2) В площині параметрів (u^1,u^2) крива γ представляється горизонтальним відрізком на висоті h у верхній півплощині. Дотичний вектор кривої:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Довжина дотичного вектора кривої:

$$|\dot{\gamma}|^2 = <\dot{\gamma},\dot{\gamma}> = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{h^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^2}{h^2}$$

Довжина кривої:

$$L = \int_a^b |\dot{\gamma}|\, dt = \int_a^b \frac{R}{h}\, dt = \frac{R}{h}(b-a)$$

3) В площині параметрів (u^1,u^2) крива γ представляється дугою півкола радіуса r з центром на граничній прямій у верхній півплощині. Дотичний вектор кривої:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

Довжина дотичного вектора кривої:

$$|\dot{\gamma}|^2 = <\dot{\gamma},\dot{\gamma}> = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -r\sin t & r\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{r^2\sin^2 t} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{r^2\sin^2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} = \frac{R^2}{\sin^2 t}$$

Довжина кривої: $\quad L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}|\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \dfrac{R}{\sin t}\, dt = R(\ln\tan\dfrac{\beta}{2} - \ln\tan\dfrac{\alpha}{2})$

Відповіді:

1) $L(\gamma) = R(\ln b - \ln a)$

2) $L(\gamma) = \dfrac{R}{h}(b - a)$

Зауважимо, що в цьому випадку довжина кривої, зображеної в площині параметрів (u^1, u^2) горизонтальним відрізком, залежить від відношення $(b–a)/h$. Тобто, якщо брати на заданій поверхні криві, що представляються різними горизонтальними відрізками в площині параметрів, то довжина кривих буде однаковою за умови сталості відношення $(b - a)/h$.

Також зазначимо, що якщо зафіксувати a і b, а величину h прямувати до 0, то довжина кривої буде зростати до нескінченності.

3) $L = R(\ln\tan\dfrac{\beta}{2} - \ln\tan\dfrac{\alpha}{2})$

Зауважимо, що в цьому випадку довжина кривої, зображеної в площині параметрів дугою півкола з центром на граничній прямій верхньої півплощини, не залежить від радіуса r півкола.

Також зазначимо, що якщо зафіксувати $\alpha \to 0$ або $\beta \to \pi$, тобто, один з кінців дуги півкола прямує до граничної прямої верхньої півплощини, то довжина кривої буде зростати до нескінченності.

Побудуйте ілюстрації до розглянутих в задачі прикладів і зроблених висновків.

Задача 14.9. На сфері F , параметризованій «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2(du^1)^2 + R^2\cos^2 u^1\,(du^2)^2\ ,\ -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},$$

розглянемо область Ω_1, визначену умовами

$$-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},\ \alpha < u^2 < \beta,$$

і область Ω_2, визначену умовами

$$a < u^1 < b,\ 0 < u^2 < 2\pi.$$

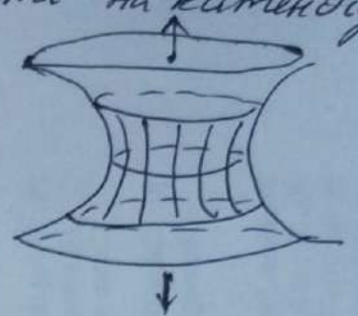
Обчислити площу областей Ω_1 і Ω_2 і площу їх перетину.

Відповіді:

1) Площа сферичної області Ω_1 дорівнює $2R^2(\beta-\alpha)$.
2) Площа сферичної області Ω_2 дорівнює $2\pi R^2(\sin b - \sin a)$.
3) Площа перетину областей Ω_1 і Ω_2 дорівнює $R^2(\beta-\alpha)(\sin b - \sin a)$.

Проілюструйте отримані аналітичні результати, зобразивши відповідні області на сфері і згадавши формули елементарної геометрії для площі сферичних областей.

Задача N1. Обчислити площу області на катеноїді



$$x^1 = a\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2$$
$$x^2 = a\,\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \quad , \quad -A < u^1 < A, \quad 0 < u^2 < 2\pi$$
$$x^3 = a u^1$$

Розв'язання

$$\vec{x} = a\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \\ \mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = a\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\,u^1 \cos u^2 \\ \mathrm{sh}\,u^1 \sin u^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = a\begin{pmatrix} -\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \\ \mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = a^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = a^2 \mathrm{ch}^2 u^1$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \mathrm{ch}^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \det g = a^4 \cdot \mathrm{ch}^2 u^1$$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} \int_{-A}^{A} \sqrt{\det g}\, du^1 du^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-A}^{A} a^2 \mathrm{ch}\,u^1 du^1 du^2 = a^2 \cdot 2\pi \cdot 2\,\mathrm{sh}A =$$
$$= 4\pi a^2 \cdot \mathrm{sh}A$$

Задача 14.10. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2}(du^2)^2 \ ,\ u^2>0,$$

розглянемо область Ω, визначену умовами

$$a < u^1 < b\ ,\ \alpha<u^2<\beta.$$

Обчисліть площу області Ω.

Відповідь: Площа області Ω дорівнює $R^2(b-a)(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha})$

Задача 14.11. Розглянемо явно задану поверхню F,

$$x^3 = h(x^1,x^2),\ \ (x^1,x^2)\in D.$$

Обчисліть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні F.

Обчисліть площу явно заданої поверхні F.

Відповідь: Перша фундаментальна форма

$$g = \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x^1}\right)^2}(dx^1)^2 + 2\frac{\partial h}{\partial x^1}\frac{\partial h}{\partial x^2}dx^1dx^2 + \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x^2}\right)^2}(dx^2)^2$$

Площа поверхні F дорівнює $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial x^2}\right)^2}dx^1dx^2$

Задача 1. Знайдіть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні

$$x^3 = \varphi(x^1; x^2)$$

Розв'язання:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1; u^2) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2 & \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} & 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$g = \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2\right) \cdot (du^1)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} du^1 du^2 + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2\right) \cdot (du^2)^2$$

Тепер розглянемо застосування першої форми. Нам відомо, що для даної поверхні вона має вигляд
$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2,$$
де $a > 0$, тобто
$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2 + a^2.$$
Потрібно знайти периметр та внутрішні кути криволінійного трикутника, сторони якого утворені кривими на поверхні $u = \pm\frac{av^2}{2}$ і $v = 1$ (див. рисунок знизу). Цей трикутник має вершини A $(u = 0, v = 0)$, B $\left(u = \frac{a}{2}, v = 1\right)$ і C $\left(u = -\frac{a}{2}, v = 1\right)$. Зауважимо, що нам не потрібно знати, як саме виглядає поверхня: лише її першу форму та вигляд трикутника у локальних координатах.

Нагадаємо деякі загальні формули. Нехай M – регулярна поверхня в $\mathbb{R}^3$, що локально параметризована вектор-функцією $r\colon (u, v) \mapsto r(u, v)$, і перша форма якої у цій параметризації має вигляд
$$g_{11}(u, v)\, du^2 + 2g_{12}(u, v)\, du\, dv + g_{22}(u, v)\, dv^2.$$
Нехай $\gamma\colon [a, b] \to M$ – гладкий або принаймні кусково гладкий шлях у цій поверхні (точніше, в області параметризації r), що у локальних координатах (u, v) задається функціями $(u(t), v(t))$, тобто як крива в $\mathbb{R}^3$ має вигляд $t \mapsto r(u(t), v(t))$. Тоді її дотичний вектор матиме вигляд
$$\gamma' = u'\, r_u + v'\, r_v.$$
Далі у такому випадку ми можемо писати просто $\gamma = (u, v)$ і $\gamma' = (u', v')$. Тоді довжина цього шляху (дуги) дорівнює
$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{11}(u(t), v(t))\, u'(t)^2 + 2g_{12}(u(t), v(t))\, u'(t)\, v'(t) + g_{22}(u(t), v(t))\, v'(t)^2}\, dt.$$
У нашому випадку сторона AB трикутника – це крива $u = \frac{av^2}{2}$, де $v \in [0, 1]$, що може бути параметризована як $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0, 1]$. Для неї $\gamma'(t) = (at, 1)$. Отже, ця сторона дорівнює
$$l(AB) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 \cdot (at)^2 + 0 + \left(\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right) \cdot 1^2}\, dt = a \int\limits_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{t^4}{4} + 1}\, dt =$$
$$= a \int\limits_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\, dt = a \left(\frac{t^3}{6} + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

Аналогічно, сторона AC – крива $u = -\frac{av^2}{2}$, де $v \in [0,1]$, тобто $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0,1]$ і $\mu'(t) = (-at, 1)$. Тому так само

$$l(AC) = \int_0^1 \sqrt{(-at)^2 + \left(\left(-\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right)}\, dt = \frac{7a}{6}.$$

Нарешті, сторона трикутника BC – це координатна лінія $v = 1$, $u \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, що параметризується як $\nu(t) = (t, 1)$, $t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ і для якої $\nu'(t) = (1, 0)$. Тому

$$l(BC) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1^2 + 0 + 0}\, dt = t|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = a.$$

Зокрема, периметр трикутника дорівнює $l(AB) + l(AC) + l(BC) = \frac{10a}{3}$.

Нехай тепер γ і μ – криві у поверхні M, що перетинаються у точці $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p \in M$ з локальними координатами (u_0, v_0). Тепер позначимо локальні параметризації цих кривих через $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ і $\mu(t) = (\mu^1(t), \mu^2(t))$ відповідно. Кут між кривими в p – це просто кут між ними в $\mathbb{R}^3$, тобто кут між їхніми дотичними векторами в p. Його косинус дорівнює

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \mu'(s_0)\rangle}{|\gamma'(t_0)|\,|\mu'(s_0)|} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\gamma^i)'(t_0)\,(\mu^j)'(s_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\gamma^i)'(t_0)\,(\gamma^j)'(t_0)}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\mu^i)'(s_0)\,(\mu^j)'(s_0)}}.$$

В нашій задачі нам потрібно ще слідкувати за тим, щоб кути були внутрішніми, відповідним чином обираючи параметризації. Так, у точці A для обраних раніше параметризацій сторін $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$ і $\mu(s) = \left(-\frac{as^2}{2}, s\right)$ маємо $\gamma(0) = \mu(0) = (0,0) = A$, і дотичні вектори $\gamma'(0) = (0,1)$, $\mu'(0) = (0,1)$ збігаються, отже $\angle A = 0$.

У B, щоб отримати внутрішній кут, оберемо параметризації, для яких дотичні вектори напрямлені вліво на площині (u, v) (див. малюнок): $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (-s, 1)$, отже $\gamma'(t) = (at, -1)$ і $\nu'(s) = (-1, 0)$. Дійсно, для них точка перетину $\gamma(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 1\right) = B$, і $\gamma'(-1) = (-a, -1)$, $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (-1, 0)$ мають від'ємні перші координати. Таким чином,

$$\left\langle \gamma'(-1), \nu'\left(-\frac{a}{2}\right)\right\rangle = g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-a)\cdot(-1) + g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)((-a)\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-1)\cdot 0 =$$

$$= 1 \cdot a + 0 + 0 = a,$$

$$|\gamma'(-1)| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-a)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-a)\cdot(-1) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-1)^2} =$$

$$= \sqrt{1 \cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right) \cdot 1} = \frac{3a}{2},$$

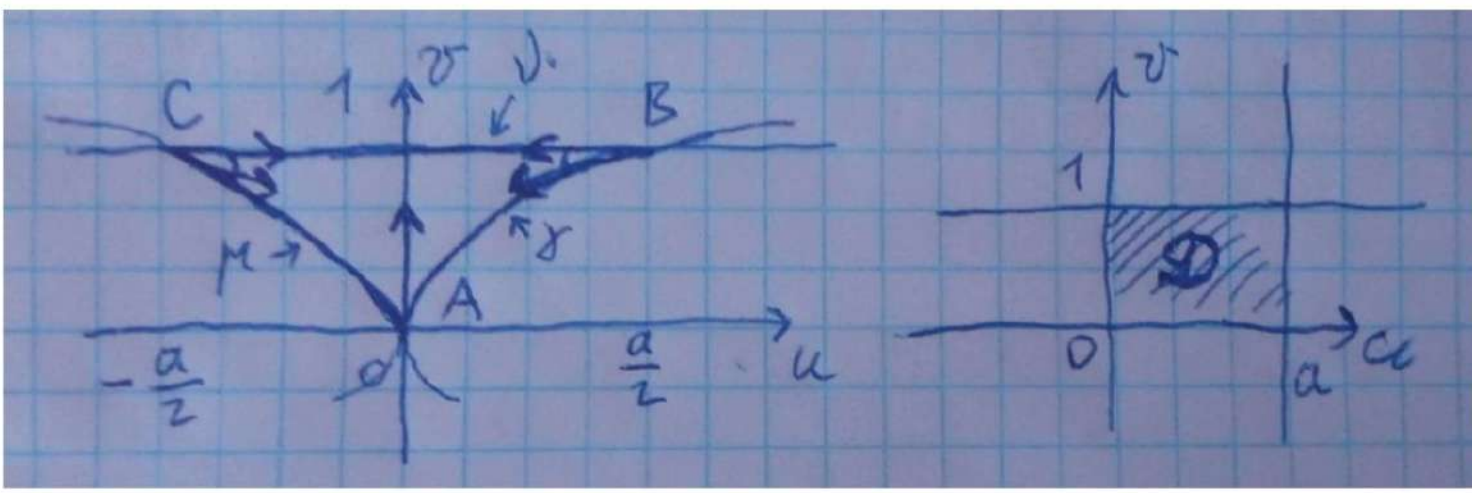
$$\left|\nu'\left(-\frac{a}{2}\right)\right| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-1)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)(-1) \cdot 0 + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right) 0^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$$

отже

$$\cos \angle B = \frac{a}{\frac{3a}{2} \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Аналогічним чином у C оберемо параметризації, дотичні вектори яких "дивляться" вправо: $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (s, 1)$, для яких $\mu'(t) = (-at, -1)$ і $\nu'(s) = (1, 0)$. Тоді точка перетину $\mu(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, 1\right) = C$, у ній перші координати дотичних векторів $\mu'(-1) = (a, -1)$ і $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (1, 0)$ додатні. Аналогічно першому куту обчислюємо:

$$\cos \angle C = \frac{1 \cdot a + 0 + 0}{\sqrt{1 \cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right) \cdot 1}\sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{2}{3}.$$



Знайдемо на гелікоїді площу області D, що у координатах (u, v) обмежена лініями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$ і $v = 1$ (див. ілюстрацію зверху).

У загальному випадку площа області D, що міститься в області параметризації r регулярної поверхні M з першою формою

$$g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2,$$

знаходиться за формулою

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{\det G}\, du\, dv = \int\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv,$$

де

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

позначає матрицю першої форми. Це те, що в аналізі зветься поверхневим інтегралом першого роду (від постійної функції 1). Строго кажучи, інтегрування тут іде не по D, а по її прообразу $r^{-1}(D)$ у площині (u, v), але ми трохи спрощуємо позначення. Зауважимо також, що $\sqrt{\det G} = |[r_u, r_v]|$ (доведіть це самостійно).

Ми вже знаємо, що перша форма гелікоїда має вигляд

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$$

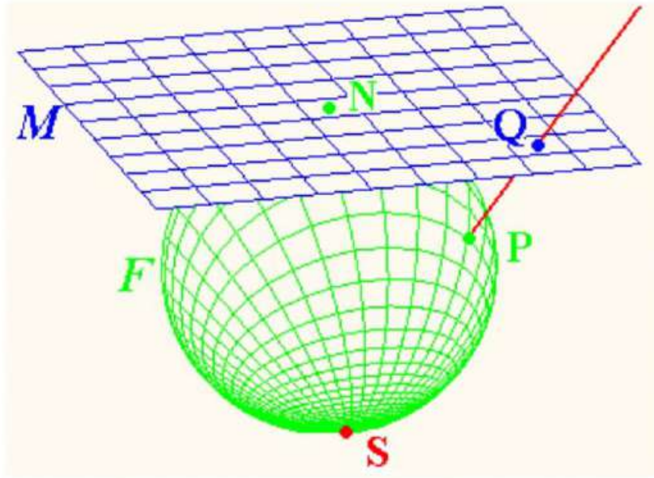
(до речі, це форма з попередньої задачі). Тому

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{1 \cdot (u^2 + a^2) - 0^2}\, du\, dv = \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\, du \int\limits_0^1 dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\right)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a^2 + a^2 \ln\left(a\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) - a^2 \ln a\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

Задача 15.2. Доведіть, що стереографічна проекція сфери (без полюса) на площину є конформним відображенням.



Розв'язання.

Задамо сферу в географічних координатах

$$\begin{cases} x^1 = R\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Перша фундаментальна форма $g = R^2(du^1)^2 + R^2\cos^2 u^1 (du^2)^2$

Задамо площину в декартових координатах

$$\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = R \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$$

Перша фундаментальна форма $G = (dv^1)^2 + (dv^2)^2$

Відображення стереографічної проекції:

$$\begin{cases} v^1 = 2R\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \\ v^2 = 2R\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} dv^1 = -2R\dfrac{1}{1+\sin u^1}\cos u^2 du^1 - 2R\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \; du^2 \\ dv^2 = -2R\dfrac{1}{1+\sin u^1}\sin u^2 du^1 + 2R\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \; du^2 \end{cases}$$

$$G = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 = \frac{4R^2}{(1+\sin u^1)^2}\left((du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2\right) = \frac{4}{(1+\sin u^1)^2} g$$

Отже, при стереографічній проекції перші фундаментальні форми сфери і площини є пропорційними, що означає конформність відображення.

З огляду на коефіцієнт пропорційності в північному полюсі стереографічна проекція є ізометричною, але чим далі точка від північного полюса, тим сильніше розтягування спричиняється стереографічною проекцією.

Задача 15.3. Розглянемо сферу F радіуса R, задану параметрично в «географічних» координатах

$$\begin{cases} x^1 = R\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Розглянемо круговий циліндр M радіуса r, заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r\cos v^2 \\ x^2 = r\sin v^2 \\ x^3 = v^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Розглянемо відображення, задане в локальних координатах у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = h(u^1) \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

При цьому відображенні: меридіани $u^2=const$ на сфері F відображаються в прямолінійні твірні $v^2=const$ на циліндрі M, а паралелі $u^1=const$ на сфері F відображаються в паралелі $v^1=const$ на циліндрі M.

Підібрати функцію $h(u^1)$ так, щоб відображенням було конформним.

Підібрати функцію $h(u^1)$ так, щоб відображенням було еквіареальним.

Розв'язання. Перші фундаментальні форми сфери і циліндра:

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 \, (du^2)^2,$$

$$G = (dv^1)^2 + r^2 (dv^2)^2 = (h')^2 (du^1)^2 + r^2 (du^2)^2.$$

Ізометричність відображення означала б, що $g=G$, тобто

$$R^2 = (h')^2, \qquad R^2 \cos^2 u^1 = r^2,$$

цього досягнути не можливо при жодному $h(u^1)$.

Конформність відображення означала б, що g і G пропорційні, тобто,

$$\frac{(h')^2}{R^2} = \frac{r^2}{R^2 \cos^2 u^1}, \qquad \text{тобто,} \qquad \frac{dh}{du^1} = \pm \frac{r}{\cos u^1}$$

Розв'язок: $$h(u^1) = \pm \frac{r}{2} \ln \frac{1+\sin u^1}{1-\sin u^1}$$

Таким чином, відображення

$$\begin{cases} v^1 = \pm \dfrac{r}{2} \ln \dfrac{1+\sin u^1}{1-\sin u^1} \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

є конформним відображенням сфери (без полюсів) на циліндр, що переводить координатну сітку паралелей і меридіанів на сфері в координатну сітку паралелей і прямолінійних твірних на циліндрі (*проекція типу Меркатора*).

Еквіареальність відображення означала б, що det g =det G, тобто,

$$R^4 \cos^2 u^1 = r^2 (h')^2 .$$

$$h' = \pm \frac{R^2}{r} \cos u^1$$

Розв'язок:
$$h(u^1) = \pm \frac{R^2}{r} \sin u^1$$

Таким чином, відображення

$$\begin{cases} v^1 = \pm \dfrac{R^2}{r} \sin u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

є еквіареальним відображенням сфери (без полюсів) на циліндр, що переводить координатну сітку паралелей і меридіанів на сфері в координатну сітку паралелей і прямолінійних твірних на циліндрі. Образом сфери при цьому відображенні буде кільце на циліндрі, площа якого дорівнює площі сфери.

Задача 15.4. Нехай задано площину, параметризовану декартовими координатами. Доведіть, що перетворення, отримане розтягуванням в раз вздовж одного координатного напрямку і стискуванням в раз в іншому координатному напрямку, є еквіареальним перетворенням площини, але не є ні ізометричним, ні конформним.