pi_1(Y, y) = \{[e_y]\}$ тривіальна. Тому $\pi_1(X, x)$ теж тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$. Це означає, що X однозв'язний, тому накриття універсальне. Тоді за пунктом 1. наслідку 3.9.3 кожний шар $p^{-1}(y)$ складається з однієї точки, отже сюр'єкція p є бієкцією. Вона неперервна за означенням та відкрита в силу вправи 3.7.3. Отже p – дійсно гомеоморфізм, а накриття тривіальне, як у прикладі 3.7.2.

■

Приклад 3.9.5. Накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ з прикладу 3.7.15 побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}^n$ і є універсальним. Тому з пункту 2. наслідку 3.9.3 отримуємо, що для будь-якої $y \in T^n$ фундаментальна група n-вимірного тора T^n у точці y ізоморфна $\mathbb{Z}^n$: $\pi_1(T^n, y) \simeq \mathbb{Z}^n$ (або просто $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, див. зауваження після згаданого наслідку). Зокрема, для $n = 1$ маємо $\pi_1(S^1, y) = \pi_1(T^1, y) \simeq \mathbb{Z}$.

За побудовою у доведенні теореми 3.9.2, щоб знайти образ при цьому ізоморфізмі гомотопічного класу петлі f у точці $y \in S^1$, потрібно побудувати підняття f у накриваючий простір, тобто пряму $\mathbb{R}$, з початком у деякій $x \in p^{-1}(y)$ (тобто $y = e^{2\pi i x}$). Це підняття закінчиться у точці $x + k$, де $k \in \mathbb{Z}$ й буде образом класу $[f]$. Неформально кажучи, k – це кількість повних обертів (з урахуванням орієнтації) петлі f навколо центру кола (див. рис. 3.11). Аналогічно будуються образи класів петель і для довільного n.

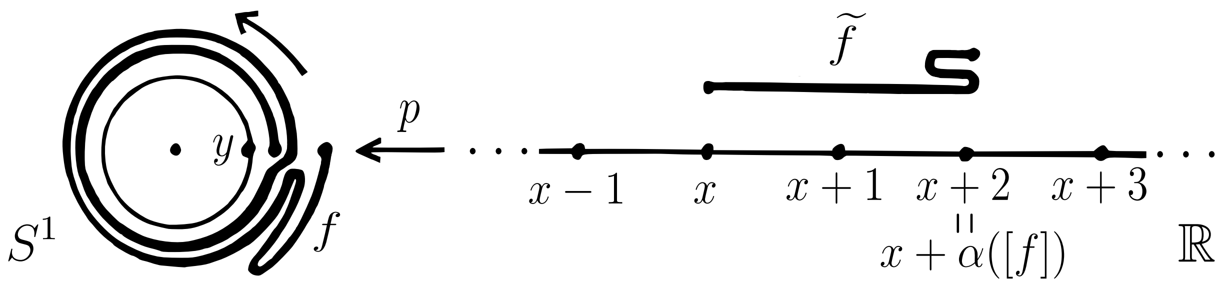


Рис. 3.11: Універсальне накриття і обчислення фундаментальної групи кола

Зауважимо також, що цей результат узгоджений з твердженням 3.5.5: згідно з його очевидним узагальненням, для кожної точки тора маємо

$$\pi_1(T^n, y) = \pi_1\Big(\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}, \big(e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n}\big)\Big) \simeq$$

$$\simeq \pi_1\big(S^1, e^{2\pi i x^1}\big) \times \ldots \times \pi_1\big(S^1, e^{2\pi i x^n}\big) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n} \simeq \mathbb{Z}^n.$$

У літературі ця група також позначається $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ (див. приклад A.13).

Приклад 3.9.6. Аналогічним чином, дволистове накриття $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ з прикладу 3.7.16, що побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}_2$, є універсальним при $n \geqslant 2$. Тому для кожної $y \in \mathbb{R}P^n$ фундаментальна група $\pi_1(\mathbb{R}P^n, y) \simeq \mathbb{Z}_2$ (або просто $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$) згідно з пунктом 2. наслідку 3.9.3. Зауважимо, що при $n = 1$ проєктивна пряма $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна колу S^1 (див. приклад 2.4.10), тому $\pi_1(\mathbb{R}P^1, y) \simeq \mathbb{Z}$ для будь-якої y за гомотопічною інваріантністю та попереднім прикладом.

Приклад 3.9.7. Розглянемо n-листове накриття (S^1, S^1, p) з прикладу 3.7.17, де $p\colon S^1 \to S^1\colon e^{it} \mapsto e^{int}$ відповідає дії групи $G = \mathbb{Z}_n$. Тоді для кожної $x \in S^1$ факторгрупа $\pi_1(S^1, p(x))/p_*(\pi_1(S^1, x))$ повинна бути ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ за пунктом 2. теореми 3.9.2. Перевіримо це безпосередньо. У прикладі 3.9.5 було встановлено, що $\pi_1(S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, p(x)) \simeq \mathbb{Z}$ – група, що складається з елементів вигляду $[f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$, де $[f]$ – гомотопічний клас будь-якої петлі f, яка робить один оберт навколо центру кола у додатному напрямку й відповідає таким чином $1 \in \mathbb{Z}$ при ізоморфізмі (чому?). Іншими словами, це твірна цієї групи у термінології прикладу A.7. Якщо $x = e^{2\pi i\, t_0}$, то в якості такої петлі можна взяти $f\colon t \mapsto e^{2\pi i\,(t_0+t)}$. Тоді $p(f(t)) = e^{2\pi i\, n(t_0+t)}$ для кожного $t \in I$, тому $p \circ f$ робить n обертів навколо центру кола у додатному напрямку й піднімається у відрізок в універсальному накриваючому просторі $\mathbb{R}$ кола (див. приклад 3.9.5), що сполучає точки nt_0 і $nt_0 + n$, а отже елемент $p_*([f]) = [p \circ f]$ фундаментальної групи $\pi_1(S^1, p(x))$ відповідає числу $n \in \mathbb{Z}$. Тоді в силу гомоморфності p_* підгрупа $p_*(\pi_1(S^1, x)) \subset \pi_1(S^1, p(x))$, у свою чергу, складається зі степенів $[p \circ f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$ і таким чином відповідає підгрупі $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n (див. приклад A.24). Отже, наш ізоморфізм приймає вигляд $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. Більш того, це той самий ізоморфізм, що описаний у прикладі A.24 (перевірте це).

Приклад 3.9.8. Оскільки n-листове накриття $(S^3, L(n, m), p)$ лінзового простору $L(n, m)$, що побудоване у прикладі 3.7.18 для будь-яких взаємно простих натуральних чисел $m < n$ за допомогою дії групи $\mathbb{Z}_n$ на S^3, є універсальним, за пунктом 2. наслідку 3.9.3 фундаментальна група цього простору $\pi_1(L(n, m), y)$ у будь-якій точці $y \in L(n, m)$ ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ (або просто $\pi_1(L(n, m)) \simeq \mathbb{Z}_n$; зауважимо, що лінзові простори лінійно зв'язні в силу лінійної зв'язності сфери S^3).

Приклад 3.9.9. Нехай $Y = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою y (див. вправу 2.3.8). Побудуємо його універсальне накриття. Для цього почнемо з підмножини

$$X_0 \coloneqq [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

площини $\mathbb{R}^2$ (тобто "хреста", що зображений на рис. 3.12 зліва). На цій множині можна ввести відношення еквівалентності $\sim$ умовами $(1, 0) \sim (-1, 0)$

і $(0,1) \sim (0,-1)$ (інші точки еквівалентні лише собі), склеївши кінці відрізків. Тоді $X_0/_\sim \cong S^1 \vee S^1$ аналогічно до прикладу 2.2.12, причому канонічна проєкція відповідає відображенню $p_0\colon X_0 \to S^1 \vee S^1$, що, зокрема, переводить точку $(0,0)$ в y. Але $(X_0, S^1 \vee S^1, p_0)$ не буде накриттям (чому?). Втім, на основі цієї ідеї дійсно можна побудувати накриття наступним чином.

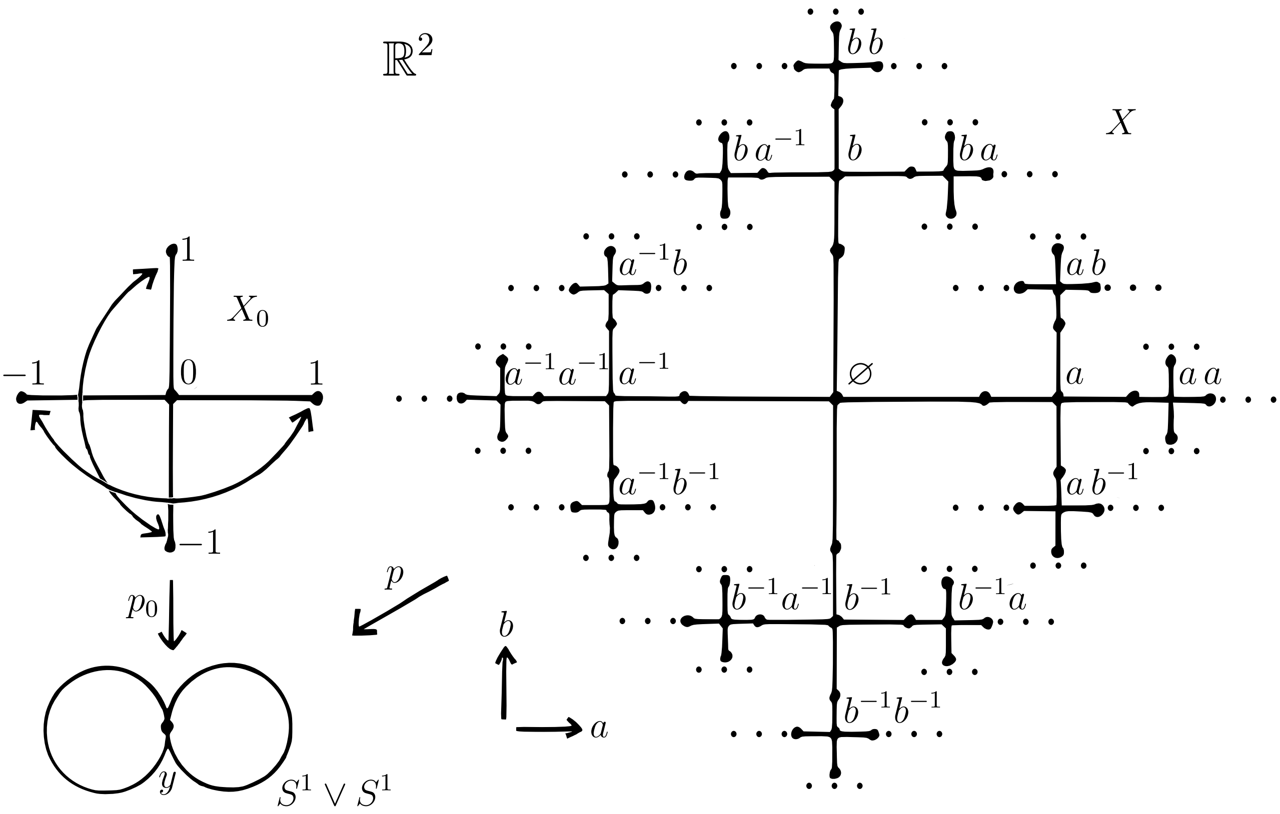


Рис. 3.12: Побудова універсального накриття букета двох кіл

Покладемо $X \coloneqq (\langle a,b\rangle \times X_0)/_\sim$, де вільна група з 2 твірними $\langle a,b\rangle$ (див. приклад A.7) наділена дискретною топологією, а відношення еквівалентності $\sim$ визначене умовами $(W,(1,0)) \sim (Wa,(-1,0))$ і $(W,(0,1)) \sim (Wb,(0,-1))$ для будь-якого слова $W \in \langle a,b\rangle$ (інші точки еквівалентні лише собі). Таким чином, простір X утворюється склеюванням копій X_0, що індексовані елементами $\langle a,b\rangle$. Його можна вкласти в $\mathbb{R}^2$, як показано на рис. 3.12 справа (зображені лише копії X_0, що відповідають словам довжини не більшої за 2; самі ці слова позначають центри відповідних "хрестів"; при цьому при збільшенні слова на один символ ми зменшуємо "хрест" удвічі і приклеюємо до існуючої конструкції відповідно до відношення еквівалентності). Визначимо дію групи $\langle a,b\rangle$ на просторі X умовою $W_1 \cdot [(W_2,(x,y))] \coloneqq [(W_1W_2,(x,y))]$ для будь-яких слів $W_1, W_2 \in \langle a,b\rangle$ і будь-якої $(x,y) \in X_0$, де квадратні дужки позначають клас еквівалентності відносно $\sim$.

Вправа 3.9.10. Показати, що простір X є однозв'язним (більш того, стягжним), дія $\langle a,b\rangle$ на ньому – коректно визначеною, неперервною та цілком розривною, і що відображення $\langle a,b\rangle \cdot [(W,(x,y))] \mapsto p_0(x,y)$ коректно задає гомеоморфізм між простором орбіт $X/_{\langle a,b\rangle}$ і $S^1 \vee S^1$.

Ототожнимо $X/_{\langle a,b\rangle}$ і $S^1 \vee S^1$ за допомогою цього гомеоморфізма. Тоді відображення $p\colon X \to S^1 \vee S^1\colon [(W,(x,y))] \mapsto p_0(x,y)$ відповідатиме канонічній проєкції. Воно, зокрема, переводить центри усіх "хрестів" у точку y. Таким чином, $(X, S^1 \vee S^1, p)$ – універсальне накриття за попередньою вправою і твердженням 3.7.11. З пункту 2. наслідку 3.9.3 тоді випливає, що $\pi_1(S^1 \vee S^1, y) \simeq \langle a,b\rangle$ (або просто $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a,b\rangle$ в силу лінійної зв'язності $S^1 \vee S^1$). Таким чином, отримали перший приклад неабелевої фундаментальної групи. Різні (не тільки універсальне) накриття цього простору також описані та візуалізовані у [17, с. 57-60].

Вправа 3.9.11. Аналогічним чином показати, що фундаментальна група букета довільного натурального числа n кіл $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$ ізоморфна вільній групі з n твірними $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, що описана у прикладі A.7 (при $n = 1$ це випливає з прикладу 3.9.5).

Вправа 3.9.12. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – попарно різні точки $\mathbb{R}^2$. Показати, що простір $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ гомотопічно еквівалентний $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$ (при $n = 1$ це встановлено у прикладі 3.2.15), а отже його фундаментальні групи також ізоморфні вільній групі з n твірними в силу гомотопічної інваріантності та попередньої вправи.

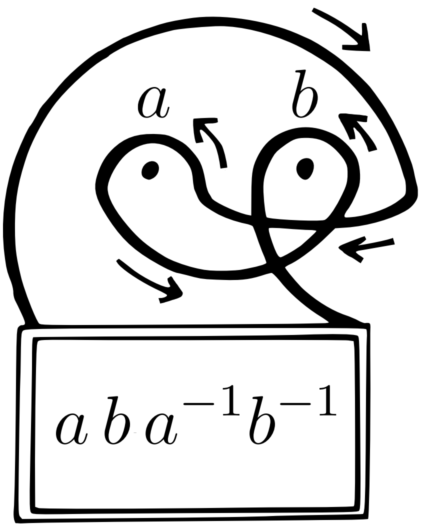


Рис. 3.13: Задача про картину

Фундаментальна група простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ (або $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$) використовується, зокрема, у т. зв. *задачах про картини*. Найпростіша з них формулюється наступним чином. У стіну вбито два цвяхи. Треба закрутити навколо них мотузку, на якій висить картина, таким чином, щоб вона висіла, але падала, якщо вийняти зі стіни будь-який з цвяхів. З попередньої вправи, гомотопічної інваріантності фундаментальної групи і прикладу 3.9.9 випливає, що фундаментальна група площини без двох різних точок (цвяхів) ізоморфна $\langle a,b\rangle$, де твірні a і b відповідають (аналогічно до прикладу 3.9.5) обертанням навколо цвяхів. Тоді для розв'язку задачі нам достатньо знайти нетривіальний елемент фундаментальної групи (слово), що перетворюється на тривіальний (порожнє слово) після викреслювання з нього усіх символів a і a^{-1} або b і b^{-1}, і задає гомотопічний клас потрібного розташування мотузки. Найпростішим таким словом є т. зв. *комутатор* $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ елементів a і b. Відповідне йому закручування мотузки зображене на рис. 3.13. Як бачимо, воно дійсно задовольняє умові задачі. Огляд задач такого типу та потрібної для них математичної техніки див. у [12].

Виявляється, що будь-яка група G є фундаментальною групою деякого топологічного простору. Більш того, завжди можна побудувати неперервну та цілком розривну дію G на деякому стяжному просторі, а отже G є фундаментальною групою простору орбіт цієї дії в силу твердження 3.7.11 та пункту 2. наслідку 3.9.3. Такі простори орбіт, що, як виявляється, визначаються групою G з точністю до гомотопічної еквівалентності, звуться *просторами Ейленберга – Маклейна* групи G і позначаються через $K(G,1)$. Їх конструкції, приклади та застосування описані у [17, с. 87-96]. Однозначна визначеність гомотопічного типу простору $K(G,1)$ групою G дозволяє використання інших гомотопічних інваріантів (таких як *групи когомологій*) для дослідження груп та мотивує знаходити чисто алгебраїчні описи цих інваріантів (див., наприклад, [13, с. 776-838]). Загальний простір Ейленберга – Маклейна $K(G,n)$ для довільного натурального n визначається як лінійно зв'язний топологічний простір X, для якого $\pi_n(X) \simeq G$, а решта гомотопічних груп тривіальні (див. зауваження після означення 3.4.3 і наслідку 3.4.8). Тут G повинна бути абелевою групою при $n \geqslant 2$. Деталі див. у [17, с. 365-366].

Зокрема, з прикладу 3.9.5 випливає, що простором Ейленберга – Маклейна $K(\mathbb{Z}^n,1)$ є T^n, а з розв'язку вправи 3.9.11 можна вивести, що такий простір вільної групи з n твірними $K(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,1)$ – це $\underbrace{S^1\vee\ldots\vee S^1}_{n}$ (або ж $\mathbb{R}^2\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$ в силу вправи 3.9.12, бо цей простір визначений з точністю до гомотопічної еквівалентності). З іншого боку, $\mathbb{R}P^n$ при $n\geqslant 2$ і $L(n,m)$ з прикладів 3.9.6 і 3.9.8 не є просторами $K(\mathbb{Z}_2,1)$ і $K(\mathbb{Z}_n,1)$ відповідно, бо їхні універсальні накриваючі простори (що визначені однозначно з точністю до гомеоморфізма, див. далі теорему 3.9.27 і обговорення після неї) – сфери – не є стяжними, що доводиться, наприклад, у [17, с. 361] з використанням вищих гомотопічних груп.

Іншим простором, фундаментальна група якого ізоморфна довільній G, є факторпростір т. зв. *комплексу Келі*, що будується за допомогою *графа Келі* цієї групи. Ця конструкція описана у [17, с. 77-78], а слово "комплекс" тут використовується у сенсі, що пояснений у [17, с. 5-8]. Комплекс Келі є однозв'язним, але не обов'язково стяжним простором, і на ньому G також діє неперервно та цілком розривно, тому G є фундаментальною групою відповідного простору орбіт.

Наприклад, для вільної групи з двома твірними комплексом (і графом) Келі буде простір X з прикладу 3.9.9. Те ж буде справедливим і для узагальнення цього накриваючого простору, яке потрібно побудувати у розв'язку вправи 3.9.11.

Також у зв'язку з теоремою 3.9.2 та наслідком 3.9.3 виникають природні питання застосовності цього метода обчислення фундаментальної групи: за яких умов для даного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p), чи є воно єдиним (принаймні з точністю до якого-небудь відношення еквівалентності) і коли його можна представити у вигляді $(X, X/_G, p)$ для неперервної та цілком розривної дії деякої групи G? Нижче наведені результати, що відповідають на ці питання. Їх доведення та подальшу інформацію можна знайти, наприклад, у [17, с. 56-82], [20, с. 162-175] або [24, с. 477-500]. Почнемо з відповіді на третє питання, для якої знадобляться деякі додаткові поняття і конструкції.

Означення 3.9.13. *Ізоморфізмом* накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) зі спільною базою Y зветься гомеоморфізм $\varphi\colon X \to Z$ такий, що $q \circ \varphi = p$. Якщо існує ізоморфізм накрить $\varphi\colon X \to Z$, то говорять, що (X, Y, p) *ізоморфне* (Z, Y, q) (або що вони ізоморфні). *Автоморфізмом* накриття (X, Y, p) зветься його ізоморфізм на себе.

Твердження 3.9.14. *Ізоморфність є відношенням еквівалентності накрить зі спільною базою Y.*

Умову $q \circ \varphi = p$ з означення ізоморфізма накрить можна представити у вигляді комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

топологічних просторів та непервних відображень. За означенням, гомеоморфізм $\varphi\colon X \to X$ є автоморфізмом накриття (X, Y, p), якщо $p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить будь-який шар $p^{-1}(y)$ цього накриття на себе, переставляючи його елементи. Зокрема, англійською автоморфізм накриття зветься з цієї причини *deck transformation* – "перетворенням колоди" (карт). Множину усіх автоморфізмів накриття (X, Y, p) позначатимемо через $\operatorname{Aut}(X, Y, p)$. Наступне твердження демонструє, що за додаткової умови лінійної зв'язності просторів X та Y це якраз і буде потрібна нам група, що діє на X неперервно та цілком розривно:

Твердження 3.9.15. *Для будь-якого накриття (X, Y, p) множина його автоморфізмів $\operatorname{Aut}(X, Y, p)$ з операцією композиції є групою. Умова $\varphi \cdot x := \varphi(x)$ для $\varphi \in \operatorname{Aut}(X, Y, p)$ та $x \in X$ визначає неперервну дію цієї групи на X. Якщо до того ж топологічні простори X та Y лінійно зв'язні, то ця дія цілком розривна.*

Як було зауважено після формулювання теореми 3.9.2, тут достатньо вимагати лінійну зв'язність лише від X, але ми й надалі будемо записувати цю умову також і для Y з міркувань симетрії. У подальшому ми будемо мати на увазі саме таку дію групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ на X. З іншого боку, у випадку накриття простору орбіт $(X, X/_G, p)$ з твердження 3.7.11 у нас вже є група G, що діє неперервно та цілком розривно на X. Виявляється, що для лінійно зв'язного X можна побудувати канонічним чином ізоморфізм між групами G і $\mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$, що пов'язує ці дії:

Твердження 3.9.16. *Якщо група G діє на лінійно зв'язному топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, то відображення $G \to \mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$, що ставить у відповідність елементу групи $a \in G$ гомеоморфізм $\lambda_a \colon X \to X$, є ізоморфізмом груп.*

Хоча ми й знаємо тепер, що група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на лінійно зв'язному накриваючому просторі X неперервно та цілком розривно, залишається питання, коли база Y є простором орбіт. Сформулюємо тепер необхідну та достатню умову того, що це так, тобто (X, Y, p) у певному сенсі еквівалентне накриттю простору орбіт $X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ дії з твердження 3.9.15:

Твердження 3.9.17. *Нехай X та Y – лінійно зв'язні топологічні простори, а (X, Y, p) – накриття. Тоді група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$ тоді й тільки тоді, коли існує гомеоморфізм $\psi \colon Y \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ такий, що*

$$\psi(p(x)) = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x$$

для будь-якої точки $x \in X$.

Умова на ψ з цього твердження еквівалентна комутативності діаграми

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[rr, "\psi"] & & X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)} \end{tikzcd}$$

просторів та непервних відображень. Тут права стрілочка – канонічна проєкція на простір орбіт. Пор. з наведеною вище діаграмою, що ілюструє означення ізоморфізма. Аналогічним чином можна визначити ще одне відношення еквівалентності накрить – цього разу зі спільним накриваючим простором X (як саме?). Накриття з властивістю, що описана у твердженні 3.9.17, мають спеціальну назву:

Означення 3.9.18. Накриття (X, Y, p), де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, зветься *регулярним* (або *накриттям Галуа*), якщо група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.

Виявляється, що для будь-якого накриття (X, Y, p) простір X є локально лінійно зв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y (покажіть це), тому виконання цієї умови достатньо вимагати від будь-якого з цих просторів, але ми знову ж далі будемо записувати її для обох з міркувань симетрії. Наведемо тепер зручний алгебраїчний критерій регулярності накриття:

Теорема 3.9.19. *Накриття (X, Y, p), де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, є регулярним тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$.*

Пор. з нормальністю підгрупи у пункті 2. теореми 3.9.2: там вона випливала саме з того, що накриття мало потрібний нам вигляд. З лінійної зв'язності простору X можна вивести, що "для будь-якої $x \in X$" у формулюванні теореми можна за потреби замінити на "існує така $x \in X$, що".

Наслідок 3.9.20. *Будь-яке універсальне накриття лінійно зв'язного та локально лінійно зв'язного топологічного простору є регулярним.*

З пунктів 2. теореми 3.9.2 та наслідку 3.9.3 тоді отримаємо наступне:

Наслідок 3.9.21. *Якщо накриття (X, Y, p) регулярне, то його групи монодромії ізоморфні його групі автоморфізмів:*

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq \mathrm{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $x \in X$. Якщо це накриття є універсальним, то

$$\pi_1(Y, y) \simeq \mathrm{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $y \in Y$.

Перейдемо до питань про умови існування та можливу єдиність універсального накриття. Насправді наша відповідь буде стосуватися набагато більш широкого класу накрить. Для того, щоб її сформулювати, спочатку введемо локальний аналог поняття однозв'язності:

Означення 3.9.22. Топологічний простір X будемо називати *напівлокально однозв'язним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що будь-яка петля в x підпростору U гомотопна постійній у X.

Приклад 3.9.23. Будь-який однозв'язний (зокрема стяжний) простір є напівлокально однозв'язним: достатньо взяти $U = X$.

Приклад 3.9.24. Коло S^1 є прикладом неоднозв'язного (згідно з прикладом 3.9.5), але напівлокально однозв'язного простору: у якості U можна взяти будь-яку відкриту дугу, що містить x, тоді потрібна властивість випливає з її однозв'язності.

Приклад 3.9.25 ("Гавайська сережка"). Розглянемо підмножину $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ площини $\mathbb{R}^2$, де S_n – коло радіуса $\frac{1}{n}$ з центром у $(\frac{1}{n}, 0)$ (див. рис. 3.14). Будь-який відкритий (у індукованій з площини топології цього простору) окіл U точки $x = (0,0)$ міститиме для достатньо великого n коло S_n, що є носієм деякого шляха, негомотопного e_x (знову ж в силу прикладу 3.9.5). Отже, цей простір не є напівлокально однозв'язним. Тому він не має універсального накриття в силу наступного твердження.

Твердження 3.9.26. *Якщо у топологічного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p), то Y напівлокально однозв'язний.*

Теорема 3.9.27 (Про існування та єдиність накрить)**.** *Нехай топологічний простір Y лінійно зв'язний, локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний, а $y \in Y$ – деяка його точка. Тоді для будь-якої підгрупи $H \subset \pi_1(Y, y)$ існує накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язним X та відміченою точкою $x \in X$ таке, що $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = H$. Це накриття є единим з точністю до ізоморфізма у наступному сенсі: якщо (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття з лінійно зв'язними X і Z та відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно такі, що $p(x) = q(z) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = q_*(\pi_1(Z, z)) = H$, то існує єдиний гомеоморфізм $\varphi\colon X \to Z$ такий, що $\varphi(x) = z$ і $q \circ \varphi = p$.*

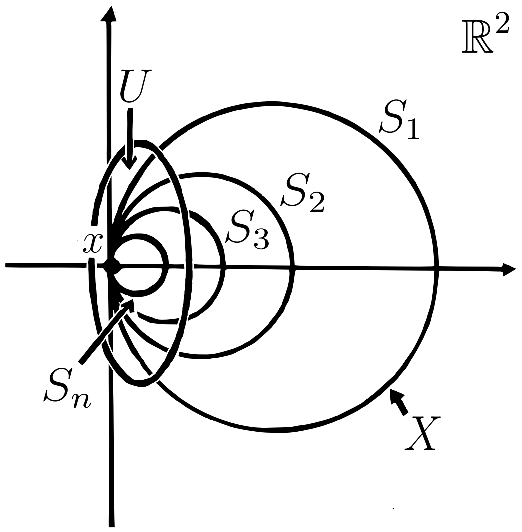


Рис. 3.14: "Гавайська сережка"

Таким чином, підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ певним чином визначає накриття. Тому вона інколи називається *групою накриття* (X, Y, p) у точці x. Обираючи в умовах цієї теореми нормальні підгрупи H, матимемо регулярні накриття в силу теореми 3.9.19, зокрема універсальне (для $H = \{[e_y]\}$; з пункту 1. твердження 3.9.1 і зауваження після його формулювання тоді випливатиме, що $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$). Бачимо, що теорема 3.9.27 дійсно відповідає на перші два з наших питань.

Теорема 3.9.27 разом з пунктом 1. твердження 3.9.1 дозволяє, зокрема, використовувати техніку накрить для дослідження підгруп. Наприклад, накриття букета двох кіл $S^1 \vee S^1$, що зображені на [17, с. 58] та аналогічні до них демонструють, що вільна група з двома твірними $\langle a, b\rangle$, що є (з точністю до ізоморфізма) фундаментальною групою цього простору згідно з прикладом 3.9.9, містить підгрупи, що ізоморфні вільним групам з довільною скінченною кількістю твірних та навіть вільній групі зліченного рангу, тобто зі зліченною множиною твірних (див. узагальнене означення вільної групи наприкінці прикладу A.7), бо саме такі групи є фундаментальними для перелічених там накриваючих просторів.

Той факт, що усі ці простори мають саме вільні фундаментальні групи, теж не є випадковим. Справа у тому, що букети кіл є *графами*, тобто *одновимірними клітинними просторами* (*CW-просторами*, *CW-комплексами*), що утворюються склеюванням деякої множини відрізків (*ребер графа*) кінцями, класи еквівалентності яких перетворюються на *вершини графа* (див. точні означення у [17, с. 5-8, 83]), а будь-який накриваючий простір графа теж є графом, як показано у [17, с. 85]. У свою чергу, фундаментальні групи графа є вільними, що доводиться у [17, с. 83-85]. Це випливає з того, що будь-який (лінійно) зв'язний граф містить стяжну підмножину (*максимальне дерево*), що включає усі його вершини, а факторизація за такою підмножиною (тобто "стягування" усіх вершин в одну) дає гомотопічно еквівалентний простір, що гомеоморфний букету кіл. Фундаментальна ж група такого простору є вільною за вправою 3.9.11 та її узагальненням на нескінченні букети кіл. Таким чином, кожна підгрупа $H \subset \langle a, b\rangle$ згідно з теоремою 3.9.27 ізоморфна фундаментальній групі лінійно зв'язного накриваючого простору деякого накриття $S^1 \vee S^1$, що є графом, отже H ізоморфна вільній групі. Ці міркування залишаються вірними для вільних груп з довільною (зокрема нескінченною) множиною твірних та дають відносно нескладне топологічне доведення наступної класичної теореми з теорії груп (див. також детальне викладення у [24, с. 501-515]):

Теорема 3.9.28 (Нільсен – Шраєр)**.** *Будь-яка підгрупа вільної групи ізоморфна вільній групі.*

Існують й інші техніки для обчислення фундаментальних груп, наприклад, *теорема Зейферта – ван Кампена*. Її різні формулювання, доведення та приклади застосування можна знайти у [17, с. 40-55], [20, с. 176-208], [22, с. 251-275] та [24, с. 407-445].

3.10 Застосування фундаментальної групи

Результати, що будуть отримані у цьому параграфі, нагадують застосування зв'язності та теореми про проміжне значення у параграфах 2.10 і 2.12. Якщо там ми використовували здебільшого зв'язність сфери S^n при $n \geqslant 1$ і незв'язність S^0, то тут будемо головним чином спиратися на однозв'язність S^n при $n \geqslant 2$ (що встановлена у прикладі 3.6.4) і неоднозв'язність S^1 (приклад 3.9.5). Почнемо з доведень негомеоморфності.

Приклад 3.10.1. Покажемо, що $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$. Дійсно, якщо припустити існування гомеоморфізма f між цими просторами, то простір $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ повинен бути гомеоморфним $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ за наслідком 1.10.11. Зокрема, ці простори повинні бути гомотопічно еквівалентними. Але згідно з прикладом 3.2.15 (точніше, його очевидним узагальненням на простір без довільної точки) вони гомотопічно еквівалентні S^1 і S^{n-1} відповідно. Оскільки перший з цих просторів неоднозв'язний, а другий однозв'язний, це суперечить гомотопічній інваріантності фундаментальної групи.

Вірне й твердження, що узагальнює приклади 2.10.29 і 3.10.1 (а також очевидне твердження про негомеоморфність одноточкового $\mathbb{R}^0$ і $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 1$ в силу відсутності рівнопотужності): $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$ для будь-яких різних цілих невід'ємних m і n. При m і n більших за 2 воно доводиться аналогічно до цього прикладу з використанням вищих гомотопічних груп (див. зауваження після означення 3.4.3). Більш того, будь-які дві відкриті непорожні підмножини просторів $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ негомеоморфні при $m \neq n$.

Приклад 3.10.2. Аналогічним чином доводиться негомеоморфність $\mathbb{R}^2_+ \ncong \mathbb{R}^2$, де через $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geqslant 0\}$ будемо позначати замкнений верхній напівпростір $\mathbb{R}^n$ (у даному випадку напівплощину). Дійсно, з їх гомеоморфності як у попередньому прикладі випливало б $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\} \sim S^1$ для деякого гомеоморфізма f, тобто за гомотопічною інваріантністю фундаментальної групи множина $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$ повинна була б бути неоднозв'язною. Але це зірчата підмножина $\mathbb{R}^2$ відносно будь-якої своєї внутрішньої точки (викинута точка 0 лежить на межовій прямій), тому стяжна, а отже однозв'язна (приклад 3.6.3), протиріччя.

Тут також справедливим є й загальне твердження: $\mathbb{R}^n_+ \ncong \mathbb{R}^n$ для будь-якого натурального n. При $n = 1$ це випливає з прикладу 2.10.26, а при $n \geqslant 3$ – встановлюється аналогічно до даного прикладу за допомогою вищих гомотопічних груп.

Теорема 3.10.3 (Про барабан)**.** *Не існує ретракції замкненого круга D^2 на його межу – коло $S^1 = \partial D^2$.*

Доведення. Припустимо супротивне: нехай існує ретракція $\varphi\colon D^2 \to S^1$, тобто неперервне відображення таке, що $\varphi|_{S^1} = id_{S^1}$. Розглянемо відображення включення $i\colon S^1 \to D^2$. Оскільки тоді $\varphi \circ i = id_{S^1}$, $\varphi_* \circ i_* = (\varphi \circ i)_* = id_{\pi_1(S^1,x)}$ у будь-якій точці $x \in S^1$ за пунктами $\underline{2.}$ і $\underline{3.}$ твердження 3.5.1, де $i_*\colon \pi_1(S^1, x) \to \pi_1(D^2, x)$ та $\varphi_*\colon \pi_1(D^2, x) \to \pi_1(S^1, x)$ – індуковані гомоморфізми. З іншого боку, D^2 – опукла підмножина $\mathbb{R}^2$, тобто стяжна, отже $\pi_1(D^2, x) = \{[e_x]\}$ – тривіальна (приклад 3.6.3). Тоді гомоморфізми i_* та φ_*, а отже й їх композиція $\varphi_* \circ i_*$ є тривіальними, тобто переводять будь-який гомотопічний клас у $[e_x]$ (див. приклад А.9). Але тоді $\varphi_* \circ i_* \neq id_{\pi_1(S^1,x)}$, бо група $\pi_1(S^1, x) \simeq \mathbb{Z}$ нетривіальна, протиріччя.

■

Ця теорема також вірна в узагальненій формі: не існує ретракції замкненої кулі D^n на її межу $S^{n-1} = \partial D^n$ для будь-якого натурального n. При $n = 1$ це випливає з твердження 2.10.20 (бо ретракція була б сюр'єктивним неперервним відображенням зв'язного простору D^1 на незв'язний S^0), а для $n \geqslant 3$ – доводиться аналогічно до попередньої теореми з використанням вищих гомотопічних груп.

Теорема 3.10.4 (Двовимірна теорема Брауера про нерухому точку)**.** *Для будь-якого неперервного відображення $\varphi\colon D^2 \to D^2$ існує точка $x \in D^2$ така, що $\varphi(x) = x$.*

Доведення.

Припустимо, що це не так і $\varphi(x) \neq x$ для будь-якої $x \in D^2$. Побудуємо тоді відображення $\psi\colon D^2 \to S^1$, де $\psi(x)$ – перетин S^1 з променем, що починається у точці $\varphi(x)$ (не включаючи саму цю точку) і проходить через точку x (див. рис. 3.15).

Тоді ψ коректно визначене (бо завжди $\varphi(x) \neq x$), неперервне за неперервністю φ (перевірте це, виписавши його явне задання), і для будь-якої $x \in S^1$ маємо $\psi(x) = x$ за побудовою. Тому ψ – ретракція D^2 на S^1, що суперечить теоремі про барабан.

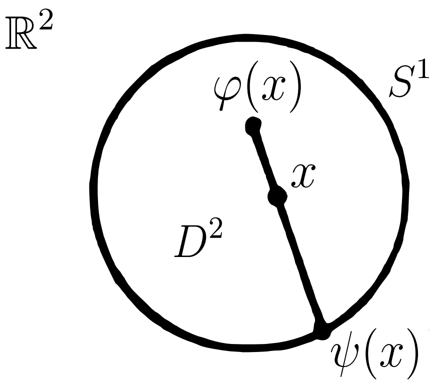


Рис. 3.15: Доведення теореми Брауера

■

Теорема Брауера теж справедлива в усіх вимірностях: для будь-якого неперервного відображення $\varphi\colon D^n \to D^n$, де n – будь-яке натуральне, існує $x \in D^n$ така, що $\varphi(x) = x$ (при $n = 1$ ми це вже доводили у наслідку 2.12.2). Вона виводиться з n-вимірної теореми про барабан для будь-якого n дослівно так само, як у попередньому доведенні. Більш того, твердження двох попередніх теорем еквівалентні:

Вправа 3.10.5. Вивести (n-вимірну) теорему про барабан із (n-вимірної) теореми Брауера.

Вправа 3.10.6. Показати, що якщо топологічний простір X гомеоморфний якомусь ретракту D^n, то він теж має *властивість нерухомої точки*: для будь-якого неперервного відображення $\varphi\colon X \to X$ існує точка $x \in X$ така, що $\varphi(x) = x$.

Як і пара попередніх теорем, наступна теж має кілька еквівалентних формулювань. Наведемо те з них, що "підказує" перший крок доведення:

Теорема 3.10.7 (Борсук – Улям)**.** *Для будь-якого натурального $n \geqslant 2$ не існує непарного неперервного відображення $\varphi\colon S^n \to S^1$, тобто такого, що переводить діаметрально протилежні точки сфери в діаметрально протилежні точки кола: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для будь-якої $x \in S^n$.*

Доведення. Отже, припустимо, що таке відображення φ існує. Воно переводить пари діаметрально протилежних точок S^n у пари діаметрально протилежних точок S^1, тому можна коректно визначити відображення $\psi\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^1$ відповідних дійсних проєктивних просторів умовою $\psi([x]) := [\varphi(x)]$, де через $[x] = \mathbb{Z}_2 \cdot x = \{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ позначено клас еквівалентності (орбіту) точки $x \in S^n$ у $\mathbb{R}P^n = S^n/_{\mathbb{Z}_2}$, і так само для $\mathbb{R}P^1$: $[\varphi(x)] = \mathbb{Z}_2 \cdot \varphi(x) = \{\varphi(x), -\varphi(x)\}$ (див. приклад 3.7.16). Якщо $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ і $q\colon S^1 \to \mathbb{R}P^1$ – відповідні канонічні проєкції, то за побудовою маємо $\psi \circ p = q \circ \varphi$, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \\
{\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\
\mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}P^1
\end{array}$$

відповідних просторів та їхніх відображень. Зокрема, для будь-якої відкритої $U \subset \mathbb{R}P^1$ тоді $p^{-1}(\psi^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(q^{-1}(U))$. Це відкрита множина за неперервністю φ та q, а отже $\psi^{-1}(U)$ відкрита за побудовою фактортопології. Таким чином, відображення ψ неперервне. Також з комутативності $\psi \circ p = q \circ \varphi$ та пункту <u>2.</u> твердження 3.5.1 випливає рівність $\psi_* \circ p_* = q_* \circ \varphi_*$, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(S^n, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(S^1, \varphi(x)) \\
{\scriptstyle p_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q_*} \\
\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)])
\end{array}$$

фундаментальних груп та їхніх (індукованих) гомоморфізмів для довільної точки $x \in S^n$. Нехай тепер $f \in C(I, S^n)$ – шлях, що з'єднує якісь дві діаметрально протилежні точки x і $-x$, тоді $\varphi \circ f \in C(I, S^1)$ – шлях, що з'єднує $\varphi(x)$ і $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Оскільки канонічні проєкції переводять кожну з цих пар точок в одну, шляхи f і $\varphi \circ f$ є підняттями петель $p \circ f$ і $q \circ \varphi \circ f$ у накриваючі простори з початками x і $\varphi(x)$ відповідно. Тому згідно з прикладами 3.9.5, 3.9.6 і побудовою ізоморфізма у доведенні теореми 3.9.2 гомотопічні класи $[p \circ f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) \simeq \mathbb{Z}_2$ і $[q \circ \varphi \circ f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)]) \simeq \mathbb{Z}$ є нетривіальними елементами відповідних фундаментальних груп, оскільки підняття петель $p \circ f$ і $q \circ \varphi \circ f$ не є петлями (тепер квадратні дужки позначають ще й гомотопічний клас, як завжди). При цьому в силу комутативності маємо

$$[q \circ \varphi \circ f] = [\psi \circ p \circ f] = \psi_*([p \circ f]).$$

Оскільки це нетривіальний елемент групи $\pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)]) \simeq \mathbb{Z}$, його квадрат також нетривіальний:

$$\big[e_{[\varphi(x)]}\big] \neq [q \circ \varphi \circ f][q \circ \varphi \circ f] = \psi_*([p \circ f])\, \psi_*([p \circ f]) =$$

$$= \psi_*([p \circ f][p \circ f]) = \psi_*\left(\left[e_{[x]}\right]\right) = \left[e_{[\varphi(x)]}\right],$$

за гомоморфністю ψ_* і тим, що у групі $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) \simeq \mathbb{Z}_2$ квадрат будь-якого елемента тривіальний, протиріччя. Іншими словами, протиріччя виникає через те, що між групами, що ізоморфні $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Z}_2$, не існує нетривіальних гомоморфізмів. Тому ψ_* повинен бути тривіальним і не може переводити нетривіальний елемент у нетривіальний. Зауважимо, що друга комутативна діаграма вище нам не знадобилася: ми навели її лише для кращого розуміння зв'язків між математичними об'єктами, що використовуються у доведенні.

■

Наслідок 3.10.8. *Для будь-яких натурального $n \geqslant 2$ і непарного неперервного відображення $\varphi\colon S^n \to \mathbb{R}^2$ (тобто такого, що $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для будь-якої $x \in S^n$), існує $x \in S^n$ така, що $\varphi(x) = 0$.*

Доведення. Нехай це не так: $\varphi(x) \neq 0$ для будь-якої $x \in S^n$. Тоді коректно визначене $\psi\colon S^n \to S^1\colon x \mapsto \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ (де $|\cdot|$ – евклідова норма $\mathbb{R}^2$), що є неперервним в силу неперервності φ і непарним, бо φ непарне. Це суперечить теоремі Борсука – Уляма.

■

Наслідок 3.10.9. *Для будь-яких натурального $n \geqslant 2$ і неперервного відображення $\varphi\colon S^n \to \mathbb{R}^2$ існує $x \in S^n$ така, що $\varphi(-x) = \varphi(x)$.*

Доведення. Достатньо застосувати попередній наслідок до непарного неперервного відображення $\psi\colon S^n \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \varphi(x) - \varphi(-x)$.

■

Наслідок 3.10.10. *Для жодного натурального $n \geqslant 2$ не існує вкладення сфери S^n у площину $\mathbb{R}^2$.*

Доведення. Дійсно, будь-яке неперервне відображення $S^n \to \mathbb{R}^2$ не є ін'єктивним в силу попереднього наслідку.

■

Вправа 3.10.11 (Задача про сендвіч з шинкою)**.** Нехай $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ – компактні вимірні підмножини. Показати, що тоді існує площина, що ділить кожну з множин A, B, C на дві частини рівного об'єму (див. [20, с. 159-160]).

Вправа 3.10.12. Вивести теорему Борсука – Уляма з тверджень наслідків 3.10.8 і 3.10.9, показавши таким чином, що це її еквівалентні переформулювання.

Саме твердження наслідку 3.10.9 при $n = 2$ є класичним формулюванням теореми Борсука – Уляма. Пор. попередні три наслідки і вправу з наслідками 2.12.3–2.12.5 і вправою 2.12.6 (задачами про млинці). Зокрема, аналогічно до зауваження після наслідку 2.12.4, з наслідку 3.10.9 можна вивести, що в будь-який момент часу на земній кулі існують дві діаметрально протилежні точки з однаковими температурою і атмосферним тиском (якщо вважати їх неперервними функціями).

Вірне наступне узагальнення теореми Борсука – Уляма: не існує непарного неперервного відображення $\varphi\colon S^n \to S^m$ для будь-яких цілого невід'ємного m і натурального $n > m$. При $m = 0$ це випливає знову ж із властивостей зв'язності, бо будь-яке непарне відображення в S^0 сюр'єктивне, простір S^n зв'язний, а S^0 – ні (і згадані результати параграфа 2.12 випливають саме звідси). При $m \geqslant 2$ цю теорему не вдасться, на відміну від попередніх результатів цього параграфа, довести простим перенесенням доведення з фундаментальної на вищі гомотопічні групи. Тут потрібна буде інша алгебро-топологічна техніка (див. [17, с. 174-176]).

Вправа 3.10.13. Сформулювати і вивести з узагальнення теореми Борсука – Уляма (див. попереднє зауваження) узагальнення наслідків 3.10.8, 3.10.9 (що будуть еквівалентними переформулюваннями), 3.10.10 і вправи 3.10.11.

Іншими застосуваннями техніки фундаментальних груп, зокрема ізоморфності $\pi_1(S^1)$ і $\mathbb{Z}$, є гомотопічні доведення теореми 2.15.10 Жордана для класичного випадку $n = 1$ та т. зв. *основної теореми алгебри* (твердження про те, що будь-який непостійний поліном з комплексними коефіцієнтами має корінь), що наведені у [24, с. 376-394] та [24, с. 353-356] відповідно.

Розділ 4

Елементи геометричної топології: многовиди та поверхні

У різних задачах математики та її застосувань природним чином зустрічаються многовиди, тобто топологічні простори, що локально влаштовані як евклідовий простір $\mathbb{R}^n$. Зокрема, вони є одним з традиційних об'єктів дослідження у диференціальній геометрії, а частину топології, що вивчає многовиди та їхні відображення, часто називають *геометричною топологією*. У цьому розділі ми наведемо означення, основні приклади та властивості многовидів, а також сформулюємо один з перших нетривіальних результатів геометричної топології: теорему класифікації компактних зв'язних поверхонь. Крім наведених наприкінці розділу посилань на доведення цієї теореми, для подальшого ознайомлення з методами геометричної топології можна рекомендувати [9], [22], а також книгу [27], що присвячена тривимірним многовидам.

4.1 Многовиди

Нагадаємо, що раніше ми вводили поняття локальної евклідовості як достатню умову локальної лінійної зв'язності. Див. означення 2.14.10 і обговорення після нього. Уточнимо тепер це означення:

Означення 4.1.1. Хаусдорфовий топологічний простір M, що задовольняє другій аксіомі зліченності, зветься n-вимірним *многовидом*, де $n \in \mathbb{Z}_+$ – деяке ціле невід'ємне число, якщо він локально евклідовий: для будь-якої $p \in M$ існують відкрита $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ (де на U розглядається індукована топологія). У цьому випадку пара (U, φ) зветься *картою* M (а U – *носієм* цієї карти). Деяка сукупність карт многовида M зветься його *атласом*, якщо їхні носії утворюють відкрите покриття M. Число n називають *вимірністю* M і позначають $\dim M$.

З означення випливає, зокрема, що умова локальної евклідовості еквівалентна існуванню у M деякого атласа. Властивість простору бути многовидом є топологічним інваріантом (чому?), як і його вимірність (див. пункт 9.

твердження 4.1.12 нижче).

Приклад 4.1.2. Для вимірності 0 маємо у означенні многовида гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^0$ на одноточковий простір, тобто відкритий окіл U теж повинен бути одноточковим: $U = \{p\}$. Це означає, що топологія M дискретна. Тобто 0-вимірні многовиди – це в точності не більш ніж зліченні (в силу другої аксіоми зліченності) дискретні простори.

Приклад 4.1.3. Простір $\mathbb{R}^n$ є n-вимірним многовидом для будь-якої $n \in \mathbb{Z}_+$: достатньо покласти $U \coloneqq \mathbb{R}^n$ і $\varphi \coloneqq id_{\mathbb{R}^n}$. Більш того, будь-яка відкрита підмножина $V \subset \mathbb{R}^n$ також буде n-вимірним многовидом. Дійсно, вона наслідує хаусдорфовість та другу аксіому зліченності з $\mathbb{R}^n$, і для будь-якої $p \in V$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(p) \subset V$. При цьому $B_\varepsilon(p) \cong B^n \cong \mathbb{R}^n$ (див. вправу 1.10.8), тому можна взяти $U \coloneqq B_\varepsilon(p)$.

Вправа 4.1.4. Узагальнити це спостереження, показавши, що якщо M – n-вимірний многовид, а $V \subset M$ відкрита, то V також є n-вимірним многовидом.

Приклад 4.1.5. Сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ є n-вимірним многовидом. Дійсно, хаусдорфовість і другу аксіому зліченності вона наслідує з $\mathbb{R}^{n+1}$. Позначимо через $N \coloneqq (0, \ldots, 0, 1)$ і $S \coloneqq (0, \ldots, 0, -1)$ відповідно північний і південний полюси сфери. Розглянемо її відкрите покриття $\{U, V\}$, де $U \coloneqq S^n \setminus \{N\}$ і $V \coloneqq S^n \setminus \{S\}$. Тоді з прикладу 1.10.10 випливає, що стереографічні проєкції $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ і $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ відносно точок N і S відповідно є гомеоморфізмами. Таким чином, сфера S^n задовольняє умові локальної евклідовості, а $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ – її атлас.

Приклад 4.1.6. Дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{\mathbb{R}_*}$ (див. приклад 2.4.10) теж є n-вимірним многовидом. Перш за все, він хаусдорфовий і задовольняє другій аксіомі зліченності (чому?). Для кожного i від 1 до $n+1$ покладемо

$$U_i \coloneqq \left\{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \;\middle|\; x^i \neq 0\right\}.$$

Кожна з цих множин відкрита (бо відкритий її прообраз під дією канонічної проєкції, що є доповненням до гіперплощини $x^i = 0$), і вони утворюють покриття $\mathbb{R}P^n$ (бо у кожної його точки принаймні одна однорідна координата ненульова). Для кожного i розглянемо тоді відображення

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\colon (x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Вони коректно визначені (бо однорідні координати визначені з точністю до множення на спільне ненульове число) і неперервні як факторизації неперервних відображень з підмножин $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ у $\mathbb{R}^n$. Геометричний сенс цих відображень наступний: $\varphi_i(x^1 : \ldots : x^{n+1})$ – це координати точки перетину прямої, що задає точку проєктивного простору $(x^1 : \ldots : x^{n+1})$, з гіперплощиною $x^i = 1$, де i-ту координату, що, власне, дорівнює 1, пропущено (перевірте це). Обернені до них відображення мають вигляд

$$(\varphi_i)^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to U_i \colon (y^1, \ldots, y^n) \mapsto (y^1 : \ldots : y^{i-1} : 1 : y^i : \ldots : y^n).$$

Їх існування демонструє, зокрема, бієктивність φ_i. Відображення $(\varphi_i)^{-1}$ неперервні як композиції неперервних відображень $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ та канонічної проєкції. Разом це означає, що $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм для кожного i, тобто $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ – атлас $\mathbb{R}P^n$, що й завершує доведення його локальної евклідовості.

Вправа 4.1.7. Показати, що комплексний проєктивний простір $\mathbb{C}P^n$ з вправи 2.4.14 є $2n$-вимірним многовидом.

Приклад 4.1.8. Лінзові простори $L(n, m)$, що були описані у прикладі 3.7.18, є тривимірними многовидами. Це можна перевірити безпосередньо або використати вправу 4.1.14 нижче (згідно з конструкцією, універсальним накриваючим простором $L(n, m)$ є S^3, що є тривимірним многовидом за прикладом 4.1.5).

Твердження 4.1.9. *Нехай M і N – многовиди. Тоді $M \times N$ є $(\dim M + \dim N)$-вимірним многовидом.*

Доведення. Простір $M \times N$ хаусдорфовий за вправою 2.5.26 і задовольняє другій аксіомі зліченності за вправою 2.1.12. Позначимо $m := \dim M$ і $n := \dim N$. Для будь-якої точки $(p, q) \in M \times N$ тоді за означенням існують відкриті околи $U \ni p$ в M і $V \ni q$ в N разом з гомеоморфізмами $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^m$ і $\psi \colon V \to \mathbb{R}^n$. Тоді за побудовою топології прямого добутку $U \times V$ – відкритий окіл (p, q), а відображення

$$\varphi \times \psi \colon U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \colon (r, s) \mapsto (\varphi(r), \psi(s))$$

бієктивне, неперервне і має обернене $(\varphi \times \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \times \psi^{-1}$, що також неперервне (перевірте це). Таким чином, $\varphi \times \psi$ – гомеоморфізм. Це демонструє локальну евклідовість $M \times N$ а також те, що $\dim(M \times N) = m + n$.

■

Приклад 4.1.10. Циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$ є двовимірним многовидом в силу прикладів 4.1.3, 4.1.5 та попереднього твердження.

Твердження 4.1.9 очевидним чином узагальнюється за індукцією на довільну скінченну кількість множників. Зокрема, вимірність добутку дорівнює $\dim(M_1 \times \ldots \times M_n) = \dim M_1 + \ldots + \dim M_n$.

Приклад 4.1.11. Тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ є n-вимірним многовидом в силу прикладу 4.1.5 та попереднього зауваження.

Твердження 4.1.12 (Топологічні властивості многовидів). *Нехай M – деякий многовид.*

1. *M локально компактний.*
2. *M нормальний.*
3. *Якщо M компактний, то існує його вкладення в $\mathbb{R}^k$ для деякого k.*
4. *M метризовний.*
5. *M локально лінійно зв'язний. Зокрема, відкрита підмножина $V \subset M$ є лінійно зв'язною тоді й тільки тоді, коли є зв'язною.*
6. *Зв'язні компоненти M відкритозамкнені, збігаються з його компонентами лінійної зв'язності та є многовидами тієї ж вимірності, що й M. Їх не більш ніж зліченна кількість (зокрема, скінченна, якщо M компактний).*
7. *M напівлокально однозв'язний.*
8. *Фундаментальні групи M не більш ніж зліченні.*
9. *Якщо N – деякий многовид, що гомеоморфний M, то їхні вимірності збігаються:* $\dim N = \dim M$ *(топологічна інваріантність вимірності).*
10. *Якщо M зв'язний і* $\dim M = 1$, *то M гомеоморфний $\mathbb{R}$ або S^1 (класифікація зв'язних одновимірних многовидів).*

Доведення. Нехай $n = \dim M$.

1. Для будь-якої $p \in M$ нехай (U, φ) – карта M з $U \ni p$. Оберемо якесь $\varepsilon > 0$ і позначимо через $\widetilde{B}_\varepsilon(p) := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p))) \subset U$ і $\widetilde{D}_\varepsilon(p) := \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(p))) \subset U$ прообрази евклідових куль $\mathbb{R}^n$. Тоді $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$ – відкритий окіл p (в індукованій топології відкритої U, а отже й у M), бо $B_\varepsilon(\varphi(p))$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, а φ – гомеоморфізм.

   Замикання $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$ в індукованій топології U є, з одного боку, прообразом замикання $\varphi^{-1}\left(\overline{B_\varepsilon(\varphi(p))}\right) = \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(p))) = \widetilde{D}_\varepsilon(p)$ у $\mathbb{R}^n$ (бо φ – гомеоморфізм), а з іншого – перетином замикання цього околу в топології M з U (покажіть це). Таким чином, $\widetilde{D}_\varepsilon(p) \subset \overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)}$, де справа стоїть саме замикання в топології M. Разом з тим, $D_\varepsilon(\varphi(p))$ компактна в $\mathbb{R}^n$ (в силу теореми 2.9.5 як обмежена і замкнена), тому $\widetilde{D}_\varepsilon(p)$ компактна у топології U як прообраз компакта під дією гомеоморфізма φ, а отже компактна і в топології M за вправою 2.7.3. Тоді, оскільки M хаусдорфовий, $\widetilde{D}_\varepsilon(p)$ замкнена за твердженням 2.7.20. Оскільки вона містить $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$, $\overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)} \subset \widetilde{D}_\varepsilon(p)$. Маємо таким чином, що $\overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)} = \widetilde{D}_\varepsilon(p)$ – компакт. Це й означає локальну компактність.

2. Оскільки M локально компактний за попереднім пунктом і хаусдорфовий, він регулярний в силу вправи 2.7.29. Оскільки він до того ж задовольняє другій аксіомі зліченності, він нормальний в силу твердження 2.5.27.

3. Для будь-якої $p \in M$ нехай (U_p, φ_p) – карта M з $U_p \ni p$. Тоді (у позначеннях пункту 1., де для кожної p використовуємо у побудові відповідне φ_p) $\left\{\widetilde{B}_1(p)\right\}_{p \in M}$ утворюють відкрите покриття M. Використавши компактність, виділимо з нього скінченне підпокриття $\left\{\widetilde{B}_1(p_i)\right\}_{i=1}^m$. Для кожного i від 1 до m замкнені множини $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і $\widetilde{D}_1(p_i)$ не перетинаються, адже

$$\widetilde{D}_1(p_i) = \varphi_{p_i}^{-1}(D_1(\varphi_{p_i}(p_i))) \subset \varphi_{p_i}^{-1}(B_2(\varphi_{p_i}(p_i))) = \widetilde{B}_2(p_i).$$

Простір M нормальний в силу попереднього пункту, тому за лемою Урисона (теорема 2.6.1) існує функція Урисона ψ_i множин $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і $\widetilde{D}_1(p_i)$. Зокрема, ψ_i неперервна, дорівнює 0 на $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і 1 на $\widetilde{D}_1(p_i)$. Побудуємо відображення $f\colon M \to \mathbb{R}^{m(n+1)}$ як $f := (f_1, \ldots, f_m)$, де для кожного i відображення $f_i\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ визначене умовою

$$f_i(q) := \left[\begin{array}{ll} (\psi_i(q)\varphi_{p_i}(q), \psi_i(q)), & q \in U_{p_i}; \\ 0, & q \notin U_{p_i}. \end{array} \right.$$

Зауважимо, що тут $\psi_i(q)\varphi_{p_i}(q) \in \mathbb{R}^n$, а $\psi_i(q) \in \mathbb{R}$, тому f_i – дійсно відображення у $\mathbb{R}^{n+1}$. Множини U_{p_i} та $M \setminus \widetilde{D}_2(p_i)$ утворюють відкрите покриття M. Обмеження f_i на першу з них має вигляд $(\psi_i \, \varphi_{p_i}, \psi_i)$ і є неперервним в індукованій топології. Обмеження на другу є за побудовою тотожнім нулем (бо $M \setminus \widetilde{D}_2(p_i) \subset M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ аналогічно до включень вище, отже на ній $\psi_i = 0$), тому теж неперервне. Тоді f_i неперервне (чому?). Звідси маємо, що f неперервне, бо задається неперервними функціями.

При цьому за побудовою відображення f є ін'єктивним. Дійсно, нехай $f(q) = f(r)$ для деяких $q, r \in M$. Існує i таке, що $q \in \widetilde{B}_1(p_i) \subset \widetilde{D}_1(p_i) \subset U_{p_i}$, тому $\psi_i(q) = 1$, а отже й $\psi_i(r) = 1$. Це означає, що $r \in \widetilde{B}_2(p_i) \subset U_{p_i}$, бо за межами цієї множини $\psi_i = 0$. Тоді, порівнюючи значення відображення f_i у цих точках, маємо

$$(\varphi_{p_i}(q), 1) = f_i(q) = f_i(r) = (\varphi_{p_i}(r), 1).$$

Але на U_{p_i} відображення φ_{p_i} бієктивне, тому $q = r$. Таким чином, f – неперервне ін'єктивне відображення з компактного M у хаусдорфовий $\mathbb{R}^{m(n+1)}$, а отже вкладення за наслідком 2.7.22.

4. Випливає з теореми 2.6.11 Урисона про метризацію, оскільки M нормальний за пунктом 2. і задовольняє другій аксіомі зліченності.

Для компактного M це твердження випливає також з попереднього пункту. Дійсно, ми можемо просто перенести на M за допомогою f обмеження евклідової метрики $\mathbb{R}^k$ на $f(M)$: умова $\rho(p,q) \coloneqq |f(p) - f(q)|$ для $p, q \in M$ задає метрику ρ на M (аналогічно до виведення теореми 2.6.11 з теореми 2.6.10 Урисона про вкладення). Перевірте, що це дійсно метрика і що топологія M є метричною для неї.

5. Це твердження 2.14.11. Еквівалентність зв'язності та лінійної зв'язності для відкритих підмножин випливає тоді з теореми 2.14.12 (і твердження 2.14.1, що вірне для будь-яких лінійно зв'язних підмножин).

6. Нехай A – деяка зв'язна компонента M. Вона замкнена згідно з пунктом 3. твердження 2.11.2. Для будь-якої $p \in A$ нехай (U, φ) – карта M з відкритою $U \ni p$. Тоді U зв'язна, бо гомеоморфна зв'язному простору $\mathbb{R}^n$, а отже $U \subset A$, тобто p – внутрішня точка A. Таким чином, A відкрита і зв'язна, а отже лінійно зв'язна в силу попереднього пункту. Тоді вона збігається з компонентою лінійної зв'язності M (чому?). Компонента A є n-вимірним многовидом в силу її відкритості та вправи 4.1.4.

   Нарешті, помітимо, що зв'язні компоненти утворюють відкрите покриття M, у якого не існує нетривіального підпокриття. Таким чином, якщо б їхня кількість була незліченною, це суперечило б другій аксіомі зліченності та теоремі Ліндельофа. Аналогічно, нескінченна кількість зв'язних компонент значила б, що M некомпактний (тут суттєвою є лише відкритість зв'язних компонент і друга аксіома зліченності для першого з тверджень, а не те, що M – многовид).

7. У позначеннях пункту 1. для будь-якого $\varepsilon > 0$ відкритий окіл $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$ довільної точки $p \in M$ є однозв'язним за прикладом 3.6.3 та топологічною інваріантністю однозв'язності, бо гомеоморфний опуклій підмножині $B_\varepsilon(\varphi(p)) \subset \mathbb{R}^n$. Цього достатньо для напівлокальної однозв'язності простору M (чому?). Зауважимо, що для твердження цього пункту суттєвою є лише локальна евклідовість M.

8. Див. [22, с. 196-197]. Доведення цього факту використовує лише локальну лінійну зв'язність M, що була показана у пункті 5., його напівлокальну однозв'язність з попереднього пункту та другу аксіому зліченності (переконайтеся у цьому).

9. Це узагальнення твердження про негомеоморфність непорожніх відкритих підмножин $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ для різних цілих невід'ємних m і n, що згадувалося у прикладі 3.10.1 і, у свою чергу, узагальнює цей приклад. Більш того, твердження для довільних многовидів нескладно виводиться зі згаданого (зробіть це). Тут також суттєвою є лише локальна евклідовість.

10. Див. [15], [22, с. 143-147], а також [20, с. 77-79] для компактного випадку (коли M гомеоморфний S^1).

■

Усі многовиди також є паракомпактними. Це випливає, наприклад, з вправи 2.7.30, означення та пункту 1. попереднього твердження.

Для класифікації з пункту 10. (як і для наведених нижче гіпотези Пуанкаре та класифікації поверхонь) суттєвими є як хаусдорфовість, так і друга аксіома зліченності. Так, нехаусдорфова пряма з "подвоєним нулем" з прикладу 2.5.11 некомпактна, задовольняє другій аксіомі зліченності та є локально евклідовою для вимірності $n = 1$, але негомеоморфна $\mathbb{R}$ (саме через нехаусдорфовість). Більш того, нескладно побудувати цілу нескінченну серію подібних попарно негомеоморфних просторів (як саме?). Класичний приклад некомпактного хаусдорфового локально евклідового для $n = 1$ простору, що не задовольняє другій аксіомі зліченності, а отже негомеоморфний $\mathbb{R}$ (т. зв. *довга пряма*) можна знайти у [15] або у [26, с. 71-72].

Вправа 4.1.13. Показати, що твердження пункту 6. крім того, що зв'язні компоненти є многовидами, узагальнюються на довільний локально лінійно зв'язний простір (де треба додати ще другу аксіому зліченності для твердження про не більш ніж зліченну кількість зв'язних компонент). Які з них вірні для довільного локально зв'язного простору? Чи можна сформулювати умови, слабші за умови локальної (лінійної) зв'язності, за яких ці твердження залишаються вірними?

Вправа 4.1.14. Показати, що накриваючий простір $\widetilde{M}$ деякого накриття є локально евклідовим тоді й тільки тоді, коли такою є база накриття M. Тому, якщо один з цих просторів є многовидом, а другий хаусдорфовий та задовольняє другій аксіомі зліченності, то й він є многовидом. Показати, що у цьому випадку вимірності многовидів збігаються: $\dim \widetilde{M} = \dim M$.

Вправа 4.1.15. Показати, що якщо база деякого накриття хаусдорфова, то таким є й накриваючий простір. Чи вірне обернене твердження?

Вправа 4.1.16. Нехай база M деякого накриття локально лінійно зв'язна і задовольняє другій аксіомі зліченності. Показати, що накриваючий простір $\widetilde{M}$ задовольняє цій аксіомі тоді й тільки тоді, коли усі шари цього накриття не більш ніж зліченні (більш точно, накриваючий простір будь-якого накриття, що має принаймні один незліченний шар, не задовольняє другій аксіомі зліченності). Чи випливає з виконання другої аксіомі зліченності для $\widetilde{M}$ її виконання для M (можливо, теж за якихось додаткових умов)?

З пунктів 5. та 7. твердження 4.1.12 випливає, що будь-який зв'язний (а отже й лінійно зв'язний за згаданим пунктом 5.) многовид M задовольняє умовам теореми 3.9.27. Це означає існування, зокрема, універсального накриття, накриваючий простір якого $\widetilde{M}$ є локально евклідовим за вправою 4.1.14. Зауважимо, що поки що ми використали лише локальну евклідовість та зв'язність M. При цьому $\widetilde{M}$ є хаусдорфовим в силу вправи 4.1.15, а справедливість другої аксіомі зліченності для нього за вправою 4.1.16 еквівалентна тому, що усі шари універсального накриття не більш ніж зліченні (зауважимо, що вони усі рівнопотужні в силу зв'язності M та вправи 3.7.6). Згідно з пунктом 1. наслідку 3.9.3, ця умова, у свою чергу, еквівалентна тому, що фундаментальні групи M не більш ніж зліченні, тобто пункту 8. твердження 4.1.12. З урахуванням рівності вимірностей з вправи 4.1.14 отримаємо таким чином наступне:

Наслідок 4.1.17. *У будь-якого зв'язного многовида існує універсальне накриття, накриваючий простір якого є многовидом тієї ж вимірності.*

При цьому всі такі універсальні накриття є ізоморфними (а накриваючі простори – гомеоморфними) в силу єдиності у теоремі 3.9.27. Саме такі накриття ми бачили у прикладах 3.7.15, 3.7.16 та 3.7.18.

Многовидам також присвячена одна з найвідоміших топологічних теорем:

Теорема 4.1.18 (Узагальнена гіпотеза Пуанкаре)**.** *Будь-який n-вимірний компактний многовид, що гомотопічно еквівалентний n-вимірній сфері S^n, гомеоморфний S^n.*

Більш того, будь-який тривимірний компактний однозв'язний многовид гомеоморфний S^3.

При $n = 0$ це твердження випливає з прикладу 4.1.2 та вправи 3.2.7 (як саме?), а при $n = 1$ – є очевидним наслідком пункту 10. твердження 4.1.12, причому одновимірних компактних однозв'язних многовидів не існує. Будь-який двовимірний компактний однозв'язний многовид гомеоморфний S^2 в силу теореми 4.2.7 нижче, бо інші многовиди з наведеної там класифікації не є однозв'язними. Тому вони також не є гомотопічно еквівалентними S^2, звідки маємо твердження при $n = 2$. Класична гіпотеза Пуанкаре (яка виявилася найскладнішою для доведення) – це друге з тверджень наведеної теореми, що стосується тривимірних многовидів.

4.2 Поверхні та їх класифікація

Поверхні є класичним об'єктом вивчення у топології, а сформульована у даному параграфі теорема 4.2.7 класифікації компактних зв'язних поверхонь – одним з найперших в історії математики нетривіальних топологічних результатів. Її доведення вимагає ідей та методів, що суттєво відрізняються від решти матеріалу цього курсу, тому ми не будемо його наводити, надавши лише опис ідеї та основних потрібних понять, а також посилання на різні варіанти доведення для зацікавлених.

Означення 4.2.1. *Поверхнею* зветься двовимірний многовид.

Приклад 4.2.2. З більш загальних прикладів попереднього параграфа випливає, що площина $\mathbb{R}^2$, двовимірна сфера S^2, проєктивна площина $\mathbb{R}P^2$, циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$, двовимірний тор T^2, а також усі їхні відкриті підмножини (наприклад, відкритий круг $B^2 \subset \mathbb{R}^2$, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2$) є поверхнями.

Вправа 4.2.3. Показати, що поверхні другого порядку в $\mathbb{R}^3$ – еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди – є поверхнями. Чи гомеоморфні вони якимось поверхням з попереднього прикладу? Чи будуть поверхнями конуси другого порядку?

Вправа 4.2.4. Показати, що пляшка Клейна K^2 з прикладу 2.2.11 також є поверхнею.

При цьому, скажімо, замкнена напівплощина $\mathbb{R}^2_+ \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$, замкнений круг $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, гомеоморфна йому замкнена двовимірна півсфера (тобто перетин S^2 з замкненим напівпростором $\mathbb{R}^3$ відносно площини, що проходить через початок координат), обмежений замкнений циліндр $S^1 \times [a, b]$ і замкнений лист Мебіуса з прикладу 2.2.9 не є поверхнями. Наприклад, у будь-якої точки вигляду $(x, 0) \in \mathbb{R}^2_+$ не існує околу, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2$, що можна показати аналогічно до прикладу 3.10.2 (зробіть це). Чи можете ви вказати такі "проблемні" точки у інших перелічених просторів? Зауважимо, що подібні точки (а саме ті, у яких існує окіл, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2_+$) називають *межовими*, але вони не обов'язково є межовими для підмножини евклідового простору у сенсі означення 1.7.1. Простори такого типу належать до т. зв. *многовидів з межею*. Див., наприклад, [22, с. 42-45].

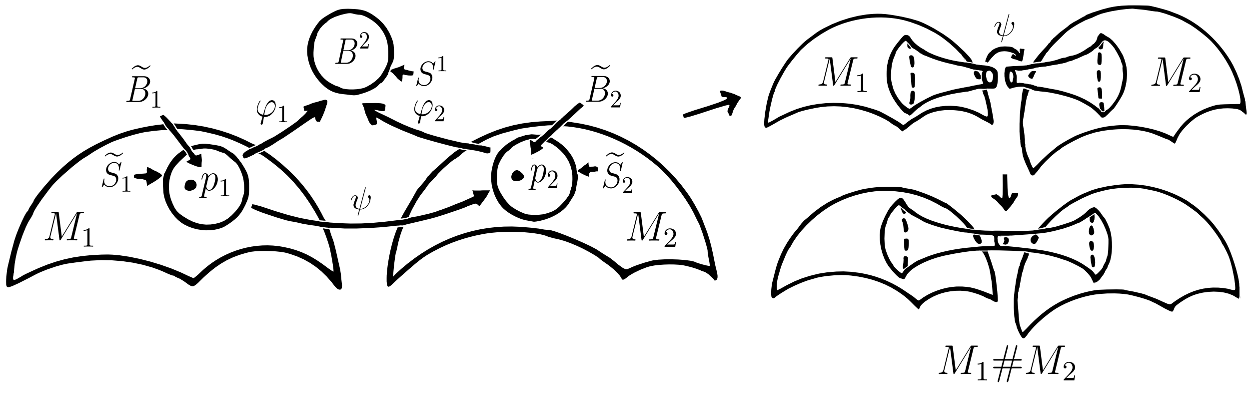


Рис. 4.1: Зв'язна сума поверхонь

Означення 4.2.5. Нехай M_1 і M_2 – компактні зв'язні поверхні, $p_1 \in M_1$ і $p_2 \in M_2$ – деякі їх точки, відкриті $\widetilde{B}_1 \ni p_1$ і $\widetilde{B}_2 \ni p_2$ – такі, що існують гомеоморфізми (відносно індукованих топологій) $\varphi_1 \colon \widetilde{D}_1 \to D^2$ і $\varphi_2 \colon \widetilde{D}_2 \to D^2$, де $\widetilde{D}_i = \overline{\widetilde{B}_i}$ для $i = 1, 2$, причому обмеження $\varphi_i|_{\widetilde{S}_i}$ є гомеоморфізмами меж $\widetilde{S}_i = \partial \widetilde{B}_i$ на коло $S^1 = \partial B^2$ для $i = 1, 2$. Тоді склеювання $M_1 \setminus \widetilde{B}_1$ і $M_2 \setminus \widetilde{B}_2$ за відображенням $\psi := \left(\varphi_2|_{\widetilde{S}_2}\right)^{-1} \circ \varphi_1|_{\widetilde{S}_1} : \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_2$ зветься *зв'язною сумою* M_1 і M_2 та позначається $M_1 \# M_2$.

Ця конструкція показана на рис. 4.1. Відкриті околи $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ і гомеоморфізми φ_1, φ_2 з потрібними властивостями можна побудувати, використавши карти, як у доведенні пункту 1. твердження 4.1.12: якщо (U, φ) – карта M_1 з $U \ni p_1$, то можна взяти $\widetilde{B}_1 := \widetilde{B}_1(p_1) = \varphi^{-1}(B_1(\varphi(p_1)))$, тоді за згаданим доведенням $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_1(p_1) = \varphi^{-1}(D_1(\varphi(p_1)))$, і

$$\widetilde{S}_1 = \partial \widetilde{B}_1 = \overline{\widetilde{B}_1} \setminus \operatorname{Int} \widetilde{B}_1 = \widetilde{D}_1 \setminus \widetilde{B}_1 = \varphi^{-1}(S_1(\varphi(p_1))).$$

Крім того, можна без обмеження загальності вважати, що $\varphi(p_1) = 0$, розглянувши за необхідності композицію φ з паралельним перенесенням (що є гомеоморфізмом за прикладом 1.10.5). Покладемо тоді $\varphi_1 := \varphi|_{\widetilde{D}_1}$. Перевірте, що це відображення задовольняє умові. Аналогічно зробимо для другої поверхні.

Можна показати, що для компактних зв'язних поверхонь описана у попередньому означенні конструкція не залежить від вибору p_1, p_2, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, φ_1 і φ_2 з точністю до гомеоморфізма, тобто якщо $M_1 \cong N_1$ і $M_2 \cong N_2$, то $M_1 \# M_2 \cong N_1 \# N_2$ для будь-яких виборів точок, околів і гомеоморфізмів. Таким чином, зв'язна сума $M_1 \# M_2$ визначена коректно у цьому сенсі. При цьому $M_1 \# M_2$ також буде компактною зв'язною поверхнею. Крім того, вірно, що $M_1 \# M_2 \cong M_2 \# M_1$, $(M_1 \# M_2) \# M_3 \cong M_1 \# (M_2 \# M_3)$ і $M_1 \# S^2 \cong M_1$ для будь-яких компактних зв'язних поверхонь M_1, M_2 і M_3 (тобто класи гомеоморфності таких поверхонь з операцією зв'язної суми утворюють *абелеву напівгрупу з одиницею*). Також цю операцію можна ітерувати, розглядаючи зв'язні суми довільної скінченної кількості поверхонь.

Означення 4.2.6. *Орієнтовною* (компактною зв'язною) *поверхнею роду* g, де $g \in \mathbb{Z}_+$, зветься $M_0^2 := S^2$ для $g = 0$ і $M_g^2 := \underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g}$ для $g > 0$. *Неорієнтовною* (компактною зв'язною) *поверхнею роду* g, де $g \in \mathbb{N}$, зветься $N_g^2 := \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$.

Ці поверхні зображені на рис. 4.2. Поверхню $M_2^2 = T^2 \# T^2$ інколи звуть *кренделем*. Також виявляється, наприклад, що $N_2^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ гомеоморфна пляшці Клейна K^2, а $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. Це випливає з доведень наступної теореми за наведеними нижче посиланнями. Зауважимо, що, як і у окремих випадках $\mathbb{R}P^2$ і K^2, жодна з поверхонь N_g^2 не вкладається у $\mathbb{R}^3$ (на відміну від поверхонь M_g^2, вкладення яких у $\mathbb{R}^3$ зображені на рис. 4.2), але всі вони вкладаються у $\mathbb{R}^4$.

Теорема 4.2.7 (Класифікація компактних зв'язних поверхонь)**.** *Будь-яка компактна зв'язна поверхня гомеоморфна рівно одній з* M_g^2, N_g^2.

Доведення. Див. [20, с. 79-91], [22, с. 159-182], [24, с. 446-476] або викладення інших підходів до доведення у [9, с. 63-67] та [10, с. 149-171]. ∎

У формулюваннях цієї теореми в літературі інколи йдеться про поверхні "без межі" (у нас за означенням усі такі, див. зауваження вище про многовиди з межею) та "замкнені" (в даному контексті це означає просто компактність).

Доведення теореми класифікації складається з двох частин. Спочатку треба довести, що кожна компактна зв'язна поверхня M гомеоморфна якійсь зі списку M_g^2, N_g^2. Це можна зробити, наприклад, за допомогою триангулювання, тобто "правильного" розбиття M на скінченну кількість множин, що гомеоморфні трикутникам:

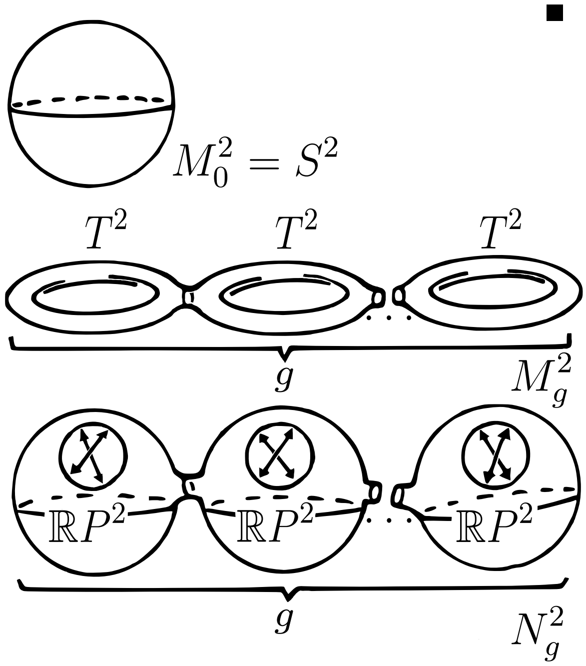


Рис. 4.2: Класифікація компактних зв'язних поверхонь

Означення 4.2.8. Фіксуємо якийсь (невироджений) евклідовий трикутник $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ з вершинами $\{p_1, p_2, p_3\}$, скажімо, $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,1)$, $p_3 = (1,0)$, що визначений таким чином нерівностями $x^1 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $x^1 + x^2 \leqslant 1$. *Триангуляцією* поверхні M зветься її представлення у вигляді об'єднання множин (*елементів*, або *симплексів триангуляції*) трьох наступних класів:

- *вершин триангуляції*, що є точками M;
- *ребер триангуляції*, що є образами вкладень $f\colon I \to M$ (тобто шляхів, які гомеоморфно відображають відрізок $I = [0,1]$ на його носій – ребро); образи $f(0)$ і $f(1)$ при цьому називаються *вершинами* даного ребра;
- *граней (трикутників) триангуляції*, що є образами вкладень $g\colon \Delta \to M$ трикутника Δ з вершинами $\{p_1, p_2, p_3\}$; образи цих вершин $g(p_1)$, $g(p_2)$ і $g(p_3)$ при цьому називаються *вершинами* даної грані, а образи ребер трикутника $g([p_1, p_2])$, $g([p_2, p_3])$ і $g([p_3, p_1])$ – її *ребрами.*

При цьому повинні виконуватися наступні умови:

1. Вершини, ребра та грані триангуляції утворюють *фундаментальне покриття* M. Це означає, що підмножина M є замкненою тоді й тільки тоді, коли її перетин з довільним елементом триангуляції замкнений.

2. Вершини кожного ребра триангуляції та вершини і ребра кожної її грані теж до неї належать.

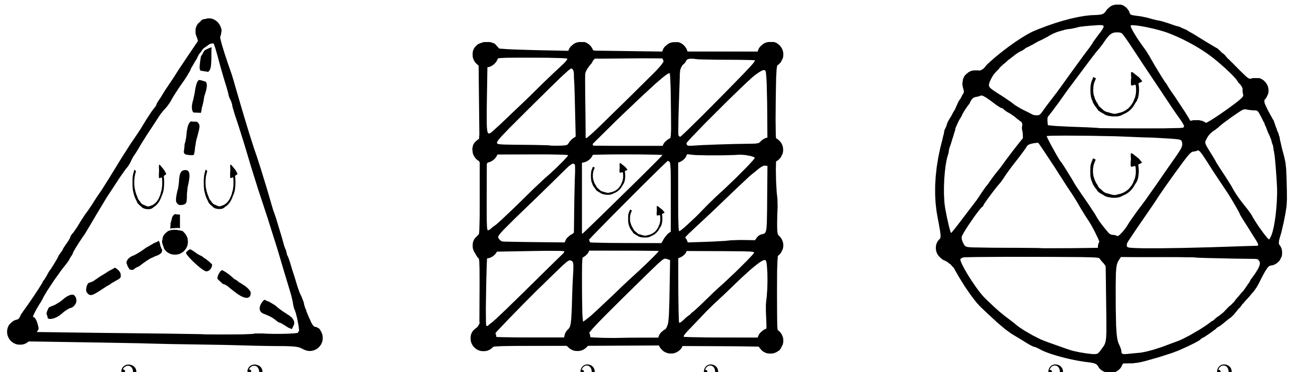
3. Будь-які два ребра триангуляції або не перетинаються, або мають одну спільну вершину. Будь-які дві грані триангуляції або не перетинаються, або мають одну спільну вершину, або мають одне спільне ребро (разом із двома його вершинами).

Триангуляція зветься *скінченною*, якщо складається зі скінченної кількості вершин, ребер та граней.

Вершини, ребра та грані триангуляції є компактними, а отже замкненими підмножинами M за твердженнями 2.7.12 і 2.7.20 як неперервні образи компактів у хаусдорфовому просторі. Поверхня разом з будь-якою її триангуляцією утворює т. зв. *двовимірний симпліційний простір (комплекс)*. Означення триангуляції природним чином можна узагальнити на розбиття топологічних просторів, що містять гомеоморфні образи багатовимірних аналогів трикутників (*симплексів*) і задовольняють аналогічним умовам, отримавши таким чином загальне означення симпліційного простору (див. [22, с. 147-152]).

Вправа 4.2.9. Перевірити, що умова 1. попереднього означення автоматично виконана для скінченної триангуляції (та взагалі для будь-якого скінченного покриття, що складається із замкнених підмножин). Навести приклади розбить поверхонь на вершини, ребра та грані, що не задовольняють умовам 2. або 3. означення, а отже не є триангуляціями.

Теорема 4.2.10 (Радо)**.** *Будь-яка поверхня M має триангуляцію, скінченну, якщо M компактна.*



$M_0^2 = S^2$ $\qquad$ $M_1^2 = T^2$ $\qquad$ $N_1^2 = \mathbb{R}P^2$

Рис. 4.3: Приклади триангуляцій двовимірних сфери, тора і проєктивної площини

Приклад 4.2.11. На рис. 4.3 зображені триангуляції двовимірної сфери (у вигляді поверхні тетраедра), двовимірного тора (де він представлений як факторпростір квадрата з прикладу 2.2.10) і проєктивної площини (з використанням її опису у вигляді факторпростору замкненого круга D^2, де ототожнюються діметрально протилежні точки його межі S^1, див. приклад 2.4.10). Перевірте, що такі розбиття задовольняють усім умовам означення 4.2.8.

Твердження 4.2.12. *Нехай $\varphi\colon M \to N$ – гомеоморфізм поверхонь. Тоді образи вершин, ребер і граней будь-якої триангуляції M під дією φ утворюють деяку триангуляцію N.*

Доведення. Дійсно, для вкладень $f\colon I \to M$ і $g\colon \Delta \to M$ з означення 4.2.8, що задають ребра і грані триангуляції M, відповідні композиції $\varphi \circ f$ і $\varphi \circ g$ теж є вкладеннями (чому?). Умови 1.–3. означення тоді виконані для розбиття N на образи цих відображень (разом з образами вершин триангуляції M), оскільки φ – гомеоморфізм, зокрема бієкція.

■

Отримавши з теореми 4.2.10 скінченну триангуляцію компактної зв'язної поверхні M та послідовно "переклеюючи" її трикутні грані, як детально описано у перших трьох посиланнях після формулювання теореми 4.2.7, можна отримати стандартну *розгортку* поверхні, тобто представлення її у вигляді факторпростору деякого багатокутника, ребра якого ототожнюються аналогічно до описів двовимірного тора і пляшки Клейна у прикладах 2.2.10 і 2.2.11 відповідно. Виявляється, що таким способом завжди отримаємо одну з поверхонь зі списку теореми. Ще раз наголосимо, що для теорем класифікації хаусдорфовість і друга аксіома зліченності є суттєвими . Тут вони використовуються, зокрема, у доведенні теореми 4.2.10.

Далі треба показати, що різні поверхні зі списку негомеоморфні (тобто довести єдиність у теоремі класифікації), за допомогою якихось топологічних інваріантів. Тут можна використати фундаментальні групи поверхонь (вони обчислені, наприклад, у [20, с. 202-208]) або наступні специфічні для поверхонь інваріанти, що визначаються за допомогою триангуляцій.

Означення 4.2.13. Нехай у поверхні M існує скінченна триангуляція, що складається з V вершин, E ребер та F граней. Тоді *ейлеровою характеристикою* M зветься число $\chi(M) \coloneqq V - E + F$.

Виявляється, що ейлерова характеристика поверхні не залежить від триангуляції (це випливає, зокрема, з можливості виразити її через певні алгебротопологічні інваріанти, див. [17, с. 146-147]), що забезпечує коректність попереднього означення. З теореми 4.2.10 випливає, що ця характеристика визначена для будь-якої компактної поверхні. Оскільки за твердженням 4.2.12 гомеоморфізм переводить триангуляцію поверхні M у триангуляцію гомеоморфної до неї поверхні N, що має ті ж кількості вершин, ребер і граней, ейлерові характеристики M і N збігаються:

Наслідок 4.2.14. *Ейлерова характеристика поверхні є її топологічним інваріантом.*

Приклад 4.2.15. Триангуляції з прикладу 4.2.11 мають наступні кількості елементів (переконайтеся у цьому):

- $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ для триангуляції двовимірної сфери з рис. 4.3, отже $\chi(S^2) = 2$;
- $V = 9$, $E = 27$, $F = 18$ для триангуляції двовимірного тора з рис. 4.3, отже $\chi(T^2) = 0$;
- $V = 6$, $E = 15$, $F = 10$ для триангуляції проєктивної площини з рис. 4.3, отже $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$.

Вправа 4.2.16. Побудувавши якусь триангуляцію зв'язної суми $M_1 \# M_2$ за триангуляціями компактних зв'язних поверхонь M_1 і M_2, показати, що $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$. Вивести з цього і попереднього прикладу, що $\chi(M_g^2) = 2-2g$ для будь-якого $g \in \mathbb{Z}_+$ (хоча $M_0^2 = S^2$ і не є нетривіальною зв'язною сумою, для неї ця формула теж вірна за попереднім прикладом) і що $\chi(N_g^2) = 2 - g$ для будь-якого $g \in \mathbb{N}$.

Попередня вправа демонструє, що в силу топологічної інваріантності поверхні M_g^2 різних родів g попарно негомеоморфні, й так само для N_g^2. Ейлерова характеристика має цікавий зв'язок з геометрією поверхні, що описується *теоремою Гауса – Боне* (інтегральна кривина компактної поверхні M дорівнює $2\pi\chi(M)$), див. [2, с. 164-169].

Означення 4.2.17. Будемо використовувати позначення з означення 4.2.8. *Орієнтувати грань* $g(\Delta)$ деякої триангуляції поверхні M, де $g\colon \Delta \to M$ – вкладення евклідового трикутника, означає обрати напрямок обходу вершин $\{g(p_1), g(p_2), g(p_3)\}$ даної грані, тобто одну з двох нетривіальних циклічних перестановок множини з 3 елементів: одна з них переводить ці вершини у $\{g(p_2), g(p_3), g(p_1)\}$, а інша – у $\{g(p_3), g(p_1), g(p_2)\}$ відповідно. Помітимо, що для кожного ребра $g([p_i, p_j])$ цієї грані (де i, j довільні від 1 до 3, $i \neq j$) одна з його вершин завжди переходить у іншу. Нехай дві грані триангуляції мають спільне ребро з вершинами x та y. Будемо тоді говорити, що їхні *орієнтації узгоджені*, якщо одна з них (тобто відповідна перестановка) переводить x в y, а інша – y в x. Див. рис. 4.3, де для кожної з триангуляцій зображено приклад узгоджених орієнтацій двох її граней.

Якщо грані довільної триангуляції поверхні M можна орієнтувати так, що ці орієнтації узгоджені для будь-яких двох граней зі спільним ребром, M зветься *орієнтовною*, у іншому випадку – *неорієнтовною*.

Відомо, що якщо якась триангуляція задовольняє умові з попереднього означення, то їй задовольняє й будь-яка інша, тому умову орієнтовності поверхні достатньо перевірити для якоїсь одної триангуляції: якщо її грані можна орієнтувати узгоджено, то поверхня орієнтовна, якщо ні – неорієнтовна. Крім того, для зв'язної поверхні орієнтування однієї грані однозначно визначає орієнтацію усіх інших, якщо вони узгоджені, та дозволяє довести неорієнтовність поверхні (принаймні для скінченної триангуляції, див. приклад далі у вправі 4.2.19) у іншому випадку. З твердження 4.2.12 випливає, що гомеоморфізм переводить триангуляцію поверхні M у триангуляцію гомеоморфної поверхні N, яка має ті ж властивості узгодженості орієнтацій граней (ту ж "комбінаторну структуру" їх перетинів по ребрах). Тому M є орієнтовною тоді й тільки тоді, коли такою є N:

Наслідок 4.2.18. *Орієнтовність поверхні є її топологічним інваріантом.*

Вправа 4.2.19. Використавши триангуляції з прикладу 4.2.11, показати, що двовимірні сфера і тор орієнтовні, а проєктивна площина – ні. Для цього потрібно орієнтувати одну з граней триангуляції (обрати на ній один з двох напрямків обходу вершин, як показано на рис. 4.3) та спробувати визначити орієнтацію інших виходячи з умови узгодженості: для перших двох випадків це вдасться зробити, для третього обидва вибори призведуть до протиріч (виникнуть, як говорять, "дезорієнтуючі замкнені ланцюжки" з граней, які неможливо узгоджено орієнтувати).

Нарешті, зв'язна сума $M_1 \# M_2$ компактних зв'язних поверхонь M_1 і M_2 орієнтовна, якщо M_1 і M_2 орієнтовні, та неорієнтовна, якщо принаймні одна з цих двох поверхонь неорієнтовна. Спробуйте це показати, діючи як у доведенні твердження з вправи 4.2.16. З цього і попередньої вправи випливає, що усі поверхні M_g^2 орієнтовні, а N_g^2 – ні (це пояснює їх назву). Тоді топологічна інваріантність орієнтовності означає, що кожна з M_g^2 негомеоморфна будь-якій N_g^2, що (разом з використанням ейлерової характеристики вище) завершує доведення єдиності у теоремі класифікації.

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому додатковому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [3], частині I книги [13] (гл. 1–3) або гл. II книги [21]. Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення A.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e. Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a, b) \mapsto a+b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a+(-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад A.2. *Тривіальною* називається група $G = \{e\}$, що складається лише з одиниці, з очевидною груповою операцією: $ee = e$.

Приклад A.3. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад А.4. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад А.5. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n: $k \equiv l \mod n$, тобто $k - l$ кратне n. Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n. Тоді коректно (чому?) визначена операція додавання $[k] + [l] \coloneqq [k + l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем* n. Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

Приклад А.6. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \dots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу* S_n. При $n \geqslant 3$ вона є неабелевою.

Приклад А.7. Ще одним прикладом неабелевої (за умови $n \geqslant 2$) групи є *вільна група з* n *твірними* для натурального n. Так зветься фактор-множина множини скінченних слів, що складаються з символів $a_1, \dots, a_n$, $a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ за відношенням еквівалентності, що задане умовами

$$W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1\, a_i^{-1} a_i\, W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого i та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Групова операція визначається за допомогою послідовного записування слів з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 буде клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. У подальшому будемо для спрощення позначень замість класів еквівалентності слів записувати самі слова у якості елементів групи (але пам'ятати, що вони представляють відповідний клас, тому, наприклад, $W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 = W_1 W_2$). Групова операція коректно визначена та асоціативна, а нейтральним елементом є порожнє слово. Також неважко переконатися у тому, що обернений елемент до довільного слова $W = b_1 \dots b_m$ має вигляд

$$W^{-1} = (b_1 \dots b_m)^{-1} \coloneqq (b_m)^{-1} \dots (b_1)^{-1},$$

де вважаємо $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Тому це дійсно група. Позначатимемо її через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а елементи $a_1, \dots, a_n$ (тобто слова з одного символа) будемо звати *твірними* (або *породжуючими елементами*) групи. При $n = 1$ ця група ізоморфна $\mathbb{Z}$, а при $n \geqslant 2$ дійсно є неабелевою, бо, наприклад, $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ за побудовою.

Означення вільної групи можна узагальнити, використовуючи замість скінченної $\{a_1, \ldots, a_n\}$ множину твірних A довільної потужності, розглядаючи множину скінченних слів з цих твірних та обернених до них з тим самим відношенням еквівалентності та вводячи групову операцію так само. Потужніть множини твірних A зветься *рангом* відповідної вільної групи та визначає її з точністю до ізоморфізма (див. далі означення A.10 та обговорення після нього). Подальшу інформацію див. у [3, с. 64-70].

Означення A.8. Відображення груп $\alpha\colon G \to H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це).

Приклад A.9. *Тривіальний* гомоморфізм $G \to H$ визначений для будь-яких груп G і H як постійне відображення, що переводить кожний елемент $a \in G$ у нейтральний елемент $e \in H$. Він очевидним чином задовольняє попередньому означенню.

Означення A.10. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо є бієкцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha\colon G \to H$, то говорять, що група G *ізоморфна* групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом, зокрема гомоморфізмом, в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (перевірте це) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад A.11. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах A.4 і A.3 відповідно (перевірте це).

Означення A.12. *Прямим добутком* груп G_1 і G_2 зветься їх прямий декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з почленно визначеною груповою операцією, тобто $(a_1, a_2)(b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2)$ для будь-яких $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$.

Перевірте, що така операція дійсно перетворює $G_1 \times G_2$ на групу і що прямий добуток груп асоціативний: $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$ для будь-яких груп G_1, G_2 і G_3, тобто відповідні групові структури на $G_1 \times G_2 \times G_3$

збігаються. Більш того, ця конструкція очевидним чином узагальнюється на довільну скінченну кількість множників (див. також [3, с. 100-101]). Зауважимо, що добуток будь-якої групи G на тривіальну групу ізоморфний G (запишіть відповідний ізоморфізм), а добуток абелевих груп абелевий в силу означень. Прямий добуток скінченної кількості абелевих груп $G_1, \dots, G_n$ ще називають їх *прямою сумою* і позначають $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Приклад А.13. Прямий добуток будь-якого натурального числа n копій групи $\mathbb{Z}$ (відповідно, $\mathbb{R}$) з прикладу А.3 будемо позначати через $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{R}^n$). У позначеннях прямої суми це виглядає як $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ та $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_{n}$ відповідно. Таким чином, $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ – абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $\big(x^1, \dots, x^n\big) + \big(y^1, \dots, y^n\big) = \big(x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n\big)$.

Означення А.14. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G, якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) та з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення А.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Означення А.15. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо для будь-яких $a \in G$ і $b \in H$ результат aba^{-1} *спряження* елемента b з елементом a належить до H.

Приклад А.16. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад А.2) та G, що є, очевидно, нормальними.

Усі підгрупи будь-якої абелевої групи є нормальними, бо в цьому випадку $aba^{-1} = b \in H$ для усіх $a \in G$, $b \in H$.

Приклад А.17. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу А.4, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу А.13 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою. Усі ці підгрупи нормальні в силу абелевості.

Означення А.18. Нехай H – підгрупа групи G. Для кожного елемента $a \in G$ підмножини $aH \coloneqq \{ab \mid b \in H\} \subset G$ та $Ha \coloneqq \{ba \mid b \in H\} \subset G$ звуться відповідно *лівим* та *правим класами суміжності* a за H.

При цьому належність елементів групи до одного лівого або правого класу суміжності є відношенням еквівалентності (перевірте це, а також те, що ліві та праві класи суміжності – це орбіти деяких правої та лівої дій H на G відповідно, див. параграф 2.4). Таким чином, у загальному випадку виникають дві фактормножини G за цими відношеннями еквівалентності, між якими, втім, існує бієкція (яка саме?). Але якщо H нормальна, то можна говорити про однозначно визначену фактормножину:

Твердження A.19. *Нехай H – нормальна підгрупа групи G. Тоді для кожного $a \in G$ його ліві та праві класи суміжності за H збігаються: $aH = Ha$. При цьому бінарна операція*

$$G/H \times G/H \to G/H \colon (aH, bH) \mapsto aH\, bH \coloneqq ab\, H$$

на множині G/H класів суміжності G за H коректно визначена і задає на цій фактормножині структуру групи.

Означення A.20. Множина G/H (одночасно лівих та правих) класів суміжності групи G за її нормальною підгрупою H з груповою структурою, що описана у попередньому твердженні, зветься *факторгрупою* G за H.

Факторгрупа будь-якої абелевої групи є абелевою за побудовою.

Приклад A.21. Факторгрупа довільної групи G за тривіальною підгрупою $\{e\}$ ізоморфна G, бо кожен клас суміжності складається з одного елемента, а за тривіальною підгрупою G – ізоморфна $\{e\}$, бо єдиним класом суміжності буде сама G (перевірте це, явно записавши відповідні ізоморфізми).

Означення A.22. Нехай G і H – деякі групи, а відображення $\alpha \colon G \to H$ – їх гомоморфізм. Його *ядром* зветься

$$\operatorname{Ker} \alpha \coloneqq \{a \mid \alpha(a) = e\} \subset G,$$

а *образом* –

$$\operatorname{Im} \alpha \coloneqq \alpha(G) = \{\alpha(a) \mid a \in G\} \subset H.$$

Тут і в наступному твердженні через e знову позначаємо нейтральні елементи обох цих груп.

Твердження A.23 (Властивості ядра та образу)**.** *Нехай $\alpha \colon G \to H$ – деякий гомоморфізм груп.*

1. $\operatorname{Ker} \alpha$ *– нормальна підгрупа G і α – ін'єкція (мономорфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Ker} \alpha = \{e\}$*;*

2. $\operatorname{Im} \alpha$ *– підгрупа H і α – сюр'єкція (епіморфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Im} \alpha = H$*;*

3. *Відображення*

$$G/\operatorname{Ker} \alpha \to \operatorname{Im} \alpha \colon a \operatorname{Ker} \alpha \mapsto \alpha(a)$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Таким чином, пункт 3. цього твердження (що називають ще *першою теоремою Ньотер про ізоморфізм*) означає, що $G/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha$ для будь-якого гомоморфізма $\alpha\colon G \to H$.

Приклад A.24. Для натурального n розглянемо відображення

$$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n\colon k \mapsto [k]$$

абелевих груп з прикладів A.3 та A.5 відповідно. Оскільки

$$\alpha(k+l) = [k+l] = [k] + [l] = \alpha(k) + \alpha(l)$$

для будь-яких $k, l \in \mathbb{Z}$ за побудовою структури групи на $\mathbb{Z}_n$, α є гомоморфізмом. Він сюр'єктивний, бо $[k] = \alpha(k)$ для будь-якого $[k] \in \mathbb{Z}_n$, тобто $\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{Z}_n$. Ядро цього гомоморфізма має вигляд

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = [0]\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 \mod n\} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\},$$

тобто складається з усіх кратних n цілих чисел. Позначимо цю підмножину через $n\mathbb{Z}$. Неважко безпосередньо перевірити, що це нормальна (хоча б у силу абелевості) підгрупа $\mathbb{Z}$, як і повинно бути за пунктом 1. попереднього твердження. Тоді за його ж пунктом 3. маємо

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n,$$

де ізоморфізм задається умовою $k + n\mathbb{Z} \mapsto \alpha(k) = [k]$ для кожного $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (де використовуємо адитивні позначення також і для класів суміжності за підгрупою $n\mathbb{Z}$).

Якщо гомоморфізм груп $\alpha\colon G \to H$ ін'єктивний, то з прикладу A.21 і пунктів 1. та 3. твердження A.23 маємо

$$G \simeq G/\{e\} = G/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha = \alpha(G),$$

більш того, відповідним ізоморфізмом $G \to \alpha(G)$ буде саме α (чому?), що неважко перевірити й безпосередньо.

Наслідок A.25. *Будь-який ін'єктивний гомоморфізм груп є ізоморфізмом на свій образ.*

Предметний покажчик

Список літератури

[1] В.М. Бабич, В.О. Пєхтєрєв. Загальна топологія в задачах і прикладах. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2015. – 208 с.

[2] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Харків: Основа, 1995. – 304 с.

[3] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005. – 122 с.

[4] А.Я. Дороговцев. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Либідь, 1993. – 320 с.

[5] В.М. Кадець. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів: Чижиков І.Е., 2012. – 590 с.

[6] Т.А. Мельник. Комплексний аналіз: підручник. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 192 с.

[7] О.О. Пришляк. Основи сучасної топології: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2006. – 78 с.

[8] О.О. Пришляк, Н.В. Лукова. Диференціальна геометрія та топологія: курс лекцій. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2011. – 120 с.

[9] О.О. Пришляк. Топологія многовидів: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2013. – 83 с.

[10] M.A. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983. – 266 p.

[11] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995. – 444 p.

[12] E.D. Demaine, M.L. Demaine, Y.N. Minsky, J.S.B. Mitchell, R.L. Rivest, M. Pătraşcu. Picture-Hanging Puzzles. Preprint, arXiv:1203.3602, April 26 2014. – 18 p.

[13] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004. – 944 p.

[14] R. Engelking. General Topology. Revised and Completed Edition. Heldermann Verlag, 1989. – 534 p.

[15] D. Gale. The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam. The American Mathematical Monthly, 94 (1987), p. 170-175.

[16] S. Geschke. Convex Open Subsets of $\mathbb{R}^n$ Are Homeomorphic to n-dimensional Open Balls. Preprint, Hausdorff Center for Mathematics, July 4 2012. – 3 p.

[17] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. – 556 p.

[18] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen. Geometry and the Imagination. AMS Chelsea, 1999. – 368 p.

[19] J.L. Kelley. General Topology. Springer, 1975. – 312 p.

[20] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. – 278 p.

[21] S. Lang. Undergraduate Algebra. Third Edition. Springer, 2010. – 398 p.

[22] J.M. Lee. Introduction to Topological Manifolds. Second Edition. Springer, 2011. – 452 p.

[23] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2020. – 727 p.

[24] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000. – 552 p.

[25] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis. Third Edition. McGraw Hill, 1976. – 352 p.

[26] L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Second Edition. Dover Publications, 1995. – 256 p.

[27] W.P. Thurston. Three-dimensional Geometry and Topology. Volume 1. Edited by S. Levy. Princeton University Press, 1997. – 328 p.

[28] H. Tverberg. A Proof of the Jordan Curve Theorem. Bulletin of the London Mathematical Society, 12 (1980), p. 34-38.

Навчальне видання

Петров Євген В'ячеславович

ТОПОЛОГІЯ
Базовий курс

Навчальний посібник з топології
для студентів математичних факультетів університетів

Коректор М. С. Хащіна
Комп'ютерне верстання Є. В. Петров
Макет обкладинки І. М. Дончик

Формат __________. Умов. друк. арк. ____. Наклад ____ прим. Зам. № ____.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32