

def. $\sum_{i,j=1}^n b(E_i, E_j)^2 =: |b|^2$ будею звати квадратом норми

Rem. Коректність виводиться з Впр. вище. Очевидно, $|b|^2 \geq 0$ і $|b|^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$, тобто (M, χ) є нульовою геометрією.
Впр. Записати $|b|^2$ в лок. коорд. $\{ad_0(D, \chi)\}$

Ex. При $n=2$ позначимо $b_{ij} := b(E_i, E_j)$; тоді

$$|b|^2 = b_{11}^2 + b_{22}^2 + 2b_{12}^2 = \left[H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 b(E_i, E_i) = 0 \right] = 2(b_{11}^2 + b_{12}^2) = -2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = -2K_{ext}$$

гауссова кривина (M, χ) (значення $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1$ у такій позначенні). Звичайно, $K_{ext} = k_1 k_2 = -k_1^2 \leq 0$ для мінімальних

Сол. $L(w\xi) = (\Delta w + (\overline{Ric}(\xi, \xi) + |b|^2)w)\xi =: Lw \cdot \xi$,

де $L: C^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D)$; у цих позначеннях

$$I_D(\sigma, \tau) = I_D(\nu\xi, w\xi) = - \int_D \bar{g}(\nu\xi, Lw \cdot \xi) dV_g = [| \xi | = 1] = - \int_D \nu \cdot Lw dV_g$$

і для віртуальної варіації $\delta^2 Vol(D) = I_D(w, w)$

Rem. Дати розглядати інерноверсні (M, χ) у $(M, \bar{g})$, для яких існує модальне значення нормальне поле

ξ (перчатоне розшарування тривіалізується), для орієнтовного M це еквівалентно орієнтовності M .

Через $C_0^\infty(M)$ позначимо простір філітних m . ф-цій на M (тобто таких, що $\overline{\text{supp } w}$ - компакт).

Лем. Оператором Якобі ліній. інерповерхні (M, g) з метр. полем ξ будемо називати $L : C_0^\infty(M) \rightarrow C_0^\infty(M)$:

$$Lw := \Delta w + (\overline{\text{Ric}(\xi, \xi)} + |\xi|^2) w,$$

а інтегралом формою $D \subset M$ - $I_D : C_0^\infty(M) \times C_0^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$I_D(v, w) := - \int_D v Lw dV_g \quad (\text{зокрема, визначена } I_M).$$

Сл. (M, g) спінна $\Leftrightarrow I_M$ невід'ємно визначена на $C_0^\infty(M)$.

(і ах-но для $D \subset M$) і ф-ції з носієм $\not\subset \text{Int } D$

Лем. Для нас вірно те ж, що для загальною випадку.

I_M білінійна і симетрична, L самоспряжений відн.

$\langle v, w \rangle := \int_M v \cdot w \cdot dV_g$; індекс Келса і критерій
світлості в термінах власних значень вищераданого
аналогічно (див. також Colding - Minicozzi).

Ек. Кампелліг : $\psi: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow E^3: (u^1, e^{iu^2}) \mapsto (ch u^1 \cos u^2, ch u^1 \sin u^2, u^1)$.

$$\psi_1 = (ch u^1 \cos u^2, ch u^1 \sin u^2, 1)$$

$$\psi_2 = (-ch u^1 \sin u^2, ch u^1 \cos u^2, 0)$$

I ф.ф. : $g_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$, $g_{11} = g_{22} = ch^2 u^1$, $g_{12} = 0$ (зокрема, координати
ізотермічні, g_{ii} і повинно бути згідно предст. Векторного)

Глобальне одичне норм. поле $\xi = \frac{1}{ch u^1} (\cos u^2, \sin u^2, -\xi u^1)$

$$\psi_{11} = (ch u^1 \cos u^2, ch u^1 \sin u^2, 0)$$

$$\psi_{12} = (-\xi ch u^1 \sin u^2, \xi ch u^1 \cos u^2, 0)$$

$$\psi_{22} = (-ch u^1 \cos u^2, -ch u^1 \sin u^2, 0)$$

II ф.ф. : $b_{ij} = \langle \psi_{ij}, \xi \rangle$: $b_{11} = -b_{22} = 1$, $b_{12} = 0$.

Зокрема, $H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij} = 0$.

Ортонормованний базис: $E_1 = \frac{1}{\text{ch} u^1} \frac{\partial}{\partial u^1}$, $E_2 = \frac{1}{\text{ch} u^1} \frac{\partial}{\partial u^2}$.
 Тоді $|b|^2 = \sum_{i,j=1}^2 (b(E_i, E_j))^2 = \frac{1}{\text{ch}^4 u^1} (1 + 0 + 0 + 1) = \frac{2}{\text{ch}^4 u^1}$
 (і дійсно це $= -2K = -2 \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$; $K = K_{\text{ext}}$, до
 поверхні $\mathbb{H}^3$).

Основні конф. ізометрії, $\Delta = \frac{1}{\text{ch}^2 u^1} \left(\frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2} \right)$

Отже, для $w \in C^\infty(\mathbb{D})$:

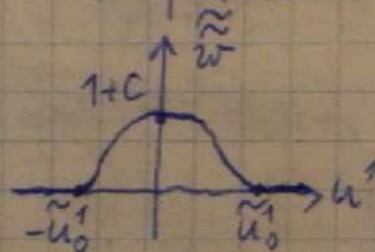
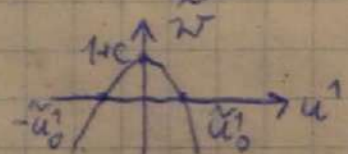
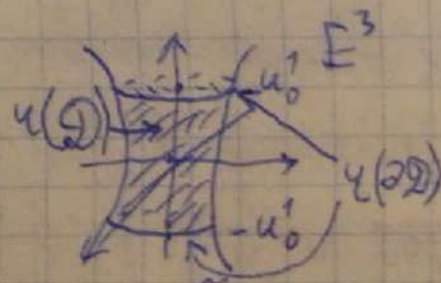
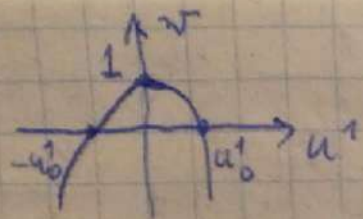
$$Lw = \frac{1}{\text{ch}^2 u^1} \left(\frac{\partial^2 w}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 w}{(\partial u^2)^2} + \frac{2w}{\text{ch}^2 u^1} \right).$$

Спочатку знайдемо повну функцію w , тобто розв'язок
 $Lw = 0$. Обмежимося p -якою $w = w(u^1)$:

$$w'' + \frac{2w}{\text{ch}^2 u^1} = 0$$

Розв'язки мають вигляд $w = C_1 \text{th} u^1 + C_2 (\text{th} u^1 \cdot u^1 - 1)$.

Закремо, для $w = 1 - u^1 \text{th} u^1$ $w(0) = 1$, p -яка нарна,
 і, оскільки $t \text{th} t \rightarrow 0$ як $t \rightarrow +\infty$, $\exists u_0' > 0$:
 $w(\pm u_0') = 0$.



Покі на циліндричній $\mathcal{D} = \{u^1 \in (-u_0^1, u_0^1), u^2 \in [0, 2\pi)\}$ $\gamma = w \frac{\partial}{\partial u^2}$ - поле Заді, і $\gamma|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ (щоправда, якщо продовжити його нулем на M , порушиться гладкість; це несуттєво).

Модифікуємо w : $\tilde{w} := w + C$, $C \in \mathbb{R}$. Для

$$\text{К-фі } L\tilde{w} = \frac{1}{8\pi^2 u^1} \left((\tilde{w} + C)'' + \frac{2(\tilde{w} + C)}{8\pi^2 u^1} \right) = \frac{2C}{8\pi^2 u^1} > 0$$

при $C > 0$. Звичайно, $\tilde{w}$ менше парна, $= 1 + C$ в

0 і 0 при $u^1 = \pm u_0^1$, тоді $\tilde{\gamma} := \tilde{w} \frac{\partial}{\partial u^2}$ нульове

на $\partial\tilde{\mathcal{D}}$, де $\tilde{\mathcal{D}} = \{u^1 \in (-\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^1)\}$. Друга варіація:

$$\delta^2 \text{Vol}(\tilde{\mathcal{D}}) = I_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{w}, \tilde{w}) = - \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{w} \cdot L\tilde{w} dV_g < 0.$$

Менша навіть трояка "підправлена" $\tilde{w}$, згладжена і для $\partial\tilde{\mathcal{D}}$ і зафіксована на 0 за менями $\tilde{\mathcal{D}}$

так, що для цієї нової $\tilde{w} \in C_0^\infty(M)$ (з $\text{supp } \tilde{w} \subset \text{Int } \tilde{D}$)

$$I_M(\tilde{w}, \tilde{w}) = I_{\tilde{D}}(\tilde{w}, \tilde{w}) \text{ залишиться } < 0.$$

Отже, критерій нестійкості: достатньо великі області у ньому не мінімізують площу кавиті серед близьких поверхонь.

Рем. У загальному випадку (не тільки для гіперповерхонь) перехід від полів Якобі до варіацій з $\delta^2 \text{Vol}(D) < 0$ забезпечується наступним аналогом теорему Якобі для геодезичних:

для геодезичних цю умову відновлює умова спряженості точок

Тл. Нехай (M, γ) - мінімальний підмноговид у $(\bar{M}, \bar{g})$, і $D \subset M$ кудивна. Якщо на D існує поле Якобі $Y \neq 0$ (тобто $LY = 0$) таке, що $Y|_{\partial D} = 0$, то D нестійка (а отже і (M, γ) нестійкий). $\Rightarrow$ Див.: наприклад, огляд J. Simon's зі списку літератури у Colding - Minicozzi. $\triangle$

Впр. Показати, що χ іноді не є постійний.

Тн. (Саймонс) Кесай (M, χ) — ^{орієнтовна,} компактна мінімальна
стінка ігнорверхня з мод. одичним нормальним
полем ξ у $(\bar{M}, \bar{g})$ невід'ємної кривини Річчі. Тоді
 (M, χ) з'являється і $\text{Ric}(\xi, \xi) = 0$.

Рем. Кривина Річчі $(\bar{M}, \bar{g})$ у $\bar{p} \in \bar{M}$ у напрямку $0 \neq \bar{v} \in T_{\bar{p}} \bar{M}$ —
це $\frac{1}{n} \frac{\text{Ric}_{\bar{p}}(\bar{v}, \bar{v})}{g_{\bar{p}}(\bar{v}, \bar{v})}$. Подібно умова $\text{Ric} \geq 0$ означає, що форма
Ric невід'ємно визначена (тут $\dim \bar{M} = n+1$).

► Розглянемо постійну $w = 1$. Оскільки M комп.,
 $w \in C^\infty_0(M)$. $\Delta w = 0$, тому

$$I_M(w, w) = - \int_M w \Delta w dV_g = - \int_M \underbrace{\text{Ric}(\xi, \xi)}_{\geq 0} + \underbrace{|b|^2}_{\geq 0} dV_g \leq 0,$$

тому у стінці це буде 0, а отже $|b|^2 = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\text{і } \text{Ric}(\xi, \xi) = 0 \triangle$$

Соч. у многовидах додатної кривини Римані не існує
співм. мин. стійких гіперповерхонь з мод. одимичним
порн. почем. $\Rightarrow$ Для $Ric > 0$, $Ric(\xi, \xi) > 0$ завжди Δ
Ех. Зокрема, у S^{n+1} , $Ric = 1 -$ постійна, тому велика
гіперсфера (у власній геометрії.) і метр Кліффорда у S^3 -
просторі ($y \in R^n \leftrightarrow C^2 = \{z, w\}$) S^3 задається умовою
 $|z|^2 + |w|^2 = 1$, а образ метра Кліффорда у S^3 -умовою
 $|z| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, і він ділить S^3 на дві частини рівного
об'єму: варіація з постійною $w = c$ порушує цю рівновагу
(зміна). Аналогічне вірно для великих гіперсфер.
Тл. (Молер, Лу). Несай (M, g) — компактна зв'язана
мінімальна стійка поверхня з мод. одимичним порн.
почем у 3-вимірному $(\bar{M}, \bar{g})$ додатної скалярної
кривини. Тоді M дифеоморфна S^2 .

Рем. Скалярна кривана $\bar{S} = \frac{1}{n(n+1)} \text{Tr } \bar{g} \bar{\text{Ric}} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{a=1}^{n+1} \bar{\text{Ric}}(F_a, F_a)$,

де значы $n+1 = \dim \bar{M}$, $\{F_a\}_{a=1}^{n+1}$ - лок. ормонорм. ренер.

► Значы Шенеро $w=1$, $w_0 \in C_0^\infty(M)$, і значы з і
сміжкоцмі $\int_M (\bar{\text{Ric}}(\xi, \xi) + |w|^2) dV_g \leq 0$. ($= I_M(w, w)$).

Восай $\{E_1, E_2\}$ - лок ормонорм. ренер M ; моги у
sign. монадах $\{d\mu(E_1), d\mu(E_2), \xi\}$ - лок. ормонорм. ренер
 $\bar{M}$ (гаві нулюмо протно E_1, E_2). Позначымо sign.
напроненнн мерзона Dirac :

$\bar{R}_{abcd} = \bar{g}(\bar{R}(F_c, F_d)F_b, F_a)$, ге $F_1=E_1, F_2=E_2, F_3=\xi$.

Моги матро:

$$\bar{\text{Ric}}(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^2 \bar{g}(\bar{R}(\xi, E_i)E_i, \xi) = \bar{R}_{3131} + \bar{R}_{3232} = \bar{R}_{1313} + \bar{R}_{2323}$$

Ан-но, $\bar{\text{Ric}}(E_1, E_1) = \bar{R}_{1212} + \bar{R}_{1313} \leftarrow$ (3 саремпін)

$$\bar{\text{Ric}}(E_2, E_2) = \bar{R}_{1212} + \bar{R}_{2323} \leftarrow$$

$$\text{Таву } \bar{S} = \frac{1}{6} (\bar{\text{Ric}}(E_1, E_1) + \bar{\text{Ric}}(E_2, E_2) + \bar{\text{Ric}}(\xi, \xi)) =$$

$$= \frac{1}{3} (\bar{R}_{1212} + \bar{R}_{1313} + \bar{R}_{2323})$$

Як завжди буває, $|b|^2 = -2K_{ext}$. Рівняння Тейсса:

$$\bar{g}(\bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1) = \bar{g}(\bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1) \bullet (b(E_1, E_1)b(E_2, E_2) - b(E_1, E_2)^2)$$

З ортонормованості, це означає оператор кривини (M, g)

$$\bar{R}_{1212} = K - K_{ext},$$

де K - (внутрішня) гауссова кривина M (можливо нового метричного (M, g)). Отже,

$$\bar{Ric}(\xi, \xi) + |b|^2 = \bar{R}_{1313} + \bar{R}_{2323} - 2(K - \bar{R}_{1212}) = \bar{R}_{1212} + \bar{R}_{1313} + \bar{R}_{2323} - K - (K - \bar{R}_{1212}) = 3\bar{S} + \frac{1}{2}|b|^2 - K, \text{ і}$$

$$0 \geq \int_M (\bar{Ric}(\xi, \xi) + |b|^2) dV_g = \int_M (3\bar{S} + \frac{1}{2}|b|^2 - K) dV_g >$$

$$> - \int_M K dV_g = -2\pi \chi(M) \text{ за Тл. Тейсса-Бонне,}$$

тобто $\chi(M) > 0$. Оскільки M - компактна зв'язна ~~мн~~ ^{на},

з Тл. класифікації, $M \cong S^2$ або $M \cong \mathbb{RP}^2$.  але $\mathbb{RP}^2$ неорієнтовна

Ес знову не, для S^3 з $\bar{S} = 1$ з цього випливає, що
тор Кієрфорта нестійкий.

Тн. (Фішер-Колдрі, Мокс). Крива (M, γ) - повна некомпак-
тна мінімальна гіперповерхня з мод. одичним
норм. полем ξ у $(\bar{M}, \bar{g})$. Вона стійка $\Leftrightarrow \exists w \in C^\infty(M)$
така, що $w > 0$ і $Lw = 0$.

Ес Крива гомотична у $(\bar{M}, \bar{g})$ з $\bar{Ric} = 0$: для
 $w = 1$, очевидно, $Lw = 0$. Зокрема, адр. гіперповерхня
у E^{n+1} .

Рем. Цей факт використовується для доведення наступного.

Тн. (Фішер-Колдрі і Мокс; до Карло і Рені; Когорелов).

Якщо (M, γ) - повна зв'язна орієнтовна мінімальна
стійка ~~поверхня~~ поверхня у E^3 , то це адр. площина.

Рем. Це узагальнення теореми Бернштейна (зв'яз. на V^2 стійкі).

Доведена $\Rightarrow$ у Th. Poincaré-Karlin і Moore та подальші
 змінювання гув. у Colding-Minicozzi, $\Leftarrow$ випливає з:
Рн. Хесаї (M, g) - мінімальна різнноверхня у $(\bar{M}, \bar{g})$,
 $\mathcal{D}CM$ кубовна, і на $\mathcal{D}$ $\exists$ одностороннє норм. поле ξ , якщо
 $\exists \varphi \in C^\infty(\mathcal{D}) : \varphi > 0$ і $L\varphi = 0$, то $\mathcal{D}$ смітка.

► Покладемо $\psi := \ln \varphi$. Погод гуд вртмннм релера $\{E_i\}_{i=1}^n$:

$$\Delta \psi = \sum_{i=1}^n \left(E_i \left(\frac{E_i(\varphi)}{\varphi} \right) - \nabla_{E_i} E_i \left(\frac{\varphi}{\varphi} \right) \right) = \frac{1}{\varphi} \Delta \varphi - \sum_i \frac{E_i(\varphi)}{\varphi^2} \stackrel{L\varphi=0}{=} -(\text{Ric}(\xi, \xi) + |\xi|^2) -$$

$$- \sum_i (E_i(\ln \varphi))^2 = [\text{Bnp. grad } \psi = \sum_{i=1}^n E_i(\psi) E_i] = -(\text{Ric}(\xi, \xi) + |\xi|^2) - g(\text{grad } \psi, \text{grad } \psi)$$

$| \text{grad } \psi |^2$

Погод $\forall w \in C^\infty(\mathcal{D})$ з $\text{supp } w \subset \text{Int } \mathcal{D}$:

$$\int_{\mathcal{D}} w^2 (\text{Ric}(\xi, \xi) + |\xi|^2 + |\text{grad } \psi|^2) dV_g = - \int_{\mathcal{D}} w^2 \Delta \psi dV_g = \left[\begin{array}{l} \text{Th. Cmorca} \\ (\text{інерм. частинна}) \\ \int_{\mathcal{D}} w^2 \Delta \psi dV_g = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \text{div}(w^2 \text{grad } \psi) dV_g = 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{div}(\xi X) = \\ = g(\text{grad } \xi, \\ X) + \xi \text{div} X \\ (\text{Bnp.}) \end{array} \right]$$

$$= \int_{\mathcal{D}} g(\text{grad } w^2, \text{grad } \psi) dV_g \leq [\kappa - \text{P. - M.}] \leq 2 \int_{\mathcal{D}} |w| |\text{grad } w| |\text{grad } \psi| dV_g \leq [\kappa - \text{P. - M.}]$$

$$\leq \int_{\mathcal{D}} (w^2 |\text{grad } \psi|^2 + |\text{grad } w|^2) dV_g \Rightarrow I_{\mathcal{D}}(w, w) = \int_{\mathcal{D}} (|\text{grad } w|^2 - w^2 (\text{Ric}(\xi, \xi) + |\xi|^2)) dV_g \geq 0.$$

Use і означає сміткою $\mathcal{D}$. $\triangle$

Тіжкопороди з паралельним полем середньої кривини

(зокрема, гіперповерхні постійної середньої кривини (СМС))

Ек. 1. Мінімальні: $H=0$ (зокрема, циліндр розетичний: $B=0$)

2. Циліндр еліптичний у $(\bar{M}, \bar{g})$ постійної секційної кривини,
наприклад, гіперсфери у E^{n+1} (інші сфери також)

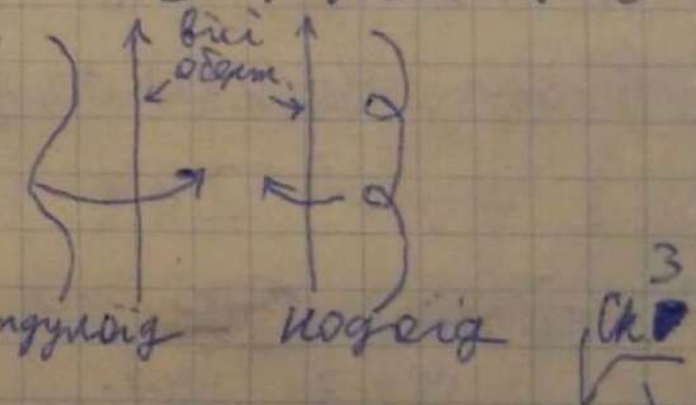
3. У E^3 відома класифікація М.-Е. Делоне

повних зв'язних СМС поверхонь обертаючих: для $H=0$

це площини і конусоїди, для $H \neq 0$ -

циліндри (кругові), сфери, еліпсоїди і

поверхні (див. доведення і ілюстрації) / еліпсоїд поверхні



К. Кенмотсу Surfaces with constant mean curvatures,

4. У E^3 К. Кенмотсу отримано аналог представлення

Вейерштраса - Енперцера для СМС поверхонь з $H \neq 0$

(див. там же, Ск. 8).

Реш. Нехай метр (M, γ) - орієнтована інертована
у E^{n+1} ; фіксовано для неї ор. норм. поле ξ (нормальне)
Згадаємо, що $\forall w \in C_0^\infty(M)$ з $\text{supp } w \subset \text{Int } D$ для
якої-то кубовної $D \subset M$ (закрепа, $w|_{\partial D} = 0$) першою варіацією
(нормальна) δ $M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E^{n+1}$ вгн-ні (M, γ) з
посієм D , і для неї перша варіація об'єм D

$$\delta \text{Vol}(D) = \frac{d}{ds} \text{Vol}_{g_s}(D) \Big|_{s=0} = -n \int_D \langle H_\xi, w\xi \rangle dV_g =$$

$$= -n \int_D H w dV_g \quad \left(\text{тобто така } \delta \exists: \delta \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} = w\xi \right).$$

Нехай $\gamma|_{\bar{D}}$ - вкладення, і $0 \notin \gamma(\bar{D})$. Тоді, з'єднавши
випуклість 0 з точками $\gamma(\bar{D})$, побудуємо конус $C\gamma(\bar{D})$
Інколи ∂D - вкладена інертована у M , цей
конус має "кузово вкладення" меху, і
можна обчислити його об'єм $\delta' \in M$ у E^{n+1} за



(загальне) теорема Стокса. Тривіально, перм. поле ξ на $(n+1)$ -поверхні конуса і позначено $Y := \sum_{a=1}^{n+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ - поле на $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді

$$\text{Vol}(C(\bar{D})) = \int_{C(\bar{D})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n+1} = \frac{1}{n+1} \int_{C(\bar{D})} \text{div } Y dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\int_{\bar{D}} \langle Y, \xi \rangle dV_g + \int_N \langle Y, \xi \rangle dV_h \right) = \frac{1}{n+1} \int_{\bar{D}} \langle Y, \xi \rangle dV_g,$$

$\uparrow$
 $\text{тут } Y \circ \xi = \xi$

де N - бічна (n) -поверхня конуса, h - її перша ф.ф., у її точках $\langle Y, \xi \rangle = 0$. Будемо використовувати цю формулу і для загального випадку:

лев. Будемо позначати $\frac{1}{n+1} \int_{\bar{D}} \langle Y, \xi \rangle dV_g$ для будь-якої ДСМ об'єкта, що обмежений $\chi(D)$. Також для варіантів

б з системою $\int_{\bar{D}} \langle \chi_z, \xi_z \rangle dV_{g_z}$ не залежить від z (де ξ_z - од. перм. поле $\chi_z, \xi_0 = \xi$), будемо показати, що

ця варіація зберігає однесений об'єм.

Лем. 1. Якщо нормальна варіація з носієм $\gamma \subset \mathcal{D}$ задана полем $w \in \mathcal{H}$ і зберігає однесений об'єм, то

$$\int_{\mathcal{D}} w dV_g = 0.$$

2. Нехай $w \in C_0^\infty(M)$ і $\text{supp } w \subset \text{Int } \mathcal{D}$. Якщо $\int_{\mathcal{D}} w dV_g = 0$, то існує нормальна варіація σ з носієм $\gamma \subset \mathcal{D}$, що зберігає об'єм, і $\sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} = w \in \mathcal{H}$.

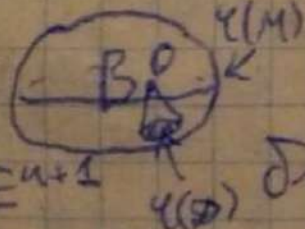
Рн (варіаційна характеристика (МС поверхню у E^{n+1})

Кесам (M, γ) - орієнтована мн-ка у E^{n+1} , ДСМ збудовна

$M = M_0$ на $\mathcal{D} \Leftrightarrow V$ нормальної варіації з носієм у $\mathcal{D}$,

що зберігає об'ємний од'єм, $\delta \text{Vol}(\mathcal{D}) = 0$.

Сол. Якщо компактна вклашена гіперповерхня γ $\mathbb{R}^{n+1}$ обмежує максим. B (кубону), тобто $\chi(M) = \partial B$, і мінімізує об'єм серед усіх гіперповерхонь, що обмежують максим. об'єма $\text{Vol}(B)$, то її середня кривина постійна. Реш. Очевидно, $H \neq 0$, бо комп. мінімальних $\neq$.

 $\Rightarrow$ Варіації, що зберігають обмежений об'єм, будуть давати той же $\text{Vol}(B)$ (може вважатися без обмеж. залежності, що 0 - усередині), тому за умовою $\delta \text{Vol}(0) = 0$, і за Реш. H постійна. $\triangle$

Рем. Зокрема, малюні бульбашки - постійної сер. кривизни.

Рем. Тут ^{іде} не потрібна зв'язність: Π зберігається навіть для ^{гипер}пов-ні з кількох компонент.

Рем. А-ні характеристики можна формулювати і для гіперпов-нь в інших річчових многовидах.

Аналогічно випадку мінімальних ^{гипер}пов-нь, з властивостей еліптичних диф. рівнянь виводиться:

Р. (сильний принцип максимума для явно задане СМС гіперповерхонь). Нехай (U, γ_1) і (U, γ_2) - явно задані d -вимірні $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ відповідно ^{на фігурині зв'язній $U \subset \mathbb{R}^n$} гіперповерхоні у E^{n+1} ^{однакової} постійної середньої кривизни, тобто

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f_i}{\sqrt{1 + |\nabla f_i|^2}} \right) = C \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad \left(\begin{array}{c} \text{еволюція} \\ \operatorname{div} \end{array} \right)$$

Якщо $f_1 \leq f_2$ і $\exists p \in U: f_1(p) = f_2(p)$, і $d_{p, \gamma_1}(T_p U) = d_{p, \gamma_2}(T_p U)$ (тобто $(f_1)_\# = (f_2)_\#$ ($\forall \xi \in T_p U, \xi \neq 0, |\xi| = 1$)), то $f_1 = f_2$.

Тн. (P.D. Александрова про малу Бурбанку, 1958).

Якщо (M, φ) - вкладена компактна ^{зб'язна} орієнт. гіперповерхня
у E^{n+1} постійної середньої кривизни, то це гіперсфера
(тобто $\varphi(M) = S_R^n(x_0)$).

► Ідея: $\forall v \in E^{n+1}$ будують ортогональні йому
гіперплощини $\pi_{v,t} := \{x \mid \langle x, v \rangle = t\}$ і ~~гіперповерхню~~

~~гіперповерхню~~ гіперповерхні $(M, \varphi_{v,t} := \rho_{v,t} \circ \varphi)$,

де $\rho_{v,t}$ - віддзеркалення відн. $\pi_{v,t}$.

Тоді $\forall v$ знайдеться $t = t_0(v)$: (M, φ) і

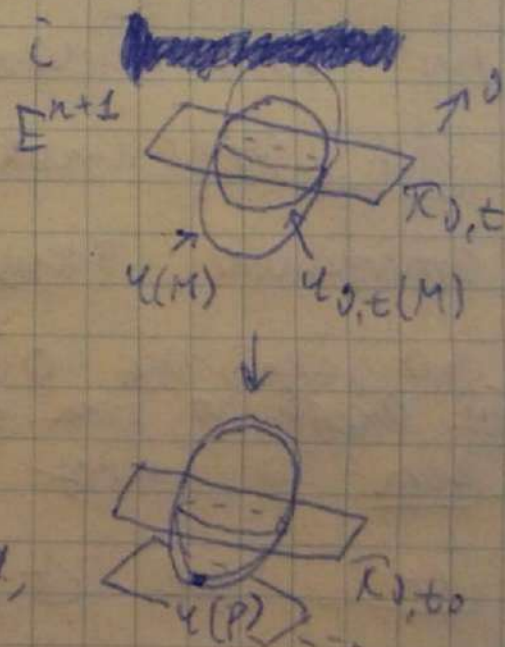
(M, φ_{v,t_0}) торкаються в деякій $\varphi(p)$.

З принципу максимуму тоді випливає,

що $\varphi = \varphi_{v,t_0}$, тобто π_{v,t_0} - ^{гіпер}площина симетрії

$\varphi(M)$. Оскільки така існує $\forall v$, $\varphi(M)$ - гіперсфера. ▴

Рез. Кричади заперечили СМС компактних поверхонь



у E^3 , що не $\in$ сферами, було знайдено у 1984 (порн
 Веане), у вигляді вимірності раніше Дав. Кенмотер, А.Б.

Лем. Стійкість для СМС інерноверсно визначається
 ан-по мінімальним (як і інші споріднені поняття
 на кінцях інтегра Крота), але для варіацій, що зде-
 ржують обмежений об'єм:

Лем. Орієнтована СМС інерноверсна (M, γ) у E^{n+1} наз.
 стійкою, якщо $\forall$ варіації з носієм у кубовій ДСМ
 що зберігає обмежений об'єм $\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{D}) \geq 0$. (4.11) = 2B)
 мінім.

Лем. Очевидно, кож. вкл. інернов, що мінімізує об'єм серед інернов з носієм $\subseteq \text{Vol}(B)$

Лем. В силу результатів попереднього розділу і

Лем. $\gamma \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \forall w \in C_0^\infty(M)$ якщо $\int_M w dV_g = 0$ (стійкість)

то $I_M(w, w) = -\int_M w Lw dV_g \geq 0$ (стабільність уяє
 альтернативну до Th_M Александерова характеристизацію сфер:

Th. (Бардоса, до Карно). Якщо (M, γ) - кожн. зв'язна орієнт. СМС
 поверхня у E^3 , що $\in$ стійкою, то $\gamma(M) = S^2_R(x_0) \Rightarrow$ Кенмотер, А.Б.