

Косцюковскі, 24.7(d). $X \cong T^2 \vee T^2$: $X = A \cup B$, $A \cong T^2$, $B \cong T^2$; $A \cap B = \{x\}$. Знайти $\pi_1(X, x)$.

$U := A \cup W_B$, де W_B — стягнений диск x у B , $V := B \cup W_A$, де W_A — стягнений диск x у A . Легко: U, V — лін. зв'язні і $U \sim V \sim T^2 \Rightarrow \pi_1(U, x) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, $\pi_1(V, x) = \langle c, d \mid cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$; $U \cap V \neq \emptyset$ — стягнений (зокрема, лін. зв.) $\Rightarrow \pi_1(U \cap V, x) = \langle \rangle$. За Тн. 3-в.К., $\pi_1(X, x) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$ (вільний добуток).

Косцюковскі 24.7(g). $X = UVU$, де U, V відр. лін. зв., $U \cap V \neq \emptyset$ і лін. зв. (точно ми в умовах Тн. 3-в.К.). Нехай V одностов'язний окремо $x \in U \cap V$.

1. $i_{U*} : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ — зм.

2. Кож i_{U*} — найменша норм. підгрупа $\pi_1(U, x)$, що вміщує

$i_{U \cap V*}(\pi_1(U \cap V, x))$

(Класифікація покр. з лекцій!)

$$\begin{array}{ccccc} & & i_{UV} & U & i_U \\ & & \searrow & \searrow & \searrow \\ U \cap V & \xrightarrow{i_{U \cap V}} & V & \xrightarrow{i_V} & X \end{array}$$

Нехай $\pi_1(U, \kappa) = \langle a_1, \dots, a_n \mid \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ і $\pi_1(U \cap V, \kappa) = \langle c_1, \dots, c_p \mid \tau_1, \dots, \tau_o \rangle$.

За умовою, $\pi_1(V, \kappa) = \langle \rangle$. Моги за Тм. 3-в.К.

$$\pi_1(X, \kappa) \simeq \langle a_1, \dots, a_n \mid \varphi_1, \dots, \varphi_m, i_{UV*}(c_1), \dots, i_{UV*}(c_p) \rangle,$$

бо $i_{UV*} = 0$ ($i_{UV*}: \pi_1(U \cap V, \kappa) \rightarrow \pi_1(V, \kappa)$ - трив.).

1. За побудовою у виведенні Тм., мовити $\pi_1(X, \kappa)$, що $\text{sign. } a_1, \dots, a_n$ - це $i_{U*}(a_1), \dots, i_{U*}(a_n)$, тобто $\forall$ ел-та $\pi_1(X, \kappa)$ - це добутах (слово) цих ел-тів і обернених до них: ~~Але~~ $i_{U*}(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots i_{U*}(a_{i_k})^{\varepsilon_k} =$

$$= i_{U*}(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}), \text{ де } i_1, \dots, i_k = \overline{1, n} \text{ і } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1. \text{ Це й означає,}$$

до i_{U*} - мн-зм | що i_{U*} - гом.

2. $\forall i = \overline{1, p}$ $i_{U*}(i_{UV*}(c_i))$ - трив. елемент $\pi_1(X, \kappa)$, бо

$\pi_1(X, x)$ має співвідношення $i_{uvx}(c_i)$ (що насправді означає $i_{ux}(i_{uvx}(c_i))$ за побудовою). Отже, $\bigcup i_{uvx} \subset \ker i_{ux}$ (бо $c_1, \dots, c_p$ - твірні $\pi_1(U \cap V, x)$). Поділіть $H \subset \ker i_{ux}$, де H - найменша норм. підгр. $\pi_1(U, x)$, що містить $\bigcup i_{uvx}$ і складається з усіх можливих добутків ел-тів $\bigcup i_{uvx}$, помножено, спрощених з ел-тами $\pi_1(U, x)$. Але якщо ел-т $a \in \pi_1(U, x)$

~~належить до $\ker i_{ux}$~~ належить до $\ker i_{ux}$, тобто тривіальний у $\pi_1(X, x)$ зі співвідн. $\gamma_1, \dots, \gamma_m, i_{uvx}(c_1), \dots, i_{uvx}(c_p)$ (ототожнено ел-ти з їх образами під дією i_{ux}), то він після викреслювання підслів, що тривіальні у $\pi_1(U, x)$ має вигляд $a = W_1 i_{uvx}(c_{i_1})^{e_1} W_2 i_{uvx}(c_{i_2})^{e_2} \dots W_k i_{uvx}(c_{i_k})^{e_k} W_{k+1}$, де $i_1, \dots, i_k = \overline{1, p}$, $e_1, \dots, e_k = \pm 1$, і $W_1 W_2 \dots W_{k+1} = e$. Поділіть перепишемо: $a = W_1 i_{uvx}(c_{i_1})^{e_1} W_1^{-1} W_1 W_2 i_{uvx}(c_{i_2})^{e_2} (W_1 W_2)^{-1} W_1 W_2 W_3 \dots W_1 W_2 \dots W_k i_{uvx}(c_{i_k})^{e_k} W_{k+1}$ - це добуток спрощених до $i_{uvx}(c_{i_j})^{e_j}$, бо $W_{k+1} = (W_1 \dots W_k)^{-1}$. Т.ч., $a \in H$. Отже, $\ker i_{ux} \subset H \Rightarrow \ker i_{ux} = H$.

37. Кт. $\varphi: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное, $\varphi(S^{n-1}) \not\equiv 0$ и $\varphi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

сдвигает не тривиальный зам-зм $\varphi_*: \pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi(x))$
 $n \geq 2$: $\frac{12}{\pi}$

$(\exists x \Leftrightarrow \forall x \text{ в силу ин. зб'яности})$. Тогда $\exists \blacksquare \in \mathbb{D}^n: \varphi(\blacksquare) = 0$.
 $\frac{12}{\pi}$

Тут $n=1$ можно рассмотреть $\varphi_*: \pi_0(S^0) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ как
выбор, что демонстрирует, что зб'янти компоненты пере-

хочемо y та x . $D^1 = [-1, 1]$, $S^0 = \{-1, 1\}$, тому непериваль-
ність φ_* означає, що $\varphi(-1)$ і $\varphi(1)$ мають різні знаки.
Потім це просто теорема про проміжне значення (що ви-
киває зі зв'язності D^1).

Для $n \geq 2$: $\nexists \forall y \in D^n$. $\varphi(y) \neq 0$. Нехай f - сфери́д $g \in S^{n-1}$:
 $[f]$ - твірна $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \simeq \mathbb{Z}$. φ_* - неперив. $\Rightarrow \varphi_*([f]) \neq 0$
 (бо інакше $\forall k[f] \in \pi_{n-1}(S^{n-1}, x)$ $\varphi_*(k[f]) = k\varphi_*([f]) = 0$,
 $k \in \mathbb{Z}$, тоді $\varphi_* = 0$). З іншого боку, $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$, а

$F(t, s) := \varphi((1-s)f(t) + sx) : I^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ кон.

S^{n-1} D^n φ x $f(t)$ $F(t, s)$ φ x
 визначене, непер. $\forall s$ $F(\partial I^{n-1}, s) = \varphi((1-s)x + sx) = \varphi(x)$,
 $F(\cdot, 0) = \varphi \circ f$, $F(\cdot, 1) = \varphi(x)$, тоді це ∂I^{n-1} замкнено

$\varphi \circ f \in e_{\varphi(x)} \text{ у } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow [\varphi \circ f] = [e_{\varphi(x)}] = 0. \downarrow$

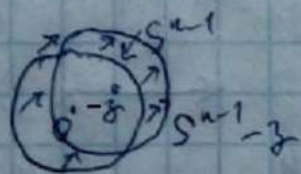
34.6x. $\wedge \varphi: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: \varphi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Поки $\mathbb{D}^n \subset \varphi(\mathbb{D}^n)$.

Неперервне $S^{n-1} \subset \varphi(\mathbb{D}^n)$ за умовою,

$\forall z \in \mathbb{B}^n$ застосуємо 34.Кх до $\psi := \varphi - z$: непер. ~~функція~~,

~~$\psi(x) \neq 0 \text{ на } S^{n-1}$, тобто $\psi(x) \neq z \text{ на } S^{n-1}$, тобто~~

$0 \notin \psi(S^{n-1})$, і $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}} - z$ переводить S^{n-1} у сферу



з центром $-z$, що міститься у $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

($0 \in$ її внутрішньої точкою). Оскільки $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$

($F(x, z) = \text{id}_{S^{n-1}} - z$ - немотоніа), $(\psi|_{S^{n-1}})_*$ непер. $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{D}^n$.

$\psi(y) = 0$, тобто $\varphi(y) = z$. Тл.ч., $z \in \varphi(\mathbb{D}^n)$.

34.8x. Нехай $f, g: I \rightarrow I^2$ - шляхи: $f(0) = (0, 0)$,

$f(1) = (1, 1)$, $g(0) = (0, 1)$, $g(1) = (1, 0)$. Поки $f(I) \cap g(I) \neq \emptyset$.



Визначимо $\varphi: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \varphi(t, s) = f(t) - g(s)$ - непер. Треба

показати, що $\exists t, s: \varphi(t, s) = 0$. Застосуємо 34.Кх:

$I^2 \cong \mathbb{D}^2$: $\partial I^2 \cong S^1$, тому вона компактна. $\nearrow \forall t, s \varphi(t, s) \neq 0$,
тому, зокрема, $\varphi(\partial I^2) \neq 0$. Параметризуємо ∂I^2 як

нормы - године и индекси:

$$\varphi \circ h_1(t) := \varphi(t, 0) = f(t) - g(0) = f(t) - (0, 1) \neq 0$$

за прегледан, $0 \mapsto f(0) - (0, 1) = (0, -1)$, $1 \mapsto f(1) - (0, 1) =$

$$= (1, 0), \text{ и } f(t) \in I^2 \rightarrow (\varphi \circ h_1^1)(t) \geq 0 \text{ и } (\varphi \circ h_1^2)(t) \leq 0 \quad \forall t, \varphi(h_3(I))$$

тошто $\varphi(h_1(I))$ - $\square$ окманони (дег 0).

$$\varphi \circ h_2(t) := \varphi(1, t) = f(1) - g(t) = (1, 1) - g(t) \neq 0,$$

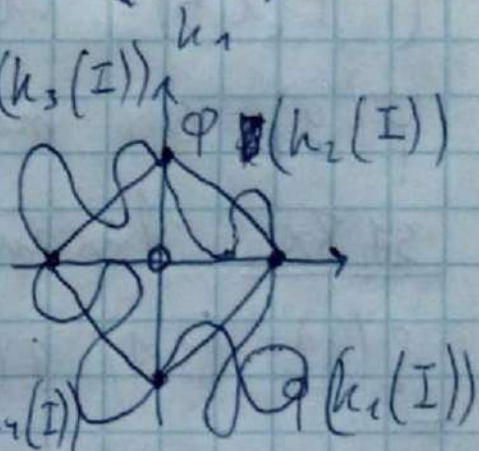
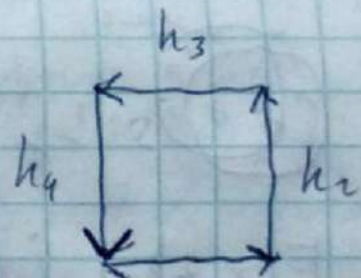
$0 \mapsto (1, 0)$, $1 \mapsto (0, 1)$, $\varphi(h_2(I))$ $\square$ I окм.

$$\varphi \circ h_3(t) := \varphi(1-t, 1) = f(1-t) - g(1) = f(1-t) - (1, 0) \neq 0,$$

$0 \mapsto (0, 1)$, $1 \mapsto (-1, 0)$, $\varphi(h_3(I))$ $\square$ II окм.

$$\varphi \circ h_4(t) := \varphi(0, 1-t) = f(0) - g(1-t) = -g(1-t) \neq 0,$$

$0 \mapsto (-1, 0)$, $1 \mapsto (0, -1)$, $\varphi(h_4(I))$ $\square$ III окм.



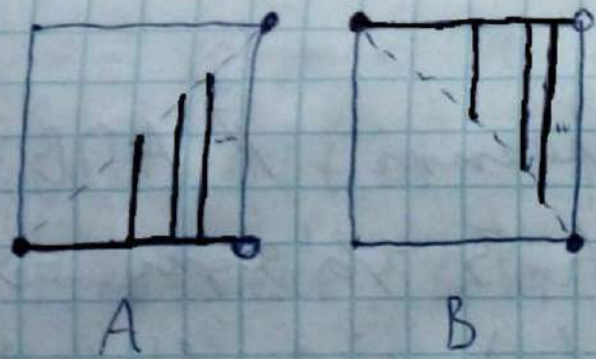
З односторонньої експоненти, кожен з фк: гомоморфізм від-
 ітху, що сполучає кімби, тобто для $h := ((h_1 * h_2) * h_3) * h_4$
 $\varphi \circ h \sim \text{пембу} \Rightarrow [\varphi \circ h] \neq 0$ у $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \varphi(x))$. Тому
 φ_* - нетрив. $\Rightarrow \exists s, t : \varphi(s, t) = 0 \downarrow$.

34.10л. $\forall$ замкнені зв'язні $A, B \subset \mathbb{I}^2$ якщо $(0,0), (1,1) \in A$,
 $(1,0), (0,1) \in B$, то $A \cap B \neq \emptyset$.

A, B - обмежені і замкнені $\Rightarrow$ компактні. $\nearrow A \cap B = \emptyset$.
 Тоді $\varepsilon = \delta(A, B) > 0$ (евкл. відстань). A, B зв'язні $\Rightarrow$
 $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) := \bigcup_{x \in A} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) := \bigcup_{x \in B} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ лін. зв'язні.

(Дійсно, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) = A \cup \bigcup_{x \in A} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ - од'єднана зв'язна і $\forall x \in A$
 $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A \neq \emptyset$ (x) $\Rightarrow$ зв'язна. Вона відкрита і зв. у $\mathbb{R}^2$ -
 лін. зв'язна). За побудовою, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) = \emptyset$. За лін. зв.,
 $\exists$ шляхи $f : \mathbb{I} \rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) : f(0) = (0,0), f(1) = (1,1)$ і
 $g : \mathbb{I} \rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) : g(0) = (0,1), g(1) = (1,0)$ і тоді $f(\mathbb{I}) \cap g(\mathbb{I}) = \emptyset$.

34.9л. Незамкнені такі A і B існують!



Дві "знизані" тріщини з блоками, збудовані обрані так, що не перетинаються (подібно задані дві послідовності $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I : x_n \neq y_m$

$\forall n, m : x_n \rightarrow 1, y_n \rightarrow 1$).

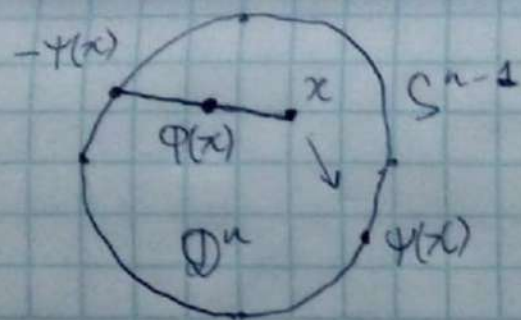
Впр. 15.2. лекції. Ввести теорему про Брауера з м. Брауера.

Подібно відомо: $\forall$ непер. $\varphi: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n \exists x \in \mathbb{D}^n : \varphi(x) = x$.

Проба довести: $\nexists$ ретракції ~~$\varphi: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$~~ $\psi: \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$.

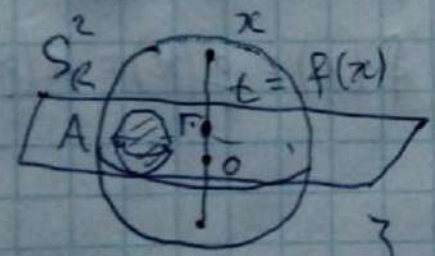
n ретракція ψ існує. Покладемо $\varphi(x) := \frac{x - \psi(x)}{2}$ - непер. за

непер. ψ , $\in$ відобр. $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ за опуклістю. $\exists x : \varphi(x) = x$, подібно $x - \psi(x) = 2x \Rightarrow x = -\psi(x) \in S^{n-1}$. Але тоді $x = \psi(x) \downarrow$.



Впр. 15.4. Лекції або Косзовські, Тн. 20.6 (задача про селівін з шипкою). $\forall$ вимірних обмежень $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ $\exists$ площина α , що ділить конус з A, B, C навпіл. Ідея:

Обм. $\Rightarrow \exists R: A, B, C \subset D_R^3$. $\forall x \in S_R^2 = \partial D_R^3$ розглянемо площину, що ортогональна радіусу Ox сфери:



Нехай α_t - така площина, що знаходиться в α_t на відст. t від x , $t \in [0, 2R]$.

З міркувань неперервності, $\exists t: \alpha_t$ ділить A навпіл. Якщо їх проміжок, візьмемо середину. Позначимо $\varphi(x) := t$. Тоді φ - непер. $S^2 \rightarrow [0, 2R]$ і за побудовою $\varphi(-x) = 2R - \varphi(x)$. Ані-но визначимо $g, h: S^2 \rightarrow [0, 2R]$ для B і C відп. Покладемо

$\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (f(x) - g(x), f(x) - h(x))$ — непрерывно.

Плюс $\varphi(-x) = (2R - f(x) - (2R - g(x)), 2R - f(x) - (2R - h(x))) =$
 $= (g(x) - f(x), h(x) - f(x)) = -\varphi(x)$. За помощью з Тн.

Борсуна-Улама, $\exists x \in S^2: \varphi(x) = 0$, тогда $f(x) = g(x) = h(x)$.

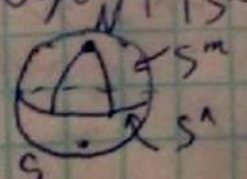
Плюс $\alpha_{f(x)}$ — непрерывная функция.

Вопр. 15.14 ^{Лемма} Вспомогат.: $\forall$ непрерыв. непарного $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ $\deg \varphi$ непарна.

Известно: $\forall m > n \nexists$ непрерыв. непарного $\varphi: S^m \rightarrow S^n$.

$\nexists$ непрерыв. непарные $\varphi: S^m \rightarrow S^n$. Вспомогат. $S^n \subset S^m \left(\{x^1, \dots, x^{m+1}\} \in S^m \mid x^{n+2} = \dots = x^{m+1} = 0 \right)$

Плюс $\varphi|_{S^n}: S^n \rightarrow S^n$ — непарные $\Rightarrow \deg \varphi|_{S^n}$ непарна $\Rightarrow \neq 0$. А $\varphi|_{S^n}$ гомот.

 S^m можно пометить непрерывно: $F(x, \beta) = \varphi(f_\beta(x))$, где f_β — гомеоморфизм S^m на S^n , что $\exists$ $\beta \in [0, 1]$ $x \in S^n$: N . $\downarrow$ (до вкл. непрерыв. н.к.)
 относительно S