

## Лекція 14. Ізометрії, конформні і еквіареальні відображення

### 1. Перша фундаментальна форма і відображення поверхонь

Розглянемо неперервне відображення загальних поверхонь  $F$  і  $M$ :

$$\Psi : F \rightarrow M$$

**Визначення.** Відображення  $\Psi$  називається *ізометричним*, якщо воно зберігає довжину кривих, тобто, для будь-якої кривої  $\gamma$  на поверхні  $F$  відповідна крива  $\Gamma = \Psi \circ \gamma$  на поверхні  $M$  має ту ж саму довжину:

$$l(\gamma) = l(\Gamma)$$

**Визначення.** Відображення  $\Psi$  називається *конформним*, якщо воно зберігає кут між кривими, тобто, для будь-якої пари кривих  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , що перетинаються, на поверхні  $F$  відповідні криві  $\Gamma_1 = \Psi \circ \gamma_1$  і  $\Gamma_2 = \Psi \circ \gamma_2$  на поверхні  $M$  перетинаються під тим самим кутом:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

**Визначення.** Відображення  $\Psi$  називається *еквіареальним*, якщо воно зберігає площу областей, тобто, для будь-якої області  $U$  на поверхні  $F$  відповідна область  $V = \Psi(U)$  на поверхні  $M$  має ту ж саму площу:

$$\text{Area}(U) = \text{Area}(V)$$

Нехай поверхні  $F$  і  $M$  є регулярними і відображення

$$\Psi: F \rightarrow M$$

є регулярним і взаємно однозначним.

В локальних координатах  $(u^1, u^2)$  на поверхні  $F$  і локальних координатах  $(v^1, v^2)$  на поверхні  $M$  відображення  $\Psi$  задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Регулярність відображення  $\Psi$  означає, що вказані функції є неперервно диференційовними і задовольняють

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Зробимо на поверхні  $M$  регулярну заміну локальних координат

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

перейшовши від координат  $(v^1, v^2)$  до координат  $(u^1, u^2)$ .

Після такої заміни отримаємо, що відображення  $\Psi$  ставить у відповідність точки з однаковими координатами  $(u^1, u^2)$  на поверхнях  $F$  і  $M$ .

*Термінологія:* відображення за рівністю координат

Перша фундаментальна форма поверхні  $F$  :

$$g = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 .$$

Перша фундаментальна форма поверхні  $M$  :

$$G = G_{11}(dv^1)^2 + 2G_{12}dv^1dv^2 + G_{22}(dv^2)^2 ,$$

а після заміни координат

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

вона прийме вигляд

$$\begin{aligned} G &= G_{11}(dv^1)^2 + 2G_{12}dv^1dv^2 + G_{22}(dv^2)^2 = \\ &= G_{11}\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial v^1}{\partial u^2}du^2\right)^2 + 2G_{12}\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial v^1}{\partial u^2}du^2\right)\left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^2}du^2\right) + G_{22}\left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^2}du^2\right)^2 = \\ &= \tilde{G}_{11}(du^1)^2 + 2\tilde{G}_{12}du^1du^2 + \tilde{G}_{22}(du^2)^2, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{G}_{ij} = \sum_{k,m=1}^2 G_{km} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^m}{\partial u^j}$$

Скажемо, що при відображенні  $\Psi: F \rightarrow M$  перші фундаментальні форми поверхонь співпадають, якщо

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{pmatrix}.$$

Скажемо, що при відображенні  $\Psi: F \rightarrow M$  перші фундаментальні форми поверхонь пропорційні, якщо

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{pmatrix},$$

де  $\Lambda(u^1, u^2)$  — деяка функція.

Скажемо, що при відображенні  $\Psi: F \rightarrow M$  перші фундаментальні форми поверхонь мають однакові визначники, якщо

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{vmatrix}.$$

Тобто, при відображенні поверхонь спочатку робимо відповідно заміну координат, щоб відображення співставляло на поверхнях точки з однаковими координатами, а потім вже порівнюємо перші фундаментальні форми поверхонь.

**Твердження.** Відображення  $\Psi$  є ізометричним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних точках співпадають.

Ідея доведення.

$\Leftarrow$ ) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних точках співпадають. Розглянемо локальні координати на поверхнях  $F$  і  $M$ , вибрані таким чином, що відображення  $\Psi$  ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива  $\gamma$  на поверхні  $F$ , і відповідна крива  $\Gamma$  на поверхні  $M$  задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt$$
$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\tilde{G}_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + \tilde{G}_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt$$

а перші фундаментальні форми співпадають,

$$\tilde{G}_{11} = g_{11}, \quad \tilde{G}_{12} = g_{12}, \quad \tilde{G}_{22} = g_{22},$$

то  $l(\gamma) = l(\Gamma)$ .

$\Rightarrow$ ) Припустимо, що довжина відповідних (за відображенням  $\Psi$ ) кривих на поверхнях  $F$  і  $M$  співпадає. Розглянемо локальні координати на поверхнях  $F$  і  $M$ , вибрані таким чином, що відображення  $\Psi$  ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива  $\gamma$  на поверхні  $F$  і відповідна крива  $\Gamma$  на поверхні  $M$  задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt$$

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\tilde{G}_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + \tilde{G}_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt$$

і  $l(\gamma) = l(\Gamma)$  за умовою, то

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{g_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt &= \\ &= \int_a^b \sqrt{\tilde{G}_{11} \left( \frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + \tilde{G}_{22} \left( \frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що границі інтегрування не є фіксованими, отримуємо

$$g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2 = \tilde{G}_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2\tilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + \tilde{G}_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2,$$

тобто

$$(\tilde{G}_{11} - g_{11})\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2(\tilde{G}_{12} - g_{12})\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + (\tilde{G}_{22} - g_{22})\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2 = 0$$

Оскільки крива  $\gamma$  на поверхні  $F$ , задана функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases},$$

є довільною, з останньої рівності випливає

$$\tilde{G}_{11} - g_{11} = 0, \quad \tilde{G}_{12} - g_{12} = 0, \quad \tilde{G}_{22} - g_{22} = 0.$$

Це і означає, що перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних (за відображенням  $\Psi$ ) точках співпадають.

**Твердження.** Відображення  $\Psi$  є конформним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних точках пропорційні.

Ідея доведення.

$\Leftarrow$ ) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних точках пропорційні. Розглянемо локальні координати на поверхнях  $F$  і  $M$ , вибрані таким чином, що відображення  $\Psi$  ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  на поверхні  $F$  і відповідні криві  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  на поверхні  $M$  задаються однаковими функціями

$$\gamma_1, \Gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad \gamma_2, \Gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases}$$

Кут між кривими  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ :

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими  $\Gamma_1, \Gamma_2$ :

$$\cos \hat{\phi} = \frac{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

За умовою, перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  пропорційні  
 $\tilde{G}_{11} = \Lambda \cdot g_{11}, \tilde{G}_{12} = \Lambda \cdot g_{12}, \tilde{G}_{22} = \Lambda \cdot g_{22},$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \cos \hat{\phi} &= \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^2 \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} = \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\cos \hat{\varphi} = \cos \varphi,$$

тобто кут між кривими  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  на поверхні  $F$  і кут між відповідними кривими  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  на поверхні  $M$  співпадають.

$\Rightarrow$ ) Припустимо, що кут між довільними кривими  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  на поверхні  $F$  і кут між відповідними кривими  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  на поверхні  $M$  співпадають.

Розглянемо локальні координати на поверхнях  $F$  і  $M$ , вибрані таким чином, що відображення  $\Psi$  ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  на поверхні  $F$  і відповідні криві  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  на поверхні  $M$  задаються однаковими функціями

$$\gamma_1, \Gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad \gamma_2, \Gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases}$$

Кут між кривими  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ :

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими  $\Gamma_1, \Gamma_2$ :

$$\cos \hat{\phi} = \frac{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \tilde{G}_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Припустимо, що криві  $\gamma_1, \gamma_2 \in$  взаємно ортогональними:

$$g_{11} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\eta^1}{d\sigma} + g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\eta^2}{d\sigma} + g_{21} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\eta^1}{d\sigma} + g_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\eta^2}{d\sigma} = 0.$$

Тоді відповідні криві  $\Gamma_1, \Gamma_2$  теж  $\in$  взаємно ортогональними:

$$\tilde{G}_{11} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\eta^1}{d\sigma} + \tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\eta^2}{d\sigma} + \tilde{G}_{21} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\eta^1}{d\sigma} + \tilde{G}_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\eta^2}{d\sigma} = 0$$

Запишемо ці співвідношення у вигляді

$$\begin{pmatrix} g_{11} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{21} \frac{d\xi^2}{dt} & g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \\ \tilde{G}_{11} \frac{d\xi^1}{dt} + \tilde{G}_{21} \frac{d\xi^2}{dt} & \tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} + \tilde{G}_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\eta^1}{d\sigma} \\ \frac{d\eta^2}{d\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Звідси отримаємо

$$\frac{g_{11} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{21} \frac{d\xi^2}{dt}}{\tilde{G}_{11} \frac{d\xi^1}{dt} + \tilde{G}_{21} \frac{d\xi^2}{dt}} = \frac{g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{22} \frac{d\xi^2}{dt}}{\tilde{G}_{12} \frac{d\xi^1}{dt} + \tilde{G}_{22} \frac{d\xi^2}{dt}}$$

Якщо підставити  $\frac{d\xi^1}{dt} = 0$  , отримаємо  $\frac{g_{21}}{\tilde{G}_{21}} = \frac{g_{22}}{\tilde{G}_{22}}$

Якщо підставити  $\frac{d\xi^2}{dt} = 0$  , отримаємо  $\frac{g_{11}}{\tilde{G}_{11}} = \frac{g_{12}}{\tilde{G}_{12}}$

Значить, перші фундаментальні форми поверхонь  $F$  і  $M$  пропорційні

$$\frac{g_{11}}{\tilde{G}_{11}} = \frac{g_{12}}{\tilde{G}_{12}} = \frac{g_{21}}{\tilde{G}_{21}} = \frac{g_{22}}{\tilde{G}_{22}}$$

**Твердження.** Відображення  $\Psi$  є еквіареальним тоді, і тільки тоді, коли визначники матриць коефіцієнтів перших фундаментальних форм поверхонь  $F$  і  $M$  у відповідних точках співпадають.

Ідея доведення полягає у застосуванні визначальної формули для площі області на поверхні

$$Area(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det g} du^1 du^2$$

При одночасній параметризації поверхонь таким чином, щоб відображення задавалось за рівністю координат, відповідні області на поверхнях  $F$  і  $M$  представляються однаковими обмеженнями, що визначають область інтегрування в площині параметрів  $(u^1, u^2)$ .

Оскільки площа визначається інтегруванням визначника матриці коефіцієнтів першої фундаментальної форми, зі співпадіння визначників випливає співпадіння площ відповідних областей на поверхнях  $F$  і  $M$ .

Навпаки, зі співпадіння площ відповідних областей на поверхнях  $F$  і  $M$ , та зважаючи на довільність вибору областей, випливає співпадіння підінтегральних виразів, тобто, співпадіння визначників перших фундаментальних поверхонь.

## Підсумок

Ізометричність

$$g_F = g_M$$

Конформність

$$g_F = \lambda \cdot g_M$$

Еквіареальність

$$\det g_F = \det g_M$$

*Зауваження.*

1. Якщо відображення є ізометричним, воно є конформним. Але існують конформні відображення, які не є ізометричними.
2. Якщо відображення є ізометричним, воно є еквіареальним. Але існують еквіареальні відображення, які не є ізометричними.

**Визначення.** Регулярні прості поверхні  $F$  і  $M$  називаються *ізометричними*, якщо між ними можна встановити регулярне взаємно однозначне відображення  $\Psi: F \rightarrow M$ , яке є ізометричним.

**Твердження.** *Ізометричність регулярних поверхонь є відношенням еквівалентності:*

1) *кожна поверхня ізометрична сама собі, відповідне відображення  $\Psi$  є тотожнім,*

2) *якщо відображення  $\Psi: F \rightarrow M$  є ізометричним, то  $\Psi^{-1}: M \rightarrow F$  є ізометричним,*

3) *якщо відображення  $\Psi: F \rightarrow M$  і  $\Psi^*: M \rightarrow M^*$  є ізометричними, то відображення  $\Psi^* \circ \Psi: F \rightarrow M^*$  є ізометричним.*

**Приклад.** Якщо поверхня  $M$  отримана з поверхні  $F$  рухом в обхопному просторі  $\mathbb{R}^3$ , то поверхні  $F$  і  $M$  є ізометричними.

Але не завжди ізометричні поверхні суміщаються рухом в просторі  $\mathbb{R}^3$ , поверхні можуть мати різну зовнішню форму.

Термінологія. Набір усіх геометричних величин, що визначаються першою фундаментальною формою поверхні, зокрема – довжина кривих на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа областей на поверхні, утворюють *внутрішню геометрію* поверхні.

Ізометричні поверхні мають однакову внутрішню геометрію.

З прикладної точки зору, якщо зробити *паперові* моделі пари поверхонь, то ізометричність поверхонь означає, що модель однієї поверхні можна накласти на модель іншої поверхні за допомогою деформування зовнішньої форми моделі, без розтягування/стискування матеріалу, унеможливлених його фізичними властивостями.

## Приклад 1.1. Площина і циліндрична поверхня

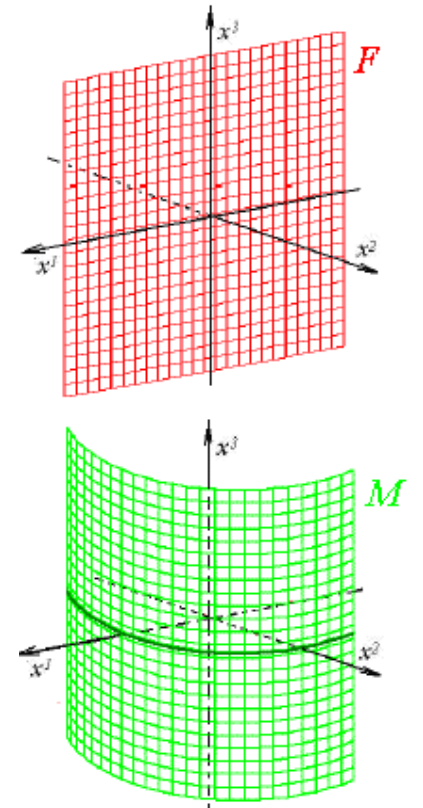
Нехай  $F$  – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Нехай  $M$  – циліндр з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho^1(v^1) \\ \rho^2(v^1) \\ v^2 \end{pmatrix},$$

де  $v^1$  – натуральний параметр на базовій кривій циліндра, заданій параметрично  $x^1 = \rho^1(u^1)$ ,  $x^2 = \rho^2(u^1)$ ,  $x^3 = 0$ .



Перші фундаментальні форми:

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

$$G = (dv^1)^2 + (dv^2)^2$$

При відображенні за рівністю координат  $\Psi$ :  $\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$  перші фундаментальні

форми співпадають. Значить, відображення  $\Psi$  – локально ізометричне.

Таким чином, площина і циліндрична поверхня є локально ізометричними.

## Приклад 1.2. Площина і конічна поверхня

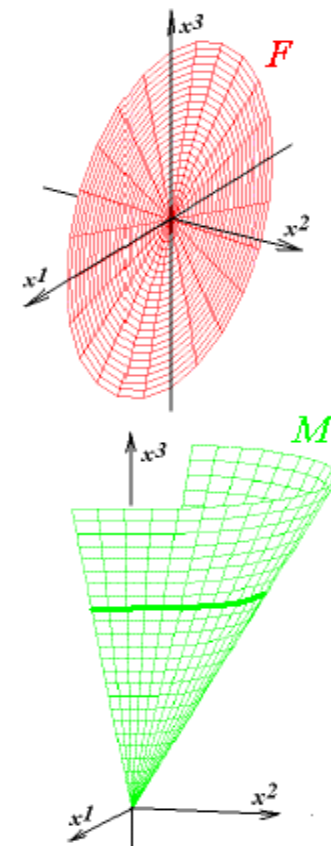
Нехай  $F$  – площина з радіус-вектором (полярні координати)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \cos u^2 \\ 0 \\ u^1 \sin u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u^1 &> 0 \\ \alpha &< u^2 < \beta \end{aligned}$$

Нехай  $M$  – конус з радіус-вектором

$$\vec{x} = v^1 \cdot \begin{pmatrix} \rho^1(v^2) \\ \rho^2(v^2) \\ \rho^3(v^2) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} v^1 &> 0 \\ \alpha &< v^2 < \beta \end{aligned},$$

де  $v^2$  – натуральний параметр на базовій кривій конуса, заданій параметрично  $x^1 = \rho^1(v^2)$ ,  $x^2 = \rho^2(v^2)$ ,  $x^3 = \rho^3(v^2)$ . Вважаємо, що базова крива лежить на сфері одиничного радіусу.



Перші фундаментальні форми:

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 \cdot (du^2)^2$$

$$G = (dv^1)^2 + (v^1)^2 \cdot (dv^2)^2$$

При відображенні за рівністю координат  $\Psi: \begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$  перші фундаментальні

форми співпадають. Значить, відображення  $\Psi$  – локально ізометричне.

Таким чином, площина і конічна поверхня є локально ізометричними

### Приклад 1.3. Площина і торсова поверхня

Нехай  $F$  – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Нехай  $M$  – торсова поверхня з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho} + v^1 \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dv^2}, \quad \begin{matrix} v^1 > 0 \\ \alpha < v^2 < \beta \end{matrix},$$

де  $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v^2)$  – радіус-вектор базової кривої, параметризованої натуральним параметром  $v^1$ .

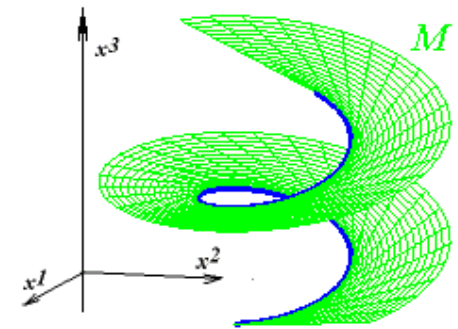
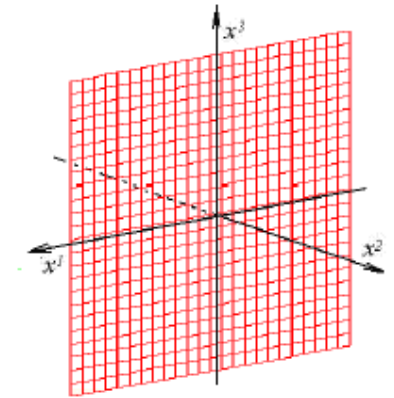
Перші фундаментальні форми:

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

$$G = (dv^1)^2 + 2 dv^1 dv^2 + (1 + (v^1)^2 \cdot k^2) \cdot (dv^2)^2$$

Розглянемо відображення  $\Psi$ : 
$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(v^2) + v^1 \cdot \frac{d\xi^1}{dv^2} \\ u^2 = \xi^2(v^2) + v^1 \cdot \frac{d\xi^2}{dv^2} \end{cases},$$

де  $\xi^1(v^2), \xi^2(v^2)$  – пара функцій, що задовольняють  $\left(\frac{d\xi^1}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dv^2}\right)^2 = 1$



Маємо:

$$\begin{cases} du^1 = \frac{d\xi^1}{dv^2} dv^1 + \left( \frac{d\xi^1}{dv^2} + v^1 \cdot \frac{d^2 \xi^1}{dv^{2^2}} \right) dv^2 \\ du^2 = \frac{d\xi^2}{dv^2} dv^1 + \left( \frac{d\xi^2}{dv^2} + v^1 \cdot \frac{d^2 \xi^2}{dv^{2^2}} \right) dv^2 \end{cases}$$

Тоді, з урахуванням  $\left(\frac{d\xi^1}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dv^2}\right)^2 = 1$ , отримаємо

$$\begin{aligned} g &= (du^1)^2 + (du^2)^2 = \\ &= \left( \frac{d\xi^1}{dv^2} dv^1 + \left( \frac{d\xi^1}{dv^2} + v^1 \cdot \frac{d^2 \xi^1}{dv^{2^2}} \right) dv^2 \right)^2 + \left( \frac{d\xi^2}{dv^2} dv^1 + \left( \frac{d\xi^2}{dv^2} + v^1 \cdot \frac{d^2 \xi^2}{dv^{2^2}} \right) dv^2 \right)^2 = \\ &= (dv^1)^2 + 2dv^1 dv^2 + (v^1)^2 \left( 1 + \left( \frac{d^2 \xi^1}{dv^{2^2}} \right)^2 + \left( \frac{d^2 \xi^2}{dv^{2^2}} \right)^2 \right) (dv^2)^2 \end{aligned}$$

Підберемо функції  $\xi^1(v^2), \xi^2(v^2)$  так, що на додаток до  $\left(\frac{d\xi^1}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dv^2}\right)^2 = 1$

вони задовольняли б і  $\left(\frac{d^2 \xi^1}{dv^{2^2}}\right)^2 + \left(\frac{d^2 \xi^2}{dv^{2^2}}\right)^2 = k^2$ .

Тоді отримаємо, що при переході від координат  $(u^1, u^2)$  до координат  $(v^1, v^2)$  на площині  $F$  її перша фундаментальна форма  $g$  співпадає з першою фундаментальною формою  $G$  заданої торсової поверхні  $M$ . Це буде означати, що відображення  $\Psi$  є локально ізометричним.

Таким чином, площа і торсова поверхня є локально ізометричними.

З геометричної точки зору, вибір функцій  $\xi^1(v^2), \xi^2(v^2)$  означає вибір кривої в площині  $F$  з тією самою кривиною  $k$ , що і в базовій кривій на торсовій поверхні  $M$ . Площина  $F$  (локально) представляється як торсова поверхня знайденої кривої. Відображення  $\Psi$  перетворює базову криву торсової поверхні  $F$  в базову криву торсової поверхні  $M$ , і переводить прямолінійні твірні торсової поверхні  $F$  в прямолінійні твірні торсової поверхні  $M$ .

*Термінологія.* Поверхні, локально ізометричні площині, називаються *розгортними*, оскільки їх можна *розгорнути* на площину (без розтягувань і стискувань).

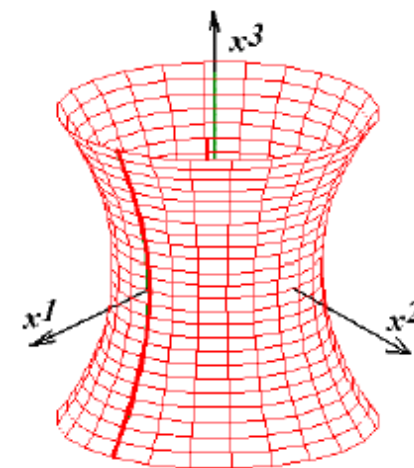
Циліндричні, конічні, торсові поверхні є розгортними.

Розгортні поверхні мають різноманітні важливі застосування в техніці, інженерії, архітектурі.

## Приклад 2. Гелікоїд і катеноїд

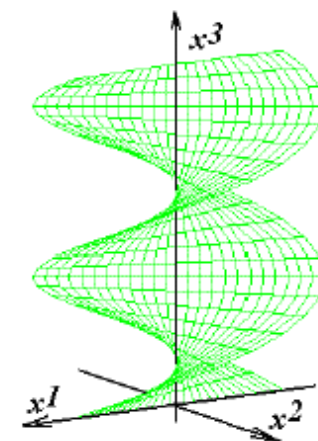
Нехай  $F$  –катеноїд з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \cos u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{aligned}$$



Нехай  $M$  – гелікоїд з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v^1 \cos v^2 \\ v^1 \sin v^2 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} -\infty < v^1 < \infty \\ 0 < v^2 < 2\pi \end{aligned}$$



Перші фундаментальні форми:

$$g = \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2$$

$$G = (dv^1)^2 + (1 + (v^1)^2) \cdot (dv^2)^2$$

Розглянемо відображення  $\Psi$ :  $\begin{cases} v^1 = \sinh u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$ .

При цьому відображенні меридіани катеноїда переходять в прямолінійні твірні гелікоїда, екваторіальна паралель катеноїда розкручується на вісь обертання гелікоїда, а інші паралелі розкручуються на гвинтові лінії на гелікоїді.

Який вигляд прийме перша фундаментальна форма гелікоїда, якщо зробити відповідну заміну координат  $v^1 = \sinh u^1$ ,  $v^2 = u^2$ ?

Маємо:

$$\begin{aligned} G &= (dv^1)^2 + (1+(v^1)^2) (dv^2)^2 = (\cosh u^1 du^1)^2 + (1+(\sinh u^1)^2) (du^2)^2 \\ &= \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2 \end{aligned}$$

Отже, після заміни координат, породженою відображенням  $\Psi$ , перша фундаментальна форма гелікоїда співпадає з першою фундаментальною формою катеноїда,  $G = g$ . Значить, відображення  $\Psi$  – локально ізометричне.

Таким чином, катеноїд і гелікоїд локально ізометричні.

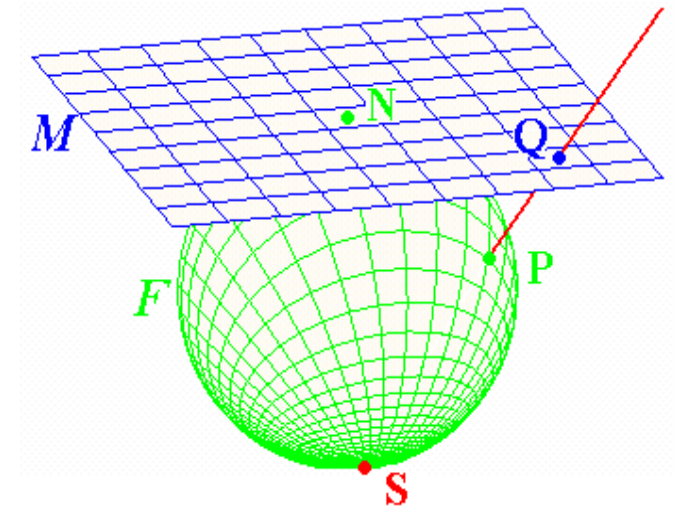
(Наглядний експеримент: Спробуйте зробити паперові моделі частини катеноїда і частини гелікоїда, а потім пересвідчитись, що розрізавши катеноїд вздовж меридіана його множна розігнути (без розтягувань і стискувань) і накласти на гелікоїд. Тобто, локально, катеноїд розгортається на гелікоїд; і навпаки, гелікоїд можна згорнуть, без розтягувань і стискувань, утворивши катеноїд).

*Зауваження.* Те, що пара поверхонь є ізометричною, що між ними можна побудувати ізометричне відображення – це дуже спеціальна ситуація. Якщо взяти довільну пару регулярних поверхонь, то в більшості випадків неможливо побудувати ізометричне відображення між цими поверхнями, навіть локально.

## Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

**Задача 14.1.** Доведіть, що відображення поверхонь, породжене гомотетією в об'ємному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^3$ , є конформним.

**Задача 14.2.** Доведіть, що стереографічна проекція сфери (без полюса) на площину є конформним відображенням.



**Задача 14.3.** Розглянемо сферу  $F$  радіуса  $R$ , задану параметрично в «географічних» координатах

$$\begin{cases} x^1 = R \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R \cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R \sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Розглянемо круговий циліндр  $M$  радіуса  $r$ , заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \cos v^2 \\ x^2 = r \sin v^2 \\ x^3 = v^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Розглянемо відображення, задане в локальних координатах у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = h(u^1) \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

При цьому відображенні: меридіани  $u^2 = \text{const}$  на сфері  $F$  відображаються в прямолінійні твірні  $v^2 = \text{const}$  на циліндрі  $M$ , а паралелі  $u^1 = \text{const}$  на сфері  $F$  відображаються в паралелі  $v^1 = \text{const}$  на циліндрі  $M$ .

Підібрати функцію  $h(u^1)$  так, щоб відображенням було конформним.

Підібрати функцію  $h(u^1)$  так, щоб відображенням було еквіареальним.

**Задача 14.4.** Нехай задано площину, параметризовану декартовими координатами. Доведіть, що перетворення, отримане розтягуванням в  $\lambda$  раз вздовж одного координатного напрямку і стискуванням в  $\lambda$  раз в іншому координатному напрямку, є еквіареальним перетворенням площини, але не є ні ізометричним, ні конформним.

Додаток. Нехай задано поверхні  $F$  і  $M$ . Чи є вони локально ізометричними?

$$g = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j \qquad G = \sum_{k,l=1}^2 G_{kl} dv^k dv^l$$

Чи існує регулярне відображення  $\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$  таке, що

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j = \sum_{k,l=1}^2 G_{kl} d\xi^k d\xi^l \quad ?$$

Якщо підставити  $d\xi^k = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} du^i$ ,  $d\xi^l = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} du^j$ , то отримаємо

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 G_{kl} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Маємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Питання існування і єдиності її розв'язків є нетривіальним.

Але існують інші методи вирішення вказаного питання.

Додаток. Реалізація ріманових метрик

Нехай в області  $(u^1, u^2) \in \Omega$  задано білінійну диференціальну форму

$$g = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j$$

Припустимо, що вона є симетричною і додатно визначеною.

Чи існує регулярна поверхня  $F$ , параметризована координатами  $(u^1, u^2)$ , для якої перша фундаментальна форма співпадає з заданою диференціальною формою  $g$  ?

Аналітична інтерпретація: чи існує вектор-функція

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in \Omega,$$

така, що

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle ?$$

Маємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Питання існування і єдиності її розв'язків є нетривіальним.

Існують інші методи вирішення вказаного питання.