Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Задача 16.1. Доведіть, що друга фундаментальна форма поверхні F не зміниться, якщо поверхню F переміщувати (паралельний перенос, обертання, симетрія) в просторі $\mathbb{R}^3$.

Розв’язання.

$$\vec{f}^*(u^1,u^2) = U\cdot\vec{f}\ (u^1,u^2)+\vec{c}, \quad U\in O(3)$$

$$\frac{\partial\vec{f}^*}{\partial u^1} = U\cdot\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \quad \frac{\partial\vec{f}^*}{\partial u^2} = U\cdot\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \quad \vec{n}^* = U\cdot\vec{n}$$

$$\frac{\partial^2\vec{f}^*}{\partial u^1\partial u^1} = U\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1}, \quad \frac{\partial^2\vec{f}^*}{\partial u^1\partial u^2} = U\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2\vec{f}^*}{\partial u^2\partial u^2} = U\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2}$$

$$B_{ij}^* = \left< \frac{\partial^2\vec{f}^*}{\partial u^i\partial u^j}, \vec{n}^* \right> = \left< U\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^i\partial u^j}, U\cdot\vec{n} \right> = \left< \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^i\partial u^j}, \vec{n} \right> = B_{ij}$$

$$B_{ij}^* = B_{ij}$$

Задача 16.2. Як зміниться друга фундаментальна форма поверхні F, якщо до поверхні F застосувати гомотетію з коефіцієнтом λ в просторі $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання.

$$\vec{f}^{\,*}(u^1,u^2)=\lambda\,\vec{f}\ \ (u^1,u^2)$$

$$\frac{\partial\vec{f}^{\,*}}{\partial u^1}=\lambda\,\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\ ,\quad \frac{\partial\vec{f}^{\,*}}{\partial u^2}=\lambda\,\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2},\qquad \vec{n}^{\,*}=\pm\vec{n}$$

$$\frac{\partial^2\vec{f}^{\,*}}{\partial u^1\partial u^1}=\lambda\,\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1}\ ,\quad \frac{\partial^2\vec{f}^{\,*}}{\partial u^1\partial u^2}=\lambda\,\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2}\ ,\quad \frac{\partial^2\vec{f}^{\,*}}{\partial u^2\partial u^2}=\lambda\,\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2}$$

$$B^*_{ij}\ =\ <\frac{\partial^2\vec{f}^{\,*}}{\partial u^i\partial u^j},\vec{n}^{\,*}>\ =\ <\lambda\,\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^i\partial u^j}\,,\pm\vec{n}>=\pm\,\lambda<\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^i\partial u^j}\,,\vec{n}>=\pm\,\lambda\,B_{ij}$$

$$B^*_{ij}=\pm\,\lambda\,B_{ij}$$

Задача 16.3. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній поверхні обертання з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho(u^1)\cos u^2 \\ \rho(u^1)\sin u^2 \\ h(u^1) \end{pmatrix}$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

1) сфера: $\rho(u^1) = R\cos u^1$, $h(u^1) = R\sin u^1$

2) еліпсоїд обертання: $\rho(u^1) = A\cos u^1$, $h(u^1) = B\sin u^1$

3) конус обертання: $\rho(u^1) = Au^1 + B$, $h(u^1) = Cu^1 + D$

4) псевдосфера: $\rho(u^1) = R\dfrac{1}{\cosh u^1}$, $h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$

5) катеноїд: $\rho(u^1) = a\cosh u^1$, $h(u^1) = au^1$

6) тор обертання: $\rho(u^1) = R + \lambda\cos u^1$, $h(u^1) = \lambda\sin u^1$, $\quad R > \lambda > 0$

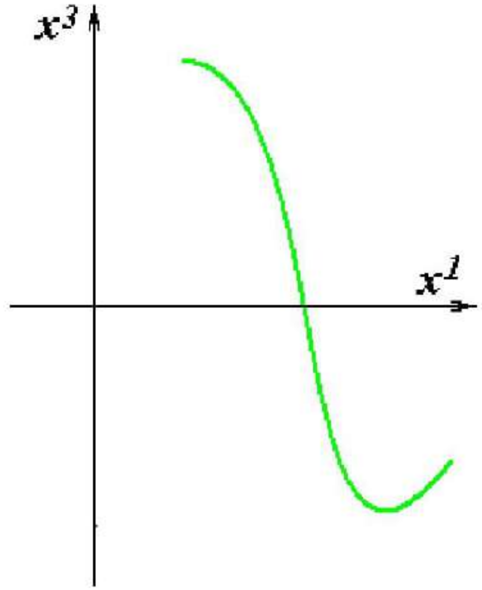
Розв'язання.

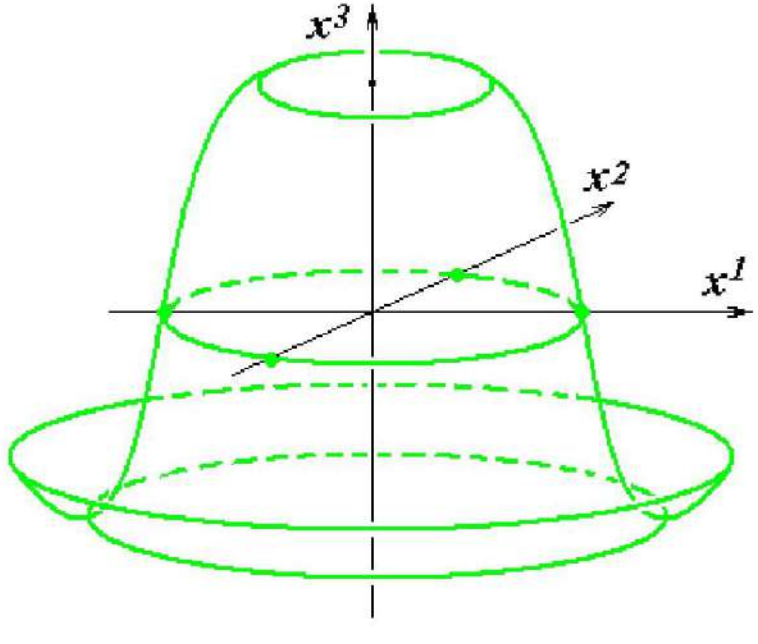
$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\rho(u^1)\cos u^2\\ \rho(u^1)\sin u^2\\ h(u^1)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}=\begin{pmatrix}\rho'\cos u^2\\ \rho'\sin u^2\\ h'\end{pmatrix}\ ,\quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}=\begin{pmatrix}-\rho\sin u^2\\ \rho\cos u^2\\ 0\end{pmatrix},$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]=\begin{pmatrix}-h'\rho\cos u^2\\ -h'\rho\sin u^2\\ \rho'\rho\end{pmatrix},$$

$$|[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]|=|\rho|\sqrt{(\rho')^2+(h')^2}$$





Регулярність поверхні обертання:

$$|\rho|\sqrt{(\rho')^2+(h')^2}\neq 0$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\rho\,')^2 + (h\,')^2}} \begin{pmatrix} -h\,'\cos u^2 \\ -h\,'\sin u^2 \\ \rho\,' \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^1} = \begin{pmatrix} \rho''\cos u^2 \\ \rho''\sin u^2 \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^2} = \begin{pmatrix} -\rho'\sin u^2 \\ \rho'\cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2 \partial u^2} = \begin{pmatrix} -\rho\cos u^2 \\ -\rho\sin u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = <\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^1}, \vec{n}> = \frac{h''\rho' - h\,'\rho''}{\sqrt{(\rho\,')^2 + (h\,')^2}}, \quad B_{12} = <\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^2}, \vec{n}> = 0,$$

$$B_{22} = <\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2 \partial u^2}, \vec{n}> = \frac{h'\rho}{\sqrt{(\rho\,')^2 + (h\,')^2}}$$

$$B = \frac{h''\rho' - h\,'\rho''}{\sqrt{(\rho\,')^2 + (h\,')^2}}(du^1)^2 + \frac{h'\rho}{\sqrt{(\rho\,')^2 + (h\,')^2}}(du^2)^2$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{h''\rho' - h'\rho''}{\sqrt{(\rho')^2 + (h')^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{h'\rho}{\sqrt{(\rho')^2 + (h')^2}} \end{pmatrix}$$

$$\det B = \frac{h'\rho\,(h''\rho' - h'\rho'')}{(\rho')^2 + (h')^2}$$

Тип точок на поверхні обертання:

гіперболічний $\Leftrightarrow\ h'\rho\,(h''\rho' - h'\rho'') < 0$

еліптичний $\Leftrightarrow\ h'\rho\,(h''\rho' - h'\rho'') > 0$

параболічний $\Leftrightarrow\ h'\rho\,(h''\rho' - h'\rho'') = 0$

$$(h'\rho)^2 + (h''\rho' - h'\rho'')^2 \neq 0$$

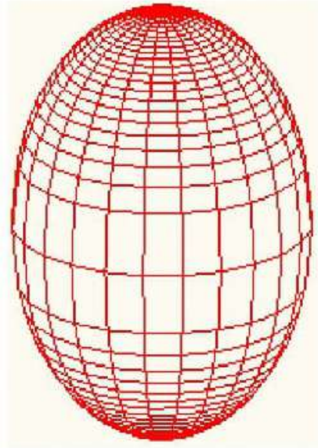
точка сплощення $\Leftrightarrow\ (h'\rho)^2 + (h''\rho' - h'\rho'')^2 = 0$

Конкретні приклади

1) Сфера: $\rho(u^1) = R\cos u^1,\ h(u^1) = R\sin u^1,\ -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}$

$$h'\,\rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') = R^4\cos^2 u^1 > 0$$

Усі точки на сфері мають еліптичний тип



2) Еліпсоїд обертання: $\rho(u^1) = A\cos u^1,\ h(u^1) = B\sin u^1$

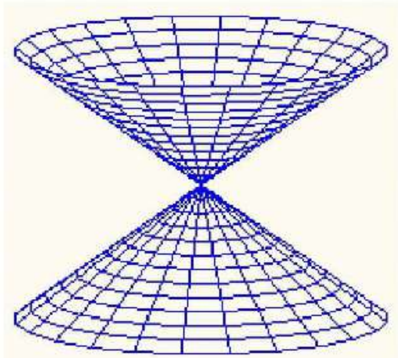
$$h'\,\rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') = A^2B^2\cos^2 u^1 > 0$$

Усі точки на еліпсоїді мають еліптичний тип

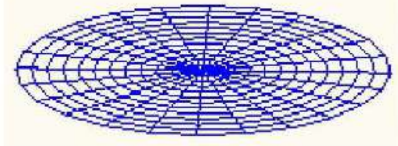
3) Конус обертання: $\rho(u^1) = Au^1 + B,\ h(u^1) = Cu^1 + D$

$$h'\,\rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') = 0$$

$$(h'\,\rho)^2 + (h''\,\rho' - h'\,\rho'')^2 = C^2(Au^1 + B)^2 \text{ - ?}$$

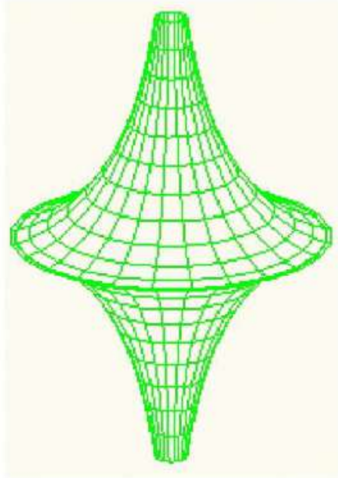


Якщо $C \neq 0$, то усі точки на конусі (крім вершини) мають параболічний тип.



Якщо $C = 0$, то замість конуса отримуємо площину, усі її точки є точками сплощення.

4) Псевдосфера: $\rho(u^1) = \dfrac{R}{\cosh u^1}$, $h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$



Регулярність: $u^1 \neq 0$

$$h' \rho \,(h'' \rho' - h' \rho'') = -R^4 \frac{\sinh^4 u^1}{\cosh^6 u^1} < 0$$

Усі точки на псевдосфері мають гіперболічний тип.

5) Катеноїд: $\rho(u^1) = a\cosh u^1$, $h(u^1) = au^1$

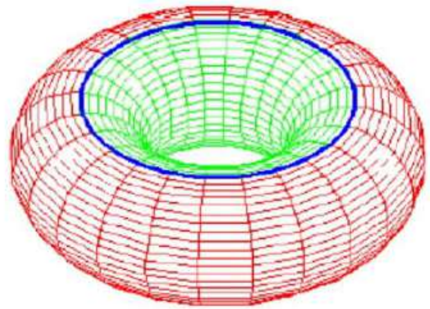
$$h' \rho \,(h'' \rho' - h' \rho'') = -a^4 \cosh^2 u^1 < 0$$

Усі точки мають гіперболічний тип.

6) Тор обертання: $\rho(u^1) = R + \lambda\cos u^1$, $h(u^1) = \lambda \sin u^1$, $0 < \lambda < R$.

$$h'\,\rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') = \lambda^3 \cos u^1 (R + \lambda \cos u^1)$$

$$(h'\,\rho)^2 + (h''\,\rho' - h'\,\rho'')^2 = \lambda^4 + \lambda^2 \cos^2 u^1 (R + \lambda\cos u^1)^2 \neq 0$$



Точки з $\cos u^1 > 0$ мають еліптичний тип.

Точки з $\cos u^1 < 0$ мають гіперболічний тип.

Точки з $\cos u^1 = 0$ мають параболічний тип.

Задача 16.4. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній поверхні гвинтового обертання з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho(u^1)\cos u^2 \\ \rho(u^1)\sin u^2 \\ h(u^1) + Cu^2 \end{pmatrix}, \quad C=const \neq 0$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

1) косий гелікоїд: $\rho(u^1) = Au^1$, $h(u^1) = Bu^1$

2) поверхня Діні: $\rho(u^1) = R\dfrac{1}{\cosh u^1}$, $h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$

3) трубчата поверхня: $\rho(u^1) = R + \lambda\cos u^1$, $h(u^1) = \lambda\sin u^1$, $\quad R > \lambda > 0$

Розв’язання.

$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\rho(u^1)\cos u^2\\ \rho(u^1)\sin u^2\\ h(u^1)+Cu^2\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}=\begin{pmatrix}\rho'\cos u^2\\ \rho'\sin u^2\\ h'\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}=\begin{pmatrix}-\rho\sin u^2\\ \rho\cos u^2\\ C\end{pmatrix},$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]=\begin{pmatrix}C\rho'\sin u^2-h'\rho\cos u^2\\ -C\rho'\cos u^2-h'\rho\sin u^2\\ \rho'\rho\end{pmatrix},$$

$$|[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]|=\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho')^2+(h')^2}$$

Регулярність поверхні гвинтового обертання: $\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho')^2+(h')^2}\neq 0$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho\,')^2+\rho^2(h\,')^2}}\begin{pmatrix} C\rho\,'\sin u^2 - h\,'\,\rho\cos u^2 \\ -C\rho\,'\cos u^2 - h\,'\,\rho\sin u^2 \\ \rho\,'\,\rho \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1} = \begin{pmatrix} \rho''\cos u^2 \\ \rho''\sin u^2 \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\rho'\sin u^2 \\ \rho'\cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\rho\cos u^2 \\ -\rho\sin u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \left\langle \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1}, \vec{n} \right\rangle = \frac{\rho\,(h''\rho' - h\,'\rho'')}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho\,')^2+\rho^2(h\,')^2}},$$

$$B_{12} = \left\langle \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2}, \vec{n} \right\rangle = \frac{-C(\rho\,')^2}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho\,')^2+\rho^2(h\,')^2}},$$

$$B_{22} = \left\langle \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2}, \vec{n} \right\rangle = \frac{h'\rho^2}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho\,')^2+\rho^2(h\,')^2}}$$

$$B = \frac{\rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'')(du^1)^2 - 2C(\rho')^2 du^1 du^2 + h'\,\rho^2 (du^2)^2}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho')^2 + \rho^2 (h')^2}}$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(C^2+\rho^2)(\rho')^2 + \rho^2 (h')^2}} \cdot \begin{pmatrix} \rho\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') & -C(\rho')^2 \\ -C(\rho')^2 & h'\,\rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \frac{h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4}{(C^2+\rho^2)(\rho')^2 + \rho^2 (h')^2}$$

Тип точок на поверхні обертання:

гіперболічний $\Leftrightarrow$ $h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 < 0$

еліптичний $\Leftrightarrow$ $h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 > 0$

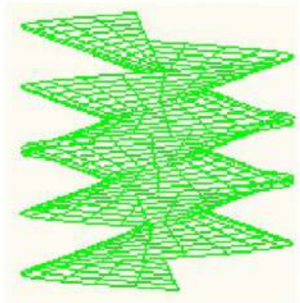
параболічний $\Leftrightarrow$ $h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 = 0$

$$\rho^2 + (\rho')^2 \neq 0$$

точка сплощення $\Leftrightarrow$ $\rho' = \rho = 0$

Конкретні приклади

1) Косий гелікоїд: $\rho(u^1) = Au^1,\ h(u^1) = Bu^1$



$$h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 = -A^4C^2 < 0$$

Усі точки на косому гелікоїді мають гіперболічний тип

2) Поверхня Діні: $\rho(u^1) = \dfrac{R}{\cosh u^1},\ h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$

$$h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 = -R^4(R^2 + C^2)\frac{\sinh^4 u^1}{\cosh^8 u^1} < 0$$

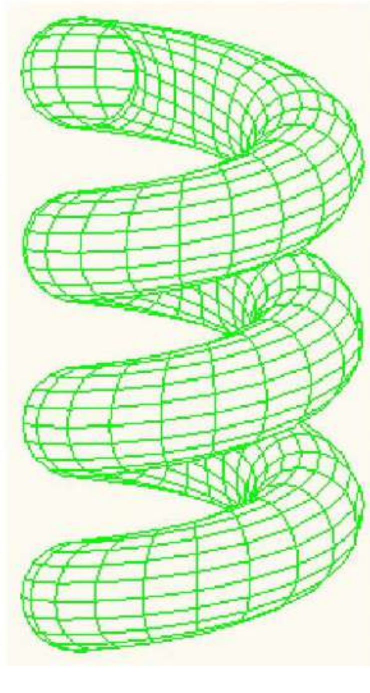
Усі точки на поверхні Діні мають гіперболічний тип

3) Трубчата гвинтова поверхня:

$$\rho(u^1) = R + \lambda\cos u^1,\ h(u^1) = \lambda\sin u^1$$

$$h'\,\rho^3\,(h''\,\rho' - h'\,\rho'') - C^2(\rho')^4 =$$
$$= \lambda^3\left(\cos u^1 (R + \lambda\cos u^1)^3 - C^2\lambda\sin^4 u^1\right)$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = (R + \lambda\cos u^1)^2 + \lambda^2\sin^2 u^1$$



Тип точок на гвинтовій трубчатій поверхні:

гіперболічний $\Leftrightarrow\ \cos u^1 (R + \lambda\cos u^1)^3 - C^2\lambda\sin^4 u^1 < 0$

еліптичний $\Leftrightarrow\ \cos u^1 (R + \lambda\cos u^1)^3 - C^2\lambda\sin^4 u^1 > 0$

параболічний $\Leftrightarrow\ \cos u^1 (R + \lambda\cos u^1)^3 - C^2\lambda\sin^4 u^1 = 0$

$$(R + \lambda\cos u^1)^2 + \lambda^2\sin^2 u^1 \neq 0$$

точка сплощення $\Leftrightarrow\ R + \lambda\cos u^1 = 0,\ \sin u^1 = 0$

Задача 16.5. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній лінійчатій поверхні з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{a}(u^1) + u^2\vec{b}(u^1)$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

1) циліндрична поверхня: $\vec{b} \equiv \vec{e}, \ <\vec{a},\vec{e}> \equiv 0$

2) конічна поверхня: $\vec{a} \equiv \vec{0}, |\vec{b}| \equiv 1, |\vec{b}'| \equiv 1$

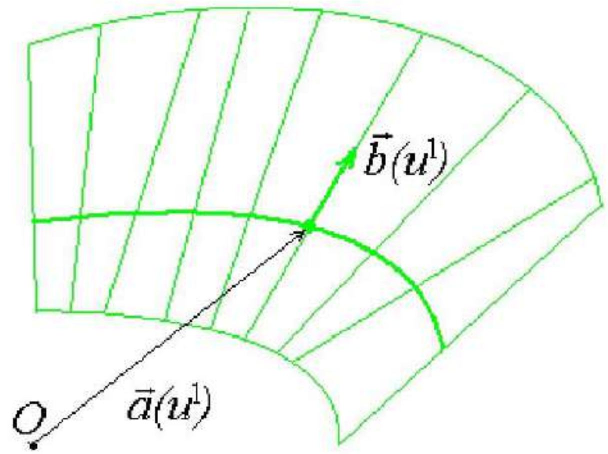
3) торсова поверхня: $\vec{b} = \vec{a}'$

Розв'язання:

$$\vec{f}(u^1,u^2) = \vec{a}(u^1) + u^2\vec{b}(u^1)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1} = \vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,' \ , \quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} = \vec{b},$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}]$$



Регулярність лінійчатої поверхні: $[\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}] \neq \vec{0}$

$$\vec{n}=\frac{[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]}{|[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]|}$$

$$\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1}=\vec{a}\,''+u^2\,\vec{b}\,''\ ,\quad \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2}=\vec{b}\,'\ ,\quad \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2}=\vec{0}$$

$$B_{11}=<\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^1},\vec{n}>=\frac{(\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b},\vec{a}\,''+u^2\,\vec{b}\,'')}{|[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]|}\ ,$$

$$B_{12}=<\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^1\partial u^2},\vec{n}>=\frac{(\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b},\vec{b}\,')}{|[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]|}=\frac{(\vec{a}\,',\vec{b}\,,\vec{b}\,')}{|[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]|}\ ,$$

$$B_{22}=<\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial u^2\partial u^2},\vec{n}>=0$$

$$B=\frac{1}{|[\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b}]|}\Big((\vec{a}\,'+u^2\,\vec{b}\,',\vec{b},\vec{a}\,''+u^2\,\vec{b}\,'')(du^1)^2+2(\vec{a}\,',\vec{b}\,,\vec{b}\,')du^1du^2\Big)$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|[\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}]|} \cdot \begin{pmatrix} (\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2\,\vec{b}\,'') & (\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') \\ (\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -\frac{(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,')^{\,2}}{|[\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}]|^{\,2}}$$

Тип точок на лінійчатій поверхні:

гіперболічний $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') \neq 0$

параболічний $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') = 0$

$$(\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2\,\vec{b}\,'') \neq 0$$

точка сплощення $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') = 0$

$$(\vec{a}\,' + u^2\,\vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2\,\vec{b}\,'') = 0$$

Конкретні приклади

1) Циліндрична поверхня: $\vec{b} \equiv \vec{e}, \ <\vec{a}, \vec{e}> \equiv 0$

$$(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') \equiv 0$$

$$(\vec{a}\,' + u^2 \vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2 \vec{b}\,'') = (\vec{a}\,', \vec{e}, \vec{a}\,'')$$

Якщо $(\vec{a}\,', \vec{e}, \vec{a}\,'') \neq 0$, то точки мають параболічний тип

Якщо $(\vec{a}\,', \vec{e}, \vec{a}\,'') = 0$, то маємо точки сплощення

2) Конічна поверхня: $\vec{a} \equiv \vec{0}, |\vec{b}| \equiv 1, |\vec{b}'| \equiv 1$

$$(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') \equiv 0$$

$$(\vec{a}\,' + u^2 \vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2 \vec{b}\,'') \ = \ (u^2)^2 \ (\vec{b}\,', \vec{b}, \vec{b}\,'')$$

Якщо $(\vec{b}, \vec{b}\,', \vec{b}\,'') \neq 0$, то точки мають параболічний тип

Якщо $(\vec{b}, \vec{b}\,', \vec{b}\,'') = 0$, то маємо точки сплощення

3) Торсова поверхня: $\vec{b} = \vec{a}'$

$$(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') \equiv 0$$

$$(\vec{a}\,' + u^2 \vec{b}\,', \vec{b}, \vec{a}\,'' + u^2 \vec{b}\,'') \ = (u^2)^2 \ (\vec{a}'', \vec{a}', \vec{a}''')$$

Якщо $(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') \neq 0$, то точки мають параболічний тип

Якщо $(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$, то маємо точки сплощення

Задача 16.6. Доведіть, що для сфери радіуса R перша і друга фундаментальні форми пов'язані співвідношенням

$$B = \pm \frac{1}{R} g$$

Доведення. За визначенням, $B = < d^2 \vec{f}, \vec{n} >$

Для сфери радіуса R з центром в точці O маємо

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{R} (\vec{f} - \vec{x}_O)$$

Оскільки нормаль ортогональна дотичним векторам, маємо:

$$< \vec{f} - \vec{x}_O, d\vec{f} > \equiv 0$$

Диференціюємо: $< d\vec{f}, d\vec{f} > + < \vec{f} - \vec{x}_O, d^2 \vec{f} > \equiv 0$

$$< d\vec{f}, d\vec{f} > \pm < R\vec{n}, d^2 \vec{f} > \equiv 0$$

$$g \pm RB \equiv 0$$

$$B = \mp \frac{1}{R} g$$