

Лекція 15. Друга фундаментальна форма поверхні. Нормальна кривина.

1. Друга фундаментальна форма поверхні

Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2).$$

Визначення. Другою фундаментальною формою поверхні F називається білінійна диференціальна форма

$$B = B_{11}du^1du^1 + B_{12}du^1du^2 + B_{21}du^2du^1 + B_{22}du^2du^2$$

з коефіцієнтами

$$B_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

Зауваження. Вектор $\vec{n}$ – це одиничний нормальний вектор поверхні. Якщо змінити вектор нормалі на протилежний, то друга фундаментальна форма (усі її коефіцієнти одночасно) змінить знак.

Твердження (елементарні властивості другої фундаментальної форми)

1) Якщо радіус-вектор $\vec{f}(u^1, u^2) \in C^m$, то коефіцієнти $B_{ij} = B_{ij}(u^1, u^2) \in C^{m-2}$

2) Друга фундаментальна форма є симетричною: $B_{12} = B_{21}$

3) $B = \langle d^2 \vec{f}, \vec{n} \rangle$

Доведення:

$$1) \quad B_{ij} = \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \rangle = \pm \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}]}{|[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}]|} \rangle = \pm \frac{(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j})}{|[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}]|}$$

$$2) \quad B_{12} = \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^2}, \vec{n} \rangle = \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2 \partial u^1}, \vec{n} \rangle = B_{21}$$

$$3) \quad B = \sum_{k,l=1}^2 B_{kl} du^k du^l = \sum_{k,l=1}^2 \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^k \partial u^l}, \vec{n} \rangle du^k du^l = \langle \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^k \partial u^l} du^k du^l, \vec{n} \rangle = \langle d^2 \vec{f}, \vec{n} \rangle$$

Твердження (тензорний закон зміни коефіцієнтів д.ф.ф.)

Якщо на поверхні F зробити регулярну заміну локальних координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}'$$

то коефіцієнти другої фундаментальної форми зміняться за формулою

$$\tilde{B}_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 B_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k,l=1}^2 B_{kl} du^k du^l = \sum_{k,l=1}^2 B_{kl} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} d\tilde{u}^i \right) \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} d\tilde{u}^j \right) = \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^2 B_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} d\tilde{u}^i \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} d\tilde{u}^j = \sum_{i,j=1}^2 \left(\sum_{k,l=1}^2 B_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \right) d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j = \sum_{i,j=1}^2 \tilde{B}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j \end{aligned}$$

Тензорний закон зміни коефіцієнтів д.ф.ф.

$$\tilde{B}_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 B_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

записується в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = J^t B J$$

Зауваження. Якщо якась величина визначається за допомогою другої фундаментальної форми, то потрібно контролювати, що результат не залежить від вибору локальних координат. Для цього потрібно використовувати тензорний закон зміни коефіцієнтів д.ф.ф.

$$\text{Приклад. } \tilde{B}=0 \Leftrightarrow B=0$$

$$\text{Приклад. } \det \tilde{B} > 0 \text{ (} < 0, = 0 \text{) } \Leftrightarrow \det B > 0 \text{ (} < 0, = 0 \text{)}$$

Приклад 1. Нехай F – площа, представлена радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2$$

Тоді за формулою

$$B_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \right\rangle$$

отримаємо

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто друга фундаментальна форма площини є тотожно нульовою $B \equiv 0$

Задача. Доведіть обернене твердження: якщо друга фундаментальна форма поверхні є тотожно нульовою, $B \equiv 0$, то поверхня є площиною.

Приклад 2. Нехай F явно задана поверхня $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$. Тоді матриця коефіцієнтів її другої фундаментальної форми має вигляд

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} \end{pmatrix}$$

Доведення.

$$x^3 = \varphi(x^1, x^2) \leftrightarrow \begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \varphi(u^1, u^2) \end{cases} \leftrightarrow \vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1, u^2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}]}{|[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}]|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial \varphi}{\partial u^1})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial u^2})^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

$$B_{ij} = \langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \rangle = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial \varphi}{\partial u^1})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial u^2})^2}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}$$

2. Друга фундаментальна форма поверхні і апроксимація поверхні

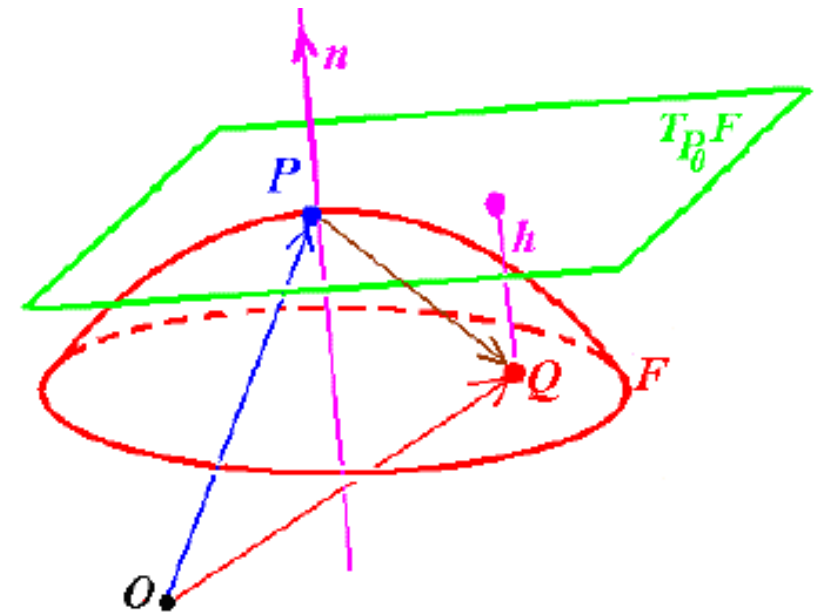
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2).$$

Зафіксуємо на поверхні F точку P з координатами (u_0^1, u_0^2)

Для довільної точки Q поверхні F розглянемо її відхилення h від дотичної площини $T_P F$:

$$h = \langle \vec{f}(u^1, u^2) - \vec{f}(u_0^1, u_0^2), \vec{n}(u_0^1, u_0^2) \rangle$$



Запишемо розкладання Тейлора вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(u^1, u^2) &= \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j}(u_0^1, u_0^2) \cdot (u^j - u_0^j) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}(u_0^1, u_0^2) \cdot (u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j) + \bar{o}((u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2)\end{aligned}$$

Тоді для відхилення h отримуємо (з точністю до членів другого порядку)

$$\begin{aligned}h &= \langle \vec{f}(u^1, u^2) - \vec{f}(u_0^1, u_0^2), \vec{n}(u_0^1, u_0^2) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 B_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot (u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j) + \bar{o}(\dots)\end{aligned}$$

Висновок. В доволі малому околі точки P відхилення поверхні F від дотичної площини $T_P F$ визначається (якісно і кількісно) другою фундаментальною формою B поверхні F в точці P .

3. Щільнодотичний параболоїд та класифікація точок поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$.

Зафіксуємо на поверхні F точку P .

Виберемо декартові координати (x^1, x^2, x^3) в просторі $\mathbb{R}^3$ так, що

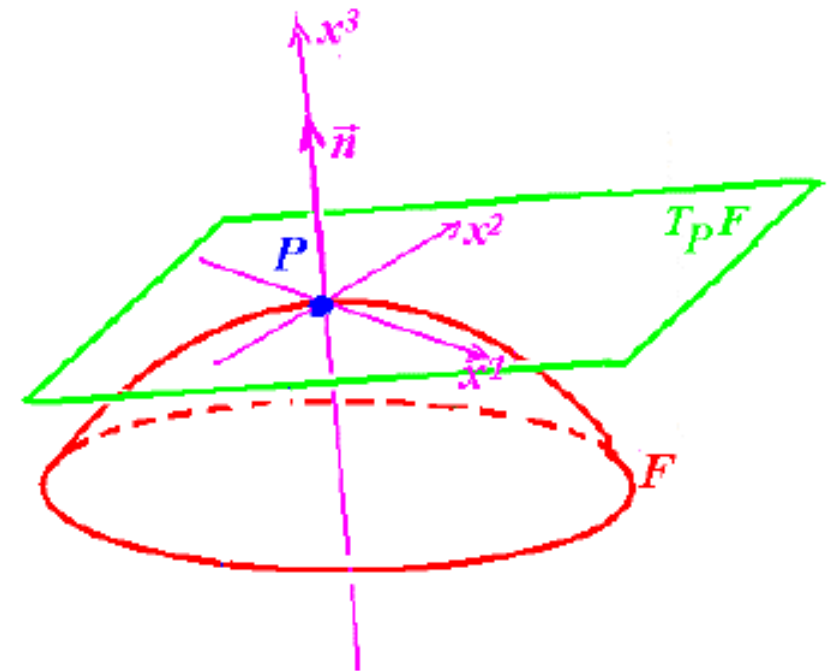
- точка P є початком координат,
- координатна площина x^1, x^2 співпадає з дотичною площиною $T_P F$,
- координатна вісь x^3 співпадає з нормальною прямою $N_P F$.

В околі точки P задамо поверхню F явно

$$x^3 = \varphi(x^1, x^2),$$

тобто

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1, u^2) \end{pmatrix}$$



Дотичні вектори поверхні F в точці P :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нормаль поверхні F в точці P :

$$\vec{n}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти другої фундаментальної форми в точці P :

$$B_{ij}(0,0) = \left\langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}(0,0)$$

Запишемо розкладання Тейлора вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} (0,0) u^i u^j + \bar{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} (0,0) u^i u^j + \bar{o} \end{pmatrix}$$

Відкинемо в розкладанні Тейлора доданки старших степеней , залишивши доданки до другої степені включно) і розглянемо поверхню $F^\#$, задану радіус-вектором

$$\vec{f}^\#(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} (0,0) u^i u^j \end{pmatrix},$$

тобто, задану явно

$$x^3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} (0,0) x^i x^j$$

$$z = \frac{1}{2} (B_{11} x^2 + 2B_{12} xy + B_{22} y^2)$$

Властивості поверхні $F^\#$:

- 1) поверхня $F^\#$ є параболоїдом або, у виключному випадку, площиною;
- 2) поверхня $F^\#$ проходить через точку P поверхні F ;
- 3) поверхня $F^\#$ має таку саму дотичну площину в точці P , що і поверхня F ;
- 4) поверхня $F^\#$ має такі самі коефіцієнти другої фундаментальної форми в точці P , що і поверхня F .

Визначення. Поверхня $F^\#$ визначається однозначно і називається *щільнодотичним параболоїдом* поверхні F в точці P .

Щільнодотичний параболоїд $F^\#$ поверхні F в точці P є наближенням *другого* порядку поверхні F в околі точки P .

В кожній точці P поверхні F є свій щільнодотичний параболоїд, який моделює (наближено) зовнішній вигляд поверхні в околі точки P .

На відміну від теорії кривих, де в якості наближення другого порядку для кривих виступали *параболи*, які мають однакову якісну поведінку, для поверхонь в якості наближення другого порядку виступають параболоїди, з більшим різноманіттям якісно різних форм.

Визначення (класифікація точок на поверхні)

Точка P на поверхні F називається *еліптичною*, якщо щільнодотичний параболоїд $F^\#$ поверхні F в точці P є еліптичним.

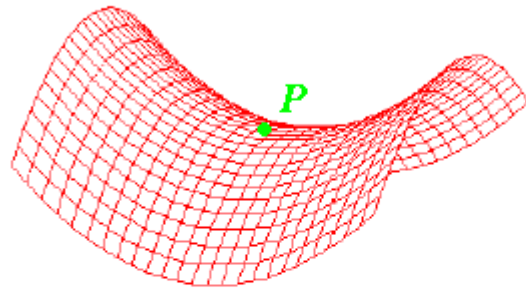
Точка P на поверхні F називається *гіперболічною*, якщо щільнодотичний параболоїд $F^\#$ поверхні F в точці P є гіперболічним.

Точка P на поверхні F називається *параболічною*, якщо щільнодотичний параболоїд $F^\#$ поверхні F в точці P є параболічним (циліндром).

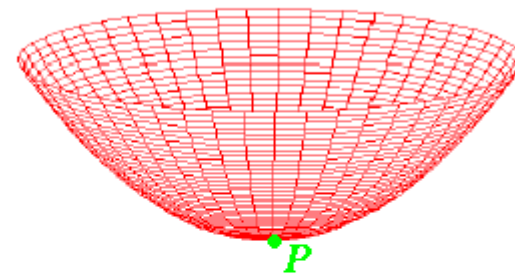
Точка P на поверхні F називається *точкою сплющення*, якщо щільнодотичний параболоїд $F^\#$ поверхні F в точці P є площиною.

Якісний вигляд поверхні в околі точки

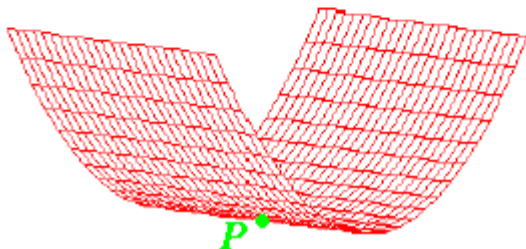
Точка гіперболічного типу



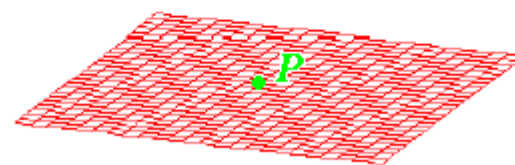
Точка еліптичного типу



Точка параболічного типу



Точка сплющення



Інтуїтивні приклади

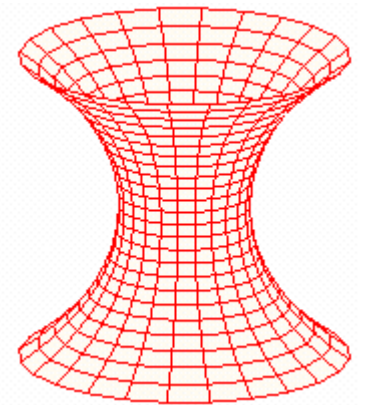
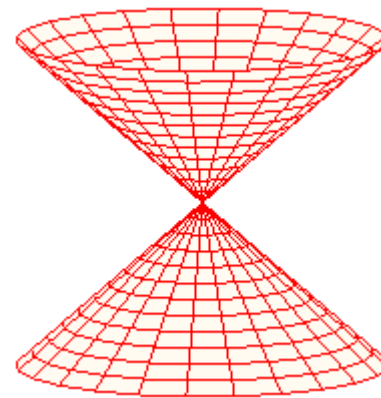
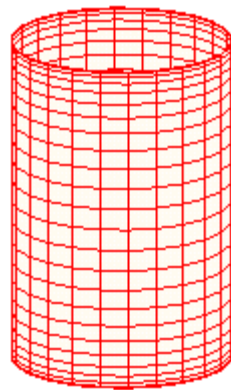
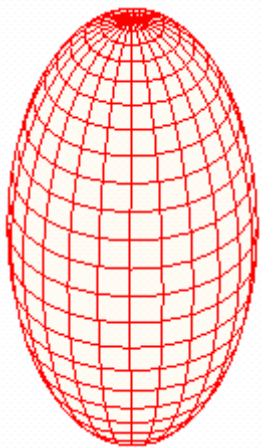
0. На площині усі точки є точками сплющення

1. На сфері (або на еліпсоїді) усі точки є точками еліптичного типу.

2. На круговому циліндрі усі точки є точками параболічного типу.

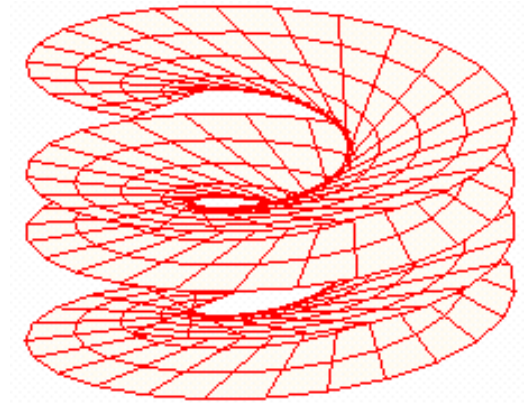
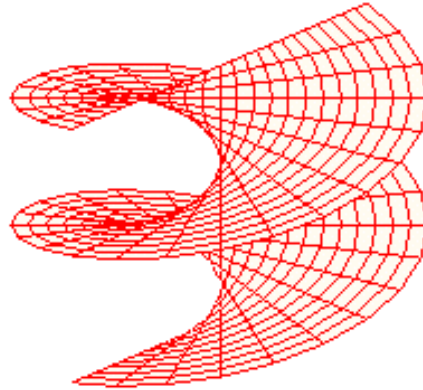
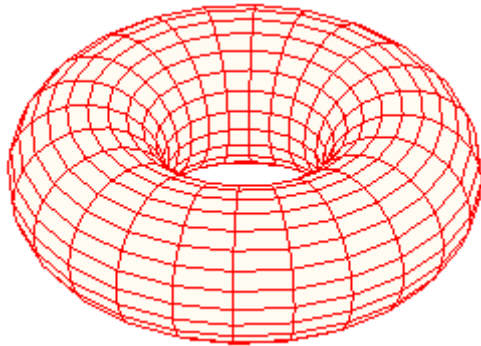
3. На круговому конусі усі точки, крім сингулярної точки – вершини, є точками параболічного типу.

4. На катеноїді (або на однопорожнинному гіперболоїді) усі точки є точками гіперболічного типу.



5. Точки яких типів присутні на круговому торі?
6. Точки яких типів присутні на гелікоїді?
7. Точки яких типів присутні на торсовій поверхні?

.....



Класифікація точок на «побутовому» рівні:

в маленькому околі *еліптичної* точки поверхня виглядає як «шапочка»,

в маленькому околі *гіперболічної* точки поверхня виглядає як «сідло»,

в маленькому околі *параболічної* точки поверхня виглядає як *циліндр*,

в маленькому околі точки *сплощення* поверхня виглядає як *площина*.

Тип щільнодотичного параболоїду в точці P ,

$$x^3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 B_{ij}(0,0) x^i x^j ,$$

визначається знаком визначника

$$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}_{P(0,0)}$$

Твердження.

Точка P на поверхні F є гіперболічною $\Leftrightarrow \det B < 0$ в точці P

Точка P на поверхні F є еліптичною $\Leftrightarrow \det B > 0$ в точці P

Точка P на поверхні F є параболічною $\Leftrightarrow \det B = 0, B \neq 0$ в точці P

Точка P на поверхні F є точкою спощення $\Leftrightarrow B = 0$ в точці P

Зауваження. При заміні локальних координат на поверхні маємо

$$\tilde{B} = J^t B J, \quad \det \tilde{B} = \det B \cdot (\det J)^2$$

Тобто, ні B , ні $\det B$ не є інваріантами. А от знак $\det B$ чи те, що $B = 0$, є інваріантними властивостями, що не залежать від вибору локальних координат на поверхні.

4. Нормальна кривина поверхні

Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$.

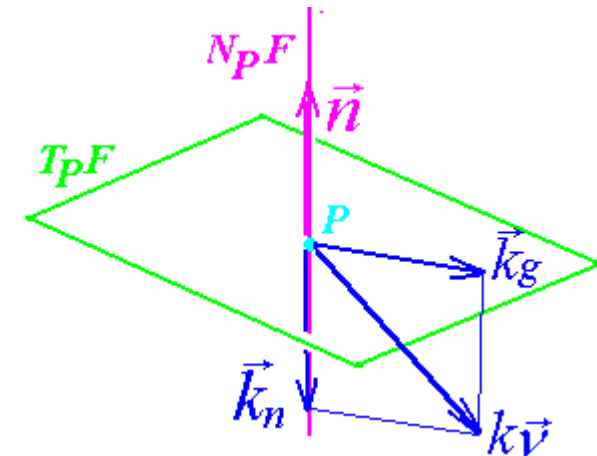
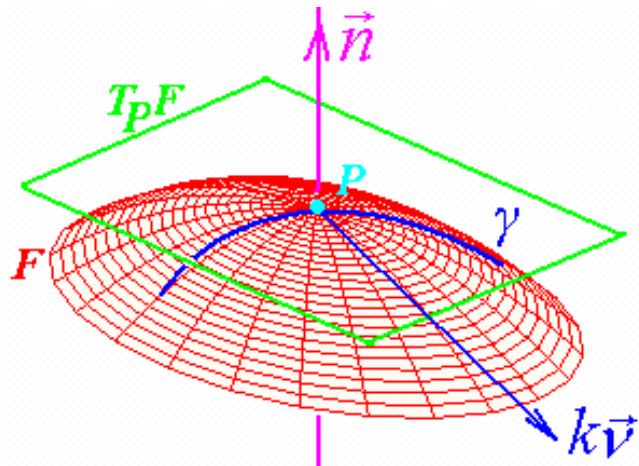
Зафіксуємо на поверхні F точку P .

Розглянемо регулярну криву γ , що лежить на поверхні F і проходить через точку P .

Візьмемо вектор кривини $k\vec{v}$ кривої γ як кривої в просторі $\mathbb{R}^3$ і спроектуємо його на нормальну пряму $N_P F$ і на дотичну площину $T_P F$ поверхні F (все – в точці P).

Проекція на дотичну площину називається *геодезичною кривиною* кривої γ на поверхні F і позначається $\vec{k}_g$.

Проекція на нормальну пряму називається *нормальною кривиною* (кривої γ на) поверхні F і позначається $\vec{k}_n = k_n \vec{n}$.



Для величини k_n маємо формулу

$$k_n = \langle k\vec{v}, \vec{n} \rangle = k \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = k \cos \theta ,$$

де θ – кут між головною нормаллю $\vec{v}$ кривої γ і нормаллю $\vec{n}$ поверхні F (все – в точці P).

Теорема Меньє (J.B. Meusnier)

Величина k_n залежить не від кривої γ на поверхні F , а тільки від її дотичного напрямку в дотичній площині $T_P F$.

Доведення. Задамо поверхню F в $\mathbb{R}^3$ радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$.

Точка P на поверхні F має координати (u_0^1, u_0^2) .

Параметризуємо криву γ натуральним параметром s .

В локальних координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \phi^1(s) \\ u^2 = \phi^2(s) \end{cases}$$

Точці P на кривій γ відповідає значення параметра s_0 , тобто,

$$\begin{cases} u_0^1 = \phi^1(s_0) \\ u_0^2 = \phi^2(s_0) \end{cases}$$

В просторі $\mathbb{R}^3$ крива γ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(\phi^1(s), \phi^2(s)) = \vec{f}_\gamma(s)$$

Для вектора кривини кривої γ маємо формулу

$$k\vec{\nu} = \frac{d^2 \vec{f}_\gamma}{ds^2}$$

Обчислюємо (усе – в точці P):

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{ds} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{d\phi^1}{ds} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{d\phi^2}{ds}$$

$$\frac{d^2 \vec{f}_\gamma}{ds^2} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^1} \left(\frac{d\phi^1}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^1 \partial u^2} \frac{d\phi^1}{ds} \frac{d\phi^2}{ds} + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2 \partial u^2} \left(\frac{d\phi^2}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{d^2 \phi^1}{ds^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{d^2 \phi^2}{ds^2}$$

Нормальна кривина;

$$\begin{aligned} k_n &= \left\langle \frac{d^2 \vec{f}_\gamma}{ds^2}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{d\phi^i}{ds} \frac{d\phi^j}{ds} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \frac{d^2 \phi^j}{ds^2}, \vec{n} \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n} \right\rangle \frac{d\phi^i}{ds} \frac{d\phi^j}{ds} = \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} \frac{d\phi^i}{ds} \frac{d\phi^j}{ds} = B_{11} \left(\frac{d\phi^1}{ds} \right)^2 + 2B_{12} \frac{d\phi^1}{ds} \frac{d\phi^2}{ds} + B_{22} \left(\frac{d\phi^2}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

В довільній параметризації на кривій γ отримуємо

$$k_n = \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} \frac{d\phi^i}{ds} \frac{d\phi^j}{ds} = \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} \cdot \frac{d\phi^i}{dt} \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\phi^j}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\sum_{i,j=1}^2 B_{ij} \frac{d\phi^i}{dt} \frac{d\phi^j}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

$$k_n = \frac{\sum_{i,j=1}^2 B_{ij} \frac{d\phi^i}{dt} \frac{d\phi^j}{dt}}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{d\phi^i}{dt} \frac{d\phi^j}{dt}}$$

В цій формулі коефіцієнти фундаментальних форм обчислені в точці P :

$$g_{ij} = g_{ij}(u_0^1, u_0^2), \quad B_{ij} = B_{ij}(u_0^1, u_0^2)$$

Дотичний вектор кривої γ також обчислений в точці P :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi^1}{dt}(t_0) \\ \frac{d\phi^2}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$$

Теорема доведена.

Таким чином, якщо брати на поверхні F різні регулярні криві, що проходять через точку P і мають однакову дотичну пряму в $T_P F$, то для всіх таких кривих величина k_n буде однаковою.

На регулярній поверхні F розглянемо точку $P(u_0^1, u_0^2)$ і вектор X в дотичній площині $T_P F$:

$$X = (X^1, X^2) = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Визначення. Нормальною кривиною поверхні F в точці P в напрямку дотичного вектора $X \in T_P F$ називається величина

$$k_n(X) = \frac{\sum_{i,j=1}^2 B_{ij} X^i X^j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i X^j} = \frac{B_{11}(X^1)^2 + 2B_{12}X^1X^2 + B_{22}(X^2)^2}{g_{11}(X^1)^2 + 2g_{12}X^1X^2 + g_{22}(X^2)^2} = \frac{B(X, X)}{g(X, X)},$$

коефіцієнти g_{ij} , B_{ij} обчислюються в точці P .

Зауваження. $k_n(\lambda X) = k_n(X)$

Нормальна кривина залежить від точки P на поверхні F і від напрямку в дотичній площині $T_P F$.

Інтуїтивно, нормальна кривина характеризує «викривленість» поверхні в даній точці в даному дотичному напрямку.

Приклад. На регулярній поверхні F зафіксуємо точку $P(u_0^1, u_0^2)$ і розглянемо координатні лінії

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases}, \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = u_0^1 \\ u^2 = \sigma \end{cases},$$

що проходять через точку P .

Їх дотичні вектори мають координати, відповідно,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

вони утворюють канонічний базис в дотичній площині $T_P F$.

Маємо:

$$k_n(X) = \frac{B_{11}(X^1)^2 + 2B_{12}X^1X^2 + B_{22}(X^2)^2}{g_{11}(X^1)^2 + 2g_{12}X^1X^2 + g_{22}(X^2)^2}$$

$$k_n(X_1) = \frac{B_{11}(1)^2 + 2B_{12} \cdot 1 \cdot 0 + B_{22}(0)^2}{g_{11}(1)^2 + 2g_{12} \cdot 1 \cdot 0 + g_{22}(0)^2} = \frac{B_{11}}{g_{11}}$$

$$k_n(X_2) = \frac{B_{11}(0)^2 + 2B_{12} \cdot 0 \cdot 1 + B_{22}(1)^2}{g_{11}(0)^2 + 2g_{12} \cdot 0 \cdot 1 + g_{22}(1)^2} = \frac{B_{22}}{g_{22}}$$

5. Нормальна кривина – кривина нормальних перетинів

Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$.

Зафіксуємо на поверхні F точку P .

Для кожного вектора X в дотичній площині $T_P F$,

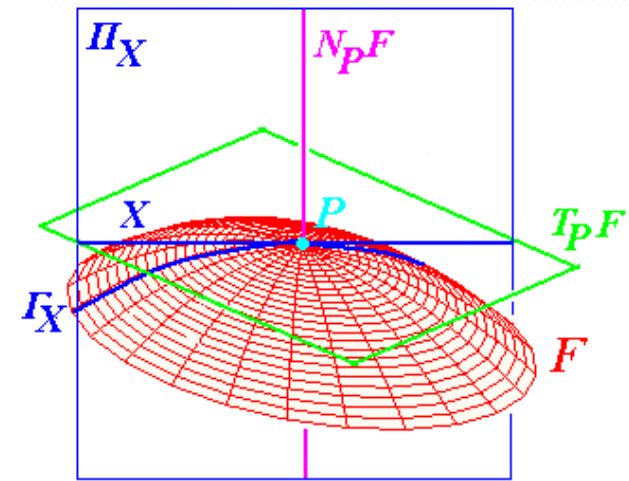
$$X = (X^1, X^2) = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2),$$

визначається *нормальна кривина* поверхні F в точці P в напрямку дотичного вектора X :

$$k_n(X) = \frac{\sum_{i,j=1}^2 B_{ij} X^i X^j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i X^j} = \frac{B_{11}(X^1)^2 + 2B_{12}X^1X^2 + B_{22}(X^2)^2}{g_{11}(X^1)^2 + 2g_{12}X^1X^2 + g_{22}(X^2)^2} = \frac{B(X, X)}{g(X, X)},$$

В цій формулі коефіцієнти g_{ij} , B_{ij} обчислені в точці P .

Для заданого вектора X в дотичній площині $T_P F$ регулярної поверхні F в точці P проведемо площину Π_X , натягнуту на вектор X і на вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні F в точці P .



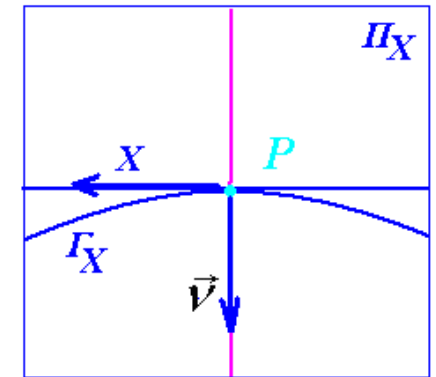
Визначення. Крива $\Gamma_X = F \cap \Pi_X$ називається *нормальним перетином* поверхні F в точці P в напрямку дотичного вектора X .

За побудовою, крива Γ_X лежить в площині Π_X , вона проходить через точку P , а вектор X є її дотичним вектором в точці P .

Твердження. Нормальна кривина $k_n(X)$ співпадає (з точністю до знаку) з кривиною нормального перетину Γ_X .

Доведення. За визначенням, $k_n(X) = k \cos \theta$, де k – кривина кривої Γ_X , а θ – кут між головною нормаллю $\vec{\nu}$ кривої Γ_X і вектором нормалі $\vec{n}$ поверхні F .

За побудовою нормального перетину, $\vec{n} = \pm \vec{\nu}$, тобто, $\cos \theta = \pm 1$. Тому $k_n(X) = \pm k$, що і вимагалось довести.



Зауваження. Інтерпретація нормальної кривини як кривини нормальних перетинів є безкоординатною (не залежить від вибору локальних координат на поверхні)

Приклади.

1. Нехай F – сфера радіуса R .

Зафіксуємо довільну точку P на сфері S .

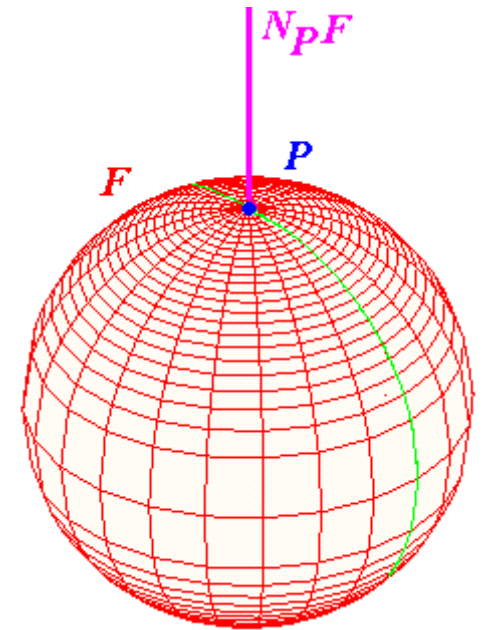
Якщо в дотичній площині $T_P F$ взяти довільний вектор X і побудувати площину Π_X , то нормальним перетином $\Gamma_X = F \cap \Pi_X$ буде коло радіуса R .

Кривина кола Γ_X в точці P дорівнює $\frac{1}{R}$.

Значить, для сфери S нормальна кривина

$$k_n(X) = \frac{1}{R}$$

в будь-якій точці $P \in F$ для будь-якого напрямку $X \in T_P F$.



Зауваження. При обчисленні нормальної кривини сфери мала на увазі внутрішня нормаль. нормалі сфери. Якщо взяти зовнішню нормаль, то нормальна кривина буде від'ємною.

2. Нехай F – круговий циліндр радіуса R .

Зафіксуємо точку P .

Якщо в дотичній площині $T_P F$ взяти вектор X_1 , дотичний до паралелі, і побудувати площину Π_{X_1} , то нормальним перетином $\Gamma_{X_1} = F \cap \Pi_{X_1}$ буде як раз ця паралель – коло радіуса R .

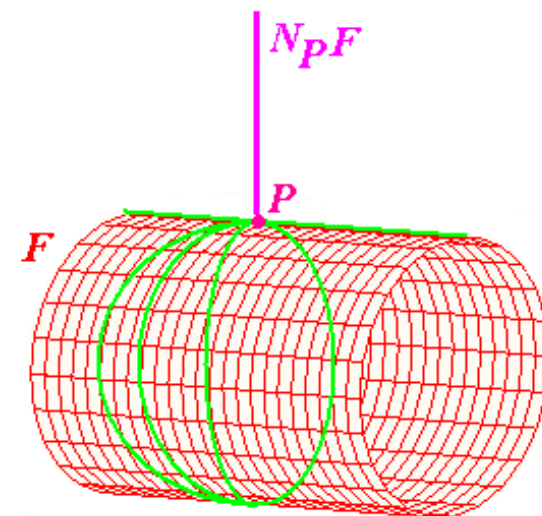
Кривина кола Γ_{X_1} в точці P дорівнює $\frac{1}{R}$.

Якщо в дотичній площині $T_P F$ взяти вектор X_2 , дотичний до меридіана – прямолінійної твірної, і побудувати площину Π_{X_2} , то нормальним перетином $\Gamma_{X_2} = F \cap \Pi_{X_2}$ буде ця прямолінійна твірна. Кривина прямої Γ_{X_2} в точці P дорівнює 0.

Для інших напрямків X в дотичній площині $T_P F$ нормальними перетинами $\Gamma_X = F \cap \Pi_X$ будуть еліпси, кривина яких в точці P буде між 0 і $\frac{1}{R}$.

Значить, у випадку кругового циліндра нормальна кривина $0 \leq k_n(X) \leq \frac{1}{R}$

Зауваження. Обчислення для внутрішньої нормалі кругового циліндра. Якщо взяти зовнішню нормаль, то нормальна кривина буде від'ємною.

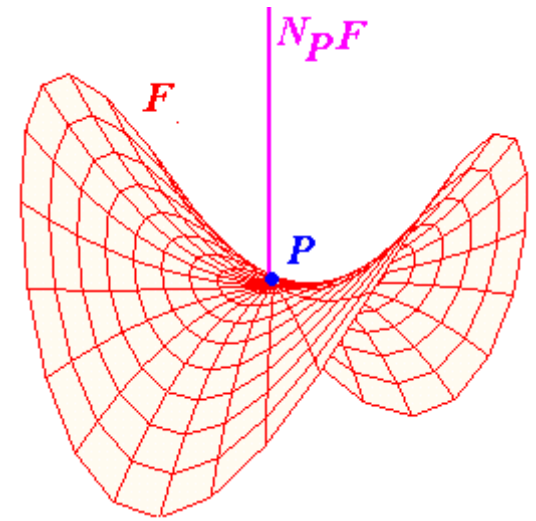


3. Нехай F – гіперболоїд.

Зафіксуємо точку P .

Є нормальні перетини, розташовані по різні сторони від дотичної площини $T_P F$.

Значить, нормальна кривина в точці P приймає як додатні, так і від'ємні значення, в залежності від вибору напрямку X в дотичній площині $T_P F$.



Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Задача 15.1. Доведіть, що друга фундаментальна форма поверхні F не зміниться, якщо поверхню F переміщувати (паралельний перенос, обертання, симетрія) в просторі $\mathbb{R}^3$.

Задача 15.2. Як зміниться друга фундаментальна форма поверхні F , якщо до поверхні F застосувати гомотетію з коефіцієнтом λ в просторі $\mathbb{R}^3$?

Задача 15.3. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній поверхні обертання з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho(u^1) \cos u^2 \\ \rho(u^1) \sin u^2 \\ h(u^1) \end{pmatrix}$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

1) сфера: $\rho(u^1) = R \cos u^1$, $h(u^1) = R \sin u^1$

2) еліпсоїд обертання: $\rho(u^1) = A \cos u^1$, $h(u^1) = B \sin u^1$

3) конус обертання: $\rho(u^1) = Au^1 + B$, $h(u^1) = Cu^1 + D$

4) псевдосфера: $\rho(u^1) = R \frac{1}{\cosh u^1}$, $h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$

5) катеноїд: $\rho(u^1) = a \cosh u^1$, $h(u^1) = au^1$

6) тор обертання: $\rho(u^1) = R + \lambda \cos u^1$, $h(u^1) = \lambda \sin u^1$, $R > \lambda > 0$

Задача 15.4. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній поверхні гвинтового обертання з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho(u^1) \cos u^2 \\ \rho(u^1) \sin u^2 \\ h(u^1) + Cu^2 \end{pmatrix}, \quad C = \text{const} \neq 0$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

1) косий гелікоїд: $\rho(u^1) = Au^1$, $h(u^1) = Bu^1$

2) поверхня Діні: $\rho(u^1) = R \frac{1}{\cosh u^1}$, $h(u^1) = R(u^1 - \tanh u^1)$

3) трубчата поверхня: $\rho(u^1) = R + \lambda \cos u^1$, $h(u^1) = \lambda \sin u^1$, $R > \lambda > 0$

Задача 15.5. Обчислити другу фундаментальну форму та проаналізувати тип точок на загальній лінійчатій поверхні з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{a}(u^1) + u^2 \vec{b}(u^1)$$

Застосувати отримані результати до наступних конкретних випадків:

- 1) циліндрична поверхня: $\vec{b} \equiv \vec{e}$, $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \equiv 0$
- 2) конічна поверхня: $\vec{a} \equiv \vec{0}$, $|\vec{b}| \equiv 1$, $|\vec{b}'| \equiv 1$
- 3) торсова поверхня: $\vec{b} = \vec{a}'$

Задача 15.6. Доведіть, що для сфери радіуса R перша і друга фундаментальні форми пов'язані співвідношенням

$$B = \pm \frac{1}{R} g$$