

Білет 1

1. Навести приклад топологічного простору і ретракта у ньому, що не є деформаційним. Відповідь пояснити.

2. Нехай топологічний простір X має відкрите покриття $\{U, V\}$, де множина U гомотопічно еквівалентна тору T^2 , а множини V і $U \cap V$ – колу S^1 . Скільки співвідношень має опис фундаментальної групи X у довільній точці згідно з теоремою Зейферта – ван Кампена? Відповідь пояснити.

3. Обчислити симпліційні гомології букета кіл $S^1 \vee S^1$ з коефіцієнтами у цілих числах (підказка: використати триангуляцію у вигляді об'єднання двох трикутників).

Білет 2

1. Скільки різних класів ізоморфності накрить з відміченою точкою існує у лінійно зв'язного локально лінійно зв'язного напівлокально однозв'язного топологічного простору з фундаментальною групою, що ізоморфна $\mathbb{Z}_2$ (наприклад, у проєктивного простору $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$)? Відповідь пояснити.

2. Чи вірно, що усі підгрупи гомотопічної групи $\pi_2(X, x)$ довільного топологічного простору X у його довільній точці x нормальні? Відповідь пояснити.

3. Нехай $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ – неперервне відображення сфер, де n натуральне. Показати, що якщо n парне і степінь $\deg \varphi \neq 0$, то існує пара діаметрально протилежних точок $x, -x \in S^n$, які під дією цього відображення переходять у діаметрально протилежні: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Білет 3

1. Чи вірно, що будь-які два неперервні відображення з довільного топологічного простору X у n -вимірний куб I^n (вільно) гомотопні? Відповідь пояснити.

2. Чи існує для якогось натурального n неперервне відображення сфер $S^n \rightarrow S^n$ степеня 1, образ якого міститься у напівсфері? Відповідь пояснити.

3. Обчислити симпліційні гомології сфери S^2 з коефіцієнтами у цілих числах (підказка: використати триангуляцію у вигляді тетраедра).

Білет 4

1. Нехай група $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ діє на топологічному просторі X неперервно і цілком розривно. Яку потужність мають шари накриття $(X, X/\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, p)$ (де p – канонічна проєкція)? Відповідь пояснити.

2. Чи існує для якогось натурального n непарне неперервне відображення сфери $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, що не приймає значення 0? Відповідь пояснити.

3. Показати, що для будь-якого неперервного відображення сфер $\varphi: S^n \rightarrow S^n$, де n парне натуральне, існує така точка $x \in S^n$, що $\varphi(x) = x$ або $\varphi(x) = -x$ (підказка: використати степінь відображення).

Білет 5

1. Чи вірно, що фундаментальні групи лінійно зв'язного топологічного простору і будь-якого його деформаційного ретракта ізоморфні? Відповідь пояснити.

2. Чи існує для непарних $n \geq 3$ неперервне відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таке, що $f(x) \neq 0$ для $x \neq 0$ та $x \perp f(x)$ (відносно стандартного скалярного добутку) для будь-якого $x \in \mathbb{R}^n$? Відповідь пояснити.

3. Обчислити фундаментальну групу підмножини $X = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 \mid x \in \mathbb{Z} \vee y \in \mathbb{Z}\}$ площини $\mathbb{R}^2$ за допомогою теореми Зейферта – ван Кампена.

Білет 6

1. Чи може група автоморфізмів регулярного 4-листого накриття складатися з 2 елементів? Відповідь пояснити.
2. Чи існує для якогось натурального n нетотожне неперервне відображення сфер $S^n \rightarrow S^n$ степеня 1? Відповідь пояснити.
3. Обчислити сингулярні гомології букета сфер $S^n \vee S^m$ з коефіцієнтами у цілих числах за допомогою послідовності Маєра – Вієторіса.

Білет 7

1. Чому дорівнюють ранги абеліанізацій фундаментальних груп поверхонь M_g^2 , $g \in \mathbb{Z}_+$ і N_g^2 , $g \in \mathbb{N}$? Відповідь пояснити.
2. Знайти групи сингулярних гомологій довільної зірчатої підмножини $\mathbb{R}^n$. Відповідь пояснити.
3. Нехай $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ – неперервне відображення сфер, де n натуральне. Показати, що якщо степінь $\deg \varphi$ непарний, то існує пара діаметрально протилежних точок $x, -x \in S^n$, які під дією цього відображення переходять у діаметрально протилежні: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Для цього використати наступний факт: якщо φ парне, то $\deg \varphi$ парний.

Білет 8

1. Чи є деформаційним ретрактом сфери S^n якась її точка $x \in S^n$? Відповідь пояснити.
2. Яке з двох тверджень ”будь-який цикл $a \in C_k$ є границею” і ”будь-яка границя $a \in C_k$ є циклом” вірне для будь-якого ланцюгового комплексу C_* ? Якій умові на групу $H_k(C_*)$ еквівалентне тоді інше твердження? Відповіді пояснити.
3. Встановити, чи існує на сфері S^n , де n натуральне, парне неперервне векторне поле X (тобто таке, що $X_x = X_{-x}$ для кожної точки $x \in S^n$, де $-x$ – діаметрально протилежна до неї точка), що в жодній точці не дорівнює 0.

Білет 9

1. Чи є для якогось натурального n сфера S^{n-1} ретрактом простору $\mathbb{R}^n$? Відповідь пояснити.
2. Нехай топологічний простір X має відкрите покриття $\{U, V\}$, де множина U гомотопічно еквівалентна тору T^2 , а множини V і $U \cap V$ – колу S^1 . Скільки твірних має опис фундаментальної групи X у довільній точці згідно з теоремою Зейферта – ван Кампена? Відповідь пояснити.
3. Обчислити сингулярні гомології тора T^2 з коефіцієнтами у цілих числах за допомогою послідовності Маєра – Вієторіса, використавши той факт, що проколотий тор гомотопічно еквівалентний букету кіл $S^1 \vee S^1$.