

Тяжки мисли і тяжкі фантазми

def n -~~виринат~~ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ ~~многочлен~~ ~~вадан~~ (монотонный)

будет называться хаусдорфовый z ($\leq$) z -линейно

базою топологічний простір M такий, що $\forall p \in M$
 $\exists$ відкрите $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$
(n наз. ^{вимірністю} M : $n = \dim M$)
Рем. $\mathbb{R}^n$ тут можна замінити на відкр. кулю $B^n \subset \mathbb{R}^n$ (або на будь-яке $V \subset \mathbb{R}^n$: V гомеоморфне $\mathbb{R}^n$),
отримавши екв. означення.

деф. Пара (U, φ) з попереднього деф. зветься картою
 M , U - носій карти (координатний осям), φ - коорд.
визображення, якщо $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$
звуться локальними координатами, що визначають
цію карту. Кадір карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ зветься
атласом M , якщо $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

деф. Нехай $(U, \varphi), (V, \psi)$ - карти M , $U \cap V \neq \emptyset$. Визобра-
ження пересоду (заміни координат) від першої
карти до другої зветься $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$.



def. Атлас $\mathcal{A}$ звется k -атласом (де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$), якщо $\forall (U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ таких, що $U \cap V \neq \emptyset$,
 $\psi \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V))$

Rem. Це буде k -диффеоморфізм відкр. підмножин $\mathbb{R}^n$.

def. Два k -м. атласи $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ на множині M наз. еквівалентними, якщо $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ - k -м. атлас.

Впр. Це відношення еквівалентності.

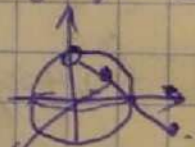
def. k -матричного на множині M звется клас еквівалентності k -м. атласів M ; пара $(M, [\mathcal{A}])$ де $[\mathcal{A}]$ - k -м. структура на множині M , звется k -матричним множинним

Rem. $\forall k$ -м. стр. (атлас, множина) $\in \ell$ -матричного для $\ell \leq k$, зокрема $\forall$ множини $\mathbb{R}^n$ (тривіально) 0-м. стр.

V атлас - 0-м. і V два едновимірні.

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$ - n -вимірний ∞ -м, $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну мапку стгр.

2. S^n - n -вимірний ∞ -м. : $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна атл. стгр. задається атласом з 2 карт (стереопроекції)

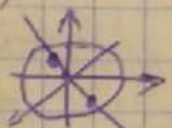


3. M, N - k -мапкі многобуг $\Rightarrow M \times N$ - k -м. многобуг (Втр.) каноніч., n -вимірний мор $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ - ∞ -мапкі (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$).

4. M - n -вимірний k -мапкі, $U \subset M$ - відкрите $\Rightarrow U$ - n -вимірний k -мапкі многобуг (Втр.)

5. $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n -вимірний лінійний проективний простір) - простір прямих, що проходять ^{$\mathbb{R}^{n+1}$} через 0.
 $\mathbb{RP}^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1})\}$, де $(x^1, \dots, x^{n+1}) = [x^1, \dots, x^{n+1}]$.

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) = (\lambda x^1, \dots, \lambda x^{n+1}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Або: $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$  - простір пар
діаметрально протилежних точок S^n .

Це n -вимірний $\mathbb{R}$ -м. многовид, станг. гладка структура
задається атласом $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, де $U_i =$
 $= \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$, $\varphi_i(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$.

(комплексний проективний простір)

Впр. Перевірити, що це $\mathbb{R}$ -м. атлас. Що таке $\mathbb{C}P^n$?

Чи є $\mathbb{C}P^n$ ~~м.~~ $\mathbb{R}$ -м. многовидом? Які вимірності?

дів. Нехай M, N - k -м. многовиди. Неперервне F :

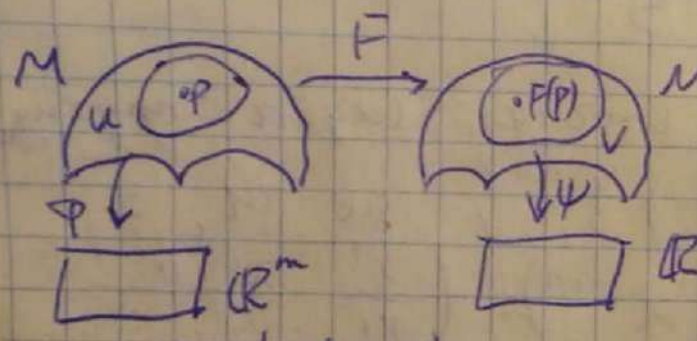
$M \rightarrow N$ поз. k -мапінг, якщо $\forall p \in M$ і $\forall$ карт

(U, φ) і (V, ψ) із якихось атласів гладких структур

M і N відповідно таких, що $p \in U$, $F(p) \in V$ відобра-

ження $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ - k -мапінг.

Рем. $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}$ позв. локальний задання F у визн. парі карт (у визн. локальних координатах). Це визн. обрання підпростору $\mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n$, де $m = \dim M, n = \dim N$.

 (Визн. яких підпростору?)
Якщо $(x^1, \dots, x^m), (y^1, \dots, y^n)$ - лока. коорд., що визначаються (U, Φ) та (V, Ψ) , то цю карту можна записати у вигляді:

$$y^i = F^i(x^1, \dots, x^m)$$

$$y^n = \bar{F}^n(x^1, \dots, x^m)$$

Рем. В силу означення гладкої структури, гладкість достатньо перевірити лише для однієї пари карт $(U, \Phi), (V, \Psi)$ в околі точки $p \in M$ (Визн.)

Множина k -м. відображень $M \rightarrow N$ позначається $C^k(M, N)$. Очевидно,

$C^k(M, N) \subset C^{k-1}(M, N) \subset \dots \subset C^0(M, N) = C(M, N)$
 Крім того, $F \in C^k(M, N), G \in C^k(L, M) \xrightarrow{F \circ G} C^k(L, N)$ (вн.)
 Ек. 1. k -гладкі криві $\gamma \in C^k((a, b), M)$, де $(a, b) \subset \mathbb{R}$

2. k -гладкі функції $f \in C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$.

3. k -дифеоморфізми:

def. $F: M \rightarrow N$ наз. k -дифеоморфізмом, якщо F -біз,
 $F \in C^k(M, N), F^{-1} \in C^k(N, M)$. Також існує такий
 диф-зм, M і N наз. k -дифеоморфними ($M \cong N$)

Впр. Це відношення еквівалентності.
 В карті (U, φ) (затлачує кр. стр. M) $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ - k -дифео-зм.
 Lem. Зараз, F -дифеоморфізм $\Rightarrow F$ -ізоморфізм $\Rightarrow$
 $\dim M = \dim N$.

Впр. Якщо $[A]$ і $[B]$ - k -м. стр. на M , то $\text{id}_M: (M, [A]) \rightarrow (M, [B])$ - k -дифеоморфізм $\Leftrightarrow [A] = [B]$.

Rem. Також розглядати не id_M , а якийсь довільний $F: M \rightarrow M$
 стримативно означення еквівалентності гладких структур на M .