

Пр. (С. К. Бернштейн, 1916) Нехай $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ задає звно
задану мінімальну поверхню $(\mathbb{R}^2, \gamma)$ в E^3 . Якщо f
лінійна: $f(x, y) = ax + by + c$, тодіто поверхня є
афінною площиною.

Реш. Умову на мінімальність можна послабити.

► Отже, f задовольняє

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

Якщо сучасно є сфера з невідомою $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{cases} F_{xx} = \frac{1+f_x^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \\ F_{xy} = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \\ F_{yy} = \frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \end{cases} \quad (*)$$

Дісно, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+f_x^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right)$ (Бун.)

Потому наша F існує. При цьому

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (1+f_x^2 + f_y^2 + f_x^2 f_y^2 - (f_x f_y)^2) = 1.$$

Потому умова на F зветься рівняння Менна-Ампера.

Зокрема, цю розв'язку задовольняють наступні умови:

лем. Нехай $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ опукла, тоді $F_{xx} \geq 0$, $\overset{F_{yy} \geq 0}{\text{і}} F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 \geq 0$.
 Поді $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (z, \eta) = (x + F_x, y + F_y)$ -

диффеоморфізм.

$\Rightarrow$ 3 умови опуклості F , $\forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ф-ція

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto F((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

Є отримано :

$$\varphi''(t) = F_{xx}(P_t)(x_2 - x_1)^2 + 2F_{xy}(P_t)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + F_{yy}(P_t)(y_2 - y_1)^2 \geq 0,$$

де $P_t = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$ (форма ≥ 0 виконується), і маємо

$$\varphi'(0) \leq \varphi'(1)$$

$$F_x(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y_2 - y_1) \leq F_x(x_2, y_2)(x_2 - x_1) + F_y(x_2, y_2)(y_2 - y_1)$$
$$0 \leq (F_x(x_2, y_2) - F_x(x_1, y_1))(x_2 - x_1) + (F_y(x_2, y_2) - F_y(x_1, y_1))(y_2 - y_1) =: \delta$$

Нехай $\phi: (x_1, y_1) \mapsto (\xi_1, \eta_1), (x_2, y_2) \mapsto (\xi_2, \eta_2)$. Тоді

$$(\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x_1) + (\eta_2 - \eta_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \delta_{1/0}$$

Тобто за нерівністю К.Б.-Ш.

$$|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)|^2 \leq \langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1) \rangle \leq |(x_2 - x_1, y_2 - y_1)| \cdot |(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1)|.$$

Оскільки точки $P_1 = (x_1, y_1)$ і $P_2 = (x_2, y_2)$ різні, це означає, що ϕ - нестискаюче відображення:

$$0 < |P_2 - P_1| \leq |\phi(P_2) - \phi(P_1)|$$

Зокрема, $\phi(p_1) \neq \phi(p_2)$, тобто ϕ - ін'є.

Крім того, $\phi(\mathbb{R}^2)$ - замкнена у $\mathbb{R}^2$. Дійсно $\mathbb{R}^2 \setminus \phi(\mathbb{R}^2)$ не відкрита, тобто $\exists q \notin \phi(\mathbb{R}^2)$ така, що $\forall$ відкр. $U \ni q$, $U \cap \phi(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ (іншими словами, $q \in \overline{\phi(\mathbb{R}^2)} \setminus \phi(\mathbb{R}^2)$). Тоді $\exists$ посл.-сть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \phi(\mathbb{R}^2) : q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$; нехай $\forall n$ $q_n = \phi(p_n)$. Оскільки $|p_n - p_m| \leq |q_n - q_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, $\{p_n\}$ - ϵ -збігає група. і ~~збігає~~ ~~тільки~~ до $p \in \mathbb{R}^2$; з неперервності, $\phi(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(p_n) = q$.

З іншого боку, ϕ - лок. дифеоморфізм в околі $\forall$ точки, бо його Якобіан

$$(*) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & 1 + F_{yy} \end{vmatrix} = 1 + \underbrace{F_{xx}}_{\neq 0} + \underbrace{F_{yy}}_{\neq 0} + \underbrace{F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2}_{\neq 0} > 0.$$

Зокрема, тоді $\phi(\mathbb{R}^2)$ - відкрита у $\mathbb{R}^2$: $\forall q = \phi(p) \in \phi(\mathbb{R}^2)$ $\exists$ відкр. $U \ni p$, $V \ni q$: $\phi: U \rightarrow V$ - диф-зм; оскільки

$V \subset \Phi(\mathbb{R}^2)$, це відкр. окіл q у $\Phi(\mathbb{R}^2)$.

Отже, $\Phi(\mathbb{R}^2)$ - відкритою ~~множиною~~^{ен} у зв'язному $\mathbb{R}^2$ і $\neq \emptyset$.
 $\Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, тобто Φ - гом.

Оскільки Φ - відкр. і лок. дифео-зм в окіл $\forall$ точки, це дифео-зм ($\Phi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ виводиться з лок. дифео-змовності в окіл $\forall$ точки, це лок. властивість). $\triangle$ (лем.)

Позначимо $z := x + iy$ і інтерпретуємо тепер Φ з лем. як відобр. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto z = (x + F_x) + i(y + F_y)$.

З іншою баж., розглянемо $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto (x - F_x) - i(y - F_y)$.

Нарешті, визначимо $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : w := \Psi \circ \Phi^{-1}$. Перевіримо, що це голоморфна ф-ція (очевидно, вона мала).

З виразу (*) для якобіана Φ і рівн. М.-А. $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 + F_{xx} + F_{yy}} \begin{pmatrix} 1 + F_{yy} & -F_{xy} \\ -F_{xy} & 1 + F_{xx} \end{pmatrix} - \text{м. якобі } \Phi^{-1}.$$

(мым, збачаюно, други похигни - це намножити з ϕ^{-1}). Тоді

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (x - F_x) = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} - F_{xx} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} - F_{xy} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2 + F_{xx} + F_{yy}} (1 + F_{yy} - F_{xx}(1 + F_{yy}) - F_{xy}(-F_{xy})) = [\text{побр. М.-А.}] = \frac{F_{yy} - F_{xx}}{2 + F_{xx} + F_{yy}}.$$

У ан-но,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (y + F_y) = -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + F_{yx} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + F_{yy} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2 + F_{xx} + F_{yy}} (1 - F_{xx} - F_{xy}^2 + F_{yy} + F_{xx}F_{yy})$$

$$= \frac{F_{yy} - F_{xx}}{2 + F_{xx} + F_{yy}} = \bullet \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (x - F_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (x - F_x) = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} - F_{xx} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} - F_{xy} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2 + F_{xx} + F_{yy}} \bullet (-F_{xy} + F_{xx}F_{xy} - F_{xy} - F_{xx}F_{xy})$$

$$= \frac{-2F_{xy}}{2 + F_{xx} + F_{yy}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (-y + F_y) = -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + F_{yx} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + F_{yy} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2 + F_{xx} + F_{yy}} (F_{xy} + F_{xy} + F_{xx}F_{xy} - F_{xy})$$

$$= \frac{2F_{xy}}{2 + F_{xx} + F_{yy}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (x - F_x)$$

Отже, w дійсно голоморфна, і її комплексна похідна:

$$w'_z = \frac{\partial}{\partial z} (x - F_x) + i \frac{\partial}{\partial z} (-y + F_y) = \frac{F_{yy} - F_{xx} + 2i F_{xy}}{2 + F_{xx} + F_{yy}}$$

Нам потрібно w' - не є голоморфною, причому

$$|w'|^2 = \frac{1}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2} \left(F_{yy}^2 + F_{xx}^2 - \frac{2F_{xx}F_{yy} - 4F_{xx}F_{yy}}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2} + 4F_{xy}^2 \right) = [\text{ribn. M. - A.}] =$$

$$= \frac{1}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2} \left((F_{xx}+F_{yy})^2 - 4 \right) = \frac{F_{xx}+F_{yy}-2}{F_{xx}+F_{yy}+2} < 1.$$

3a Th. Iybiuila, mogi w' nociuina : $w' = c \in \mathbb{C}$.

Ale, ockirau

$$1+w' = 2 \frac{1+F_{yy}+iF_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}} \Rightarrow |1+w'|^2 = \frac{4}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2} (1+2F_{yy}+F_{yy}^2+F_{xy}^2) = [\text{ribn. M. - A.}] =$$

$$\frac{4}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2} F_{yy} (2+F_{yy}+F_{xx}) = \frac{4F_{yy}}{2+F_{xx}+F_{yy}},$$

i an-no

$$1-w' = 2 \frac{1+F_{xx}-iF_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}} \Rightarrow |1-w'|^2 = \frac{4F_{xx}}{2+F_{xx}+F_{yy}},$$

$$i \quad 1-|w'|^2 = \frac{4}{2+F_{xx}+F_{yy}}, \text{ maemo!}$$

$$F_{xx} = \frac{1-|w'|^2}{1-|w'|^2} = C_1 \in \mathbb{R}$$

$$F_{yy} = \frac{1+|w'|^2}{1-|w'|^2} = C_2 \in \mathbb{R},$$

а моги і $F_{xy} = \pm \sqrt{F_{xx}F_{yy} - 1} = C_3 \in \mathbb{R}$ (за неперервності)
 Моги з (*), F_x^2 і F_y^2 - розв'язки системи
 вважати як рівнянь з постійними коеф., за неперервн.,
 це константи, отже, f лінійна. $\triangle$

Рем. Інше твердження гув. у Colding - Minicozzi. Також
 тверго, що:

Тл. 1. (Бернштейн, De Giorgi, Аллен, Саймонс, 1916-1968).

Якщо $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задов. мінімальну нереровність у
 E^{n+1} при $2 \leq n \leq 7$, то f лінійна.

2. (Бернштейн - De Giorgi - Діагеті, 1969)

Для $n \geq 8$ $\exists f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, що задов. мін. нереровність
 у E^{n+1} і не є лінійною.

Рем. Зокрема, така q -ція $\exists$ серед q -цій вигляду
 $(x^1, \dots, x^8) \mapsto g(\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^4)^2}, \sqrt{(x^5)^2 + \dots + (x^8)^2})$.

Друга варіація об'єму і стійкість

Рн (Загальні формули варіації об'єму).

Нехай (M, γ) - n -вимірний $(m.)$ підповерхня у $(\bar{M}, \bar{g})$, орієнтований, $\sigma : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ - його варіація з (пудовним) носієм $\mathcal{Q}$, тобто $\sigma(\cdot, 0) = \gamma$ за носієм $\text{Int } \mathcal{Q}$ $\forall \varepsilon$. γ позначенням, введемо вище:

1 Перша варіація об'єму $\mathcal{Q}$ має вигляд

$$\delta \text{Vol}(\mathcal{Q}) = - \int_{\mathcal{Q}} \bar{g}(\gamma^\perp, nH) dV_\gamma,$$

де g - I ф.ф. (M, γ) , H - його поле середньої кривини,
 $\gamma = \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \Big|_{s=0}$.

2 Якщо (M, γ) мінімальний ($H=0$), а варіація нормальна (тобто γ - нормальне поле: $\gamma^T = 0$), то друга варіація об'єму $\mathcal{Q}$ має вигляд

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{Q}) = \int_{\mathcal{Q}} \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i}^\perp \gamma, \nabla_{E_i}^\perp \gamma) - \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j), \gamma)^2 \right) dV_\gamma -$$

$$- \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(E_i, Y)Y, E_i) dV_g, \quad \left(\text{переставити пари аргументів місцями (або) поміняє } E_i \text{ на } \chi_*(E_i) \right)$$

де $\{E_i\}_{i=1}^n$ - лок. ортонорм. репер (M, g) , χ - II ф.ф. (M, χ) , $\nabla^\perp$ - пог. нормальна зв'язність, $\bar{R}$ - тензор кривини $(\bar{M}, \bar{g})$.

► Виход. позначення як раніше: $\forall z \in (-\varepsilon, \varepsilon) \chi_z := \sigma(\cdot, z)$ - закручення M у $\bar{M}$, $g_z := \chi_z^* \bar{g}$ - пог. I ф.ф. Зокрема, $\chi_0 = \chi$ і $g_0 = g$. На відкр. околі u т. $p \in M$ нехай $(u^1, \dots, u^n)$ - лок. коорд. M (у зв'язі з ориєнтацією), $\{E_i\}_{i=1}^n$ - ортонорм. репер, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ - ортонорм. репер норм. полів. Як і у одному з наших зведень, $\Phi_z := \sqrt{\det g_z} \sqrt{\det g_0^{-1}}$ (де g_z - лок. n -га Грама g_z) - коректно визначена p -сія, і

$$\delta \text{Vol}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d\Phi_z}{dz} \Big|_{z=0} dV_g,$$

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^2 \Phi_z}{dz^2} \Big|_{z=0} dV_g.$$

Дад $G_z = ((g_z)_{i\bar{j}})_{i,\bar{j}=1}^n \underbrace{(\text{т. } G_z^{-1} = ((g_z)^{i\bar{j}})_{i,\bar{j}=1}^n)}_{\text{гачи нормалнаго пром.}}$

$$\frac{d}{dz} \varphi_z = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det G_z}} \frac{d}{dz} \det G_z \sqrt{\det G_0^{-1}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{d}{dz} (g_z)_{i\bar{j}} \right) (g_z)^{i\bar{j}}}_{\text{гачи нормалнаго пром. } (g_z)^{i\bar{j}}}$$

$\cdot \underbrace{\sqrt{\det G_z} \sqrt{\det G_0^{-1}}}_{\varphi_z} \quad (\text{Внпр.})$

Прогі

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_z = \frac{1}{2} (g_z'')_{i\bar{j}} (g_z)^{i\bar{j}} \varphi_z + \frac{1}{2} (g_z')_{i\bar{j}} (g_z')^{i\bar{j}} \varphi_z + \frac{1}{4} ((g_z')_{i\bar{j}} (g_z)^{i\bar{j}})^2 \varphi_z$$

Кесам лок. коорд. обрано так, що у P $G_0 = G_0^{-1} = I$.

Прогі, зокрема

$$\frac{d}{dz} \varphi_z \Big|_{z=0} (P) = [\varphi_0 = 1] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g_0')_{i\bar{i}} (P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dz} \left(g_z \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \right) \right)$$

$$\Big|_{z=0} (P) = \sum_{i=1}^n g_z \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \right) \Big|_{z=0} (P) = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_Y X_i, X_i \right) (P) \quad \textcircled{c}$$

Пит ∇ - зв'язність, що індукована на $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

визображенням $\bar{g}$ (зокрема, її обмеження на $M \times \{0\}$ - рівнова зв'язність g_z),

$\bar{\nabla}$ - нрм. зв'язність $\bar{g}$, $X_i = \partial_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \Big|_{x=0}$, $i=1, \dots, n$

$\bar{\nabla}_Y X_i$ розуміємо інваріантні вектори вгортаються в нрм. нрм. зв'язності, $\bar{\nabla}_Y X_i - \bar{\nabla}_{X_i} Y = \partial_x \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right] \right) = 0$: $[Y, X_i] = 0$ - функція, яка вгортається.

$$\textcircled{=} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} Y, X_i)(p) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} Y^T, X_i) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} Y^\perp, X_i) \right)(p)$$

$$(p) = \left[Y^T \text{ ортогонально до } T_p M \text{ (вектори } Y^T \text{ та } X_i \text{ вгортаються в нрм. зв'язності, } \bar{g}(X_i, Y^\perp) = 0 \text{)} \right] = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y^T, \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y^\perp, \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(p)$$

$$- \bar{g}(Y^\perp, \bar{\nabla}_{X_i} X_i)(p) = \left[\text{розкр. Тейлора} \right] = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y^T, \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(p) - \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(B \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right), Y^\perp \right)(p)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{ортогональн. вектори } Y^T \text{ та } Y^\perp \\ \text{вгортаються, що дає } \{E_i\}_{i=1}^n \end{array} \right] = \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i} Y^T, E_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_i), Y^\perp) \right)(p) = \text{div } X(p)$$

Впр. Для поля X на M $\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i} X, E_i) = \text{div } X$ (для ортогонал. вектора $\{E_i\}_{i=1}^n$). Вивести з формули Стокса, що

$$\int_D \text{div } X dV_g = \int_{\partial D} g(X, \nu) dV_{g|_{\partial D}} \quad \text{де } \nu: \partial D \rightarrow M \text{ - виведення,}$$

∂D (вгортається в ∂M і має менше розмірності),
 ν - нрм. поле ∂D . Як $\text{div } X$ виводиться з лок. коорд.?

За Впр. і лб. M , маємо (за необхідності розгля-

выбравши такие координаты, в которых имеем метрику:

$$\frac{d}{ds} \varphi_3|_{s=0} = \operatorname{div} Y^T - \bar{g}(nH, Y^\perp).$$

Оскільки $Y=0$ на ∂D , з Леммы Стеркса:

$$\delta \operatorname{Vol}(D) = \int_D \frac{d}{ds} \varphi_3|_{s=0} dV_g = - \int_D \bar{g}(nH, Y^\perp) dV_g. \quad (1)$$

(заметим, что 0 — вариация $\Leftrightarrow H=0$).

Повернемся до другой похвальной φ_3 , знову беремо $G_0 = G_0^{-1} = I$ у р. Несаї, крім того, $H=0$ і $Y^T=0$.

$$\frac{d^2}{ds^2} \varphi_3|_{s=0}(P) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g_0'')_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (g_0')_{ij} (g_0')^{ij} + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n (g_0')_{ii} \right)^2 \right)_{(P)}$$

Поглядаючи далі, бачимо, що $\frac{1}{4} \left(\frac{d}{ds} \varphi_3|_{s=0}(P) \right)^2 = 0$ з отриманої вище ф.-м і умов $H=Y^T=0$. Диференціюючи за s

умову $(g_s)_{ij} (g_s)^{ik} = \delta_i^k$, маємо $(g_s')_{ij} (g_s)^{ik} + (g_s)_{ij} (g_s')^{ik} = 0$, тому при $s=0$ і у р маємо

$$(g_0')_{ij}(P) \delta^{jk} + \delta_{ij} (g_0')^{jk}(P) = 0 \Rightarrow (g_0')^{ik}(P) = -(g_0')_{ik}(P)$$

$\forall i, k = \overline{1, n}$. Аналогично го обчислення $(g_0'')_{ii}(P)$ вище, маємо:

$$\begin{aligned}
 (g_0')_{ij}(P) &= \frac{d}{ds} g_3 \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \Big|_{s=0} (P) = \left(g_3 \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + \right. \\
 &+ \left. g_3 \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right) \Big|_{s=0} (P) = \left(\bar{g} \left(\bar{\nabla}_Y X_i, X_j \right) + \bar{g} \left(-X_i, \bar{\nabla}_Y X_j \right) \right) \Big|_{s=0} (P) = \\
 &= \left(\bar{g} \left(\bar{\nabla}_{X_i} Y, X_j \right) + \bar{g} \left(X_i, \bar{\nabla}_{X_j} Y \right) \right) (P) = \left[\begin{array}{l} Y = Y^\perp - \text{нормальне, тому} \\ \bar{g}(X_i, Y) = \bar{g}(X_j, Y) = 0 \end{array} \right] = \\
 &= - \left(\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{X_i} X_j) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_j} X_i, Y) \right) (P) = \left[\begin{array}{l} \text{формула Тейлора} \\ \text{симетричність } B \end{array} \right] = \\
 &= -2 \bar{g} \left(B \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right), Y \right) (P) = -2 \bar{g} \left(B(E_i, E_j), Y \right) (P) \quad (\forall i, j = \overline{1, n})
 \end{aligned}$$

Випр. $\sum_{i,j=1}^n \bar{g} \left(B(E_i, E_j), Y \right)^2$ повністю визначена (не залежить від вибору ортонури. перера).

Отже, другий головний $y \cdot \frac{d^2}{ds^2} \varphi_3 \Big|_{s=0} (P)$ - це

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left((g_0')_{ij}(P) \right)^2 = -2 \sum_{i,j=1}^n \bar{g} \left(B(E_i, E_j), Y \right)^2 (P).$$

Нарешті, перший головний:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g_0'')_{ii}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} g_3 \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \right) \Big|_{s=0} (P) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} \left(g_s \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \Big|_{s=0} (p) = \sum_{i=1}^n g_s \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \Big|_{s=0} (p) + \\
&+ \sum_{i=1}^n g_s \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \Big|_{s=0} (p) = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_Y X_i, X_i \right) (p) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_Y X_i, \bar{\nabla}_Y X_i \right) (p) = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_i} Y, X_i \right) (p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{X_i} Y, \right. \\
&\left. \bar{\nabla}_{X_i} Y \right) (p) = \left[\begin{array}{l} \text{деф. } \bar{R} : [\bar{X}_i, \bar{Y}] = 0, \\ \text{показ. Бейдманнера} \\ \text{на норм. поле } Y \end{array} \right] = \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{R}(Y, X_i) Y, X_i \right) (p) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{X_i} \bar{\nabla}_Y Y, X_i \right) (p) + \sum_{i=1}^n g \left(A_Y \frac{\partial}{\partial u^i}, A_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y, \right. \\
&\left. \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y \right) (p) = - \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{R}(Y, X_i) X_i, Y \right) (p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{X_i} \left((\bar{\nabla}_Y Y)^T \right), X_i \right) (p) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{X_i} \left((\bar{\nabla}_Y Y)^\perp \right), X_i \right) (p) + \sum_{i,j=1}^n g \left(A_Y \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)^2 (p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y, \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y \right) (p)
\end{aligned}$$

1. симметрич. у р
 2. год. - показ. Тейлора
 3. год. - $\bar{g}(X_i, \bar{\nabla}_Y Y) = 0$
 4. год. - 36.2.2. А.Б.

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{R}(Y, E_i) E_i, Y \right) (p) + \sum_{i=1}^n g \left(\nabla_{E_i} (\bar{\nabla}_Y Y)^T, E_i \right) (p) - \\
&- \sum_{i=1}^n \bar{g} \left((\bar{\nabla}_Y Y)^\perp, B(E_i, E_i) \right) (p) + \sum_{i,j=1}^n \bar{g} \left(B(E_i, E_j), Y \right)^2 (p) + \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{E_i} Y, \bar{\nabla}_{E_i} Y \right) (p)
\end{aligned}$$

$\nabla_{E_i}^\perp Y)(p) \left(\prod_{i=1}^n \bar{\nabla}_{Y_i} Y : p' \mapsto (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y})_{\pi(p)}, \text{ де } \bar{Y} - \text{лос. продовження } Y - \text{поля на } M' \right)$

Оскільки $\sum_{i=1}^n B(E_i, E_i) = nH = 0$, годуючи вирази для першого і другого годуючих у ф-лі для $\frac{d^2}{dz^2} \Phi_3|_{z=0}$ (і розкладаючи інші лос. коорд. у околі інших точок), маємо:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Phi_3|_{z=0} = -\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(Y, E_i) E_i, Y) + \text{div}(\bar{\nabla}_Y Y)^T - \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j), Y)^2 + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i}^\perp Y, \nabla_{E_i}^\perp Y).$$

Погляди за Th. Стокса маємо 2:

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i}^\perp Y, \nabla_{E_i}^\perp Y) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(Y, E_i) E_i, Y) - \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j), Y)^2 \right) dV_g$$

(1)
 не залежить від вибору лос. репера (впр.)

Сл. (M, g) мінімальний $\Leftrightarrow \forall$ будь-якої $\mathcal{D} \subset M$ $\forall$ виразі з носієм $\mathcal{D}$ $\delta \text{Vol}(\mathcal{D}) = 0$.

$\Rightarrow$ очевидно з 1, $\Leftarrow$ $\exists p \in M : H_p \neq 0$. Погляди продовження H_p нормальним полем Y на окіл p так, щоб $Y|_{M \setminus \text{int } \mathcal{D}} = 0$ і $\bar{g}(H, Y) \geq 0$ (звичайно, $Y|_M$ та p ще > 0) для якоїсь будь-якої $\mathcal{D}$. Побудуємо

Варіацію, що відповідає такому γ (див. Рем. п'яте), має
для неї $\pm \delta \text{Vol}(\mathcal{D}) < 0$. $\Downarrow \triangle$

Рем. Шосте γ - (м.) нормальне поле на M з компактним
посієм (тобто $\text{supp } \gamma$ - компакт). Тоді існує кубовна $\mathcal{D}$:
 $\text{supp } \gamma \subset \text{Int } \mathcal{D}$ (просто покривемо $\text{supp } \gamma$ скінч. кількістю
 $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^m$ - образів замкн. еवल. кубу при коорд. відобра-
женнях; тоді $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ - кубовна) і варіація $\mathcal{B}$ з посієм $\mathcal{D}$:
 $\mathcal{B}_* \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \gamma$. Її можна побудувати, наприклад, за допо-
могою лок. коорд.: $\mathcal{B}^a(u^1, \dots, u^n, z) := x^a(u^1, \dots, u^n) + z \gamma^a(u^1, \dots, u^n)$
для $a = \overline{1, n+q}$, де x^a - a -та коорд. ф-ція лок.
задання γ , і $\gamma = \gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (Впр. $\exists \varepsilon > 0$ таке, що
для $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\mathcal{B}(\cdot, z)$ - закривка; тут достатньо
розглянути скінченну кількість пар локальних систем
коорд. (карт), бо $\text{supp } \gamma$ - компакт, а за його межами $\mathcal{B}(\cdot, z) = \gamma$).

Або можна використати рекурентні: $G(p, q) = \exp_{p(p)}(q \cdot p)$
(де $\exp$ - експон. вигляд (M, g)) (Винн перевірити).

Вопр. $\forall$ ор-ции $f \in C^\infty(M)$ на рим. мн. (M, g) и каноничн

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i} E_i(f)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad \underbrace{(\operatorname{grad} f)}_{\text{ор-ция } f},$$
 где $\{E_i\}_{i=1}^n$ (локальнн) ортоном. Базис полев, а $\operatorname{grad} f \in \mathcal{H}(M)$ -поле, что вынуждено условием $g(\operatorname{grad} f, X) = X(f) \forall X \in \mathcal{H}(M)$
 (звгнн можно вывести, что $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i$).

тут $\{E_i\}_{i=1}^n$ - ортонорм. баз. векторів (M, g) .

Впр. Перевірити коректність (аналогічно до звичайного лапласіана).

Сол. Друга варіація об'єм $\mathcal{Q} \subset M$ відносно метрики (M, g) для перм. варіації, що задається полем Y :

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{Q}) = - \int_{\mathcal{Q}} \bar{g}(Y, LY) dV_g, \text{ де}$$

$$LY := \Delta^\perp Y + \sum_{i=1}^n (\bar{R}(Y, E_i)E_i)^\perp + \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j), Y) B(E_i, E_j),$$

деб. (або оператором стійкості), S_Y (інвариант наз. опера-
тором Саймонса)

L звуть оператором Якобі, а поля Y з $LY=0$ - полями Якобі.

Рем. Пол. з полями Якобі згодом є геодезичними.

Рем. Позначимо $\mathcal{N}_0 M$ - простір (над $\mathbb{R}$) гладких нормальних полів (M, g) з компактним носієм (очевидно,

$\forall Y, Z \in \mathcal{N}_0 M, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda Y + \mu Z \in \mathcal{N}_0 M$). Тоді кожен з доданків у виразі для L і він сам - лінійні

оператори $N_0 M \rightarrow N_0 M$.

def. $I_D : N_0 M \times N_0 M \rightarrow \mathbb{R} : Y, Z \mapsto I_D(Y, Z) := - \int_D \bar{g}(Y, LZ) dV_g$

наз. індексною формою $D \subset M$. Rem. Як-но індексний ф. роздільності.

Rem. Оскільки $Y, Z \in N_0 M$, вона визначена і для D з нехвост. $\bar{D}$ (але $2D$ неорг. між 0), зокрема, для $D = M$.

Очевидно, це білінійна форма.

з $\text{supp } Y, \text{supp } Z \subset \text{int } D$

Впр. I_D симетрична: $I_D(Y, Z) = I_D(Z, Y) \quad \forall Y, Z \in N_0 M$

(іншими словами, L самоспрямлений вогн. скалярного добутку $\int_D \bar{g}(\cdot, \cdot) dV_g$).

def. Нехай (M, g) - мін. підмноговид y $(\bar{M}, \bar{g})$. Кубовна

$D \subset M$ наз. стійкою, якщо $\delta^2 \text{Vol}(D) \geq 0 \quad \forall$  нормаль-

ні варіації з носієм D . (M, g) наз. стійким,

якщо кожна кубовна $D \subset M$ стійка.

Rem. Очевидно D_1 нестійка і $D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2$ нестійка.

Лем. (M, g) стійкий $\Leftrightarrow I_M$ невід'ємно визначена
 тобто $\forall Y \in \mathcal{N}_0 M \quad I_M(Y, Y) \geq 0$ (і нав'язуючи $Y \in \text{Int } \mathcal{D}$).

$\Rightarrow$ Дійсно, для Y з $\text{supp } Y \subset \text{Int } \mathcal{D}$, то $\text{fign. variations } \mathcal{B}$,

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{D}) = I_{\mathcal{D}}(Y, Y) = I_M(Y, Y) \geq 0.$$

Звідси маємо $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ викликає з $\exists$ variations $\forall Y \in \mathcal{N}_0 M$

в силу Лем. вище. $\triangle$ Лем. Далі позначимо $\mathcal{D}$ (fign. (M, g)) стійк.,
 якщо $I_{\mathcal{D}}(\text{fign. } I_M) \geq 0$ визначена нав'язуючи для неперетовності.

Ex 1. Чи підготовили, що мінімізують об'єм $\in M$ (зокрема

явно задані інтегровальні над оточеною $U \subset \mathbb{R}^n$) стійкі

(просто з Лем.)

можі об'ємності
 але ~~якщо $\mathcal{D}$ не є компактним, то не можна інтерпретувати~~ кудові $\mathcal{D}$, що
 є компактні, тобто по них можна інтерпретувати

2. Вилком геодезичні підготовили у просторі з
 $\bar{R} = 0$ (тобто лок. ізотричних E^{n+q} , зокрема області

аф. підпросторів E^{n+q}) : для них $L = \Delta^\perp$, і

$$I_M(Y, Y) = - \int_M \bar{g}(Y, \Delta^\perp Y) dV_g = \left[\text{див. вище} \right] = \int_M \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i}^\perp Y, \nabla_{E_i}^\perp Y) \right) dV_g \geq 0.$$

$\forall Y \in \mathcal{N}_0 M.$

(і ан-но для цілом позначення у множині ≤ 0 сень кривини - Ранж.)
def. $\lambda \in \mathbb{R}$ зветься власним значенням (Dirichle) L ,
 якщо $\exists 0 \neq Y \in W_0 M$ такє, що
 $LY + \lambda Y = 0$ (задача Dirichle).

Р. Якщо у L існує власне значення $\lambda < 0$, то (M, γ) нестатичний.
 $\Rightarrow$ Для sign. поля $Y \neq 0$
 $\int_M (Y, Y) = - \int_M \bar{g}(Y, -\lambda Y) dV_g = \lambda \int_M \underbrace{\bar{g}(Y, Y)}_{\geq 0} dV_g < 0.$ $\triangle$

Рем. Можна поповнити $W_0 M$ за допомогою атлора
 норми Соболева і отримати гільбертовий простір; тоді
 для компактного самоспр. оператора L на цьому вірту
 спектральна теорема: $\exists$ зліченний набір власних значень
 $\{\lambda_m\} \subset \mathbb{R}$, і sign. поля утворюють ортонорм. базис.
 Кількість від'ємних власних значень тоді зветься
 індексом Морса (M, γ) (або $\mathcal{D}$ для $W_0 \mathcal{D}$). З Р. вище,
 або найбільша вимірність підпростора, на якому $\int_M < 0$

якщо $\text{Vol} \neq 0$, (M, γ) нестінчастий. Виявляється, що
 Vol і обернене: якщо $\text{індекс Корса} = 0$ ^(тоді $\text{Vol} = 0$), то (M, γ)
 стінчастий (випливає з того, що власні поля γ тв. Гаусс).
 Аналогічне поняття індекса Корса $\exists$ і для геодезичних
 (крив., наприклад, Еулер-Замаллер; згідно з Th. про індекс,
 Vol дер. кількості стрілецької точок го даної). Інше
 на нульовий індекс Корса переформулювати так:

Рл. (M, γ) стінчастий $\Leftrightarrow$

$$\lambda_1(L) := \inf \left\{ \int_M \langle Y, Y \rangle \mid Y \in \mathcal{V}_0 M : \int_M \bar{g}(Y, Y) = 1 \right\} \geq 0.$$

► Див. Colding-Minicozzi; $\lambda_1(L)$ - це перше (min)
 власне значення L (на пов'язанні $\mathcal{V}_0 M$). $\triangle$

Рем. Якщо тепер (M, γ) - крив. гіперповерхня, і на
 нульовій $\mathcal{D} \subset M$ $\exists$ одностороннє нормальне поле ξ
 (закре), тоді $|\xi| = 1$ (тут $|\xi| = \sqrt{\bar{g}(\xi, \xi)}$). Тоді

для $\forall$ норм. поля Y с $\text{supp } Y \subset \text{int } \mathcal{D}$ $Y|_{\mathcal{D}} = w\xi$
 для $w \in C^\infty(\mathcal{D})$ (поле прообразов нуля, тогда w —
 главная φ -ча на M). Для гаджета LY имеем:

$$\Delta^\perp Y = \sum_{i=1}^n \left(\nabla_{E_i}^\perp \nabla_{E_i}^\perp (w\xi) - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp (w\xi) \right) = \left[\begin{array}{c} \text{вектор. } \nabla^\perp \\ i \quad \nabla^\perp \xi = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \sum_i \left(\nabla_{E_i}^\perp (E_i(w)\xi + w \nabla_{E_i}^\perp \xi) - \nabla_{E_i} E_i (w)\xi - w \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp \xi \right) = \sum_i (E_i(E_i(w))\xi +$$

$$+ E_i(w) \nabla_{E_i}^\perp \xi - \nabla_{E_i} E_i (w)\xi) = \Delta w \xi$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{R}(Y, E_i) E_i)^\perp = \sum_i \bar{g}(\bar{R}(w\xi, E_i) E_i, \xi) \xi = \left[\begin{array}{c} \{d\varphi(E_1), \dots, d\varphi(E_n), \xi_p\} \\ \text{симметрич. тензор} \\ T_x(p)M \quad \forall p \in M \end{array} \right]$$

$$= \bar{\text{Ric}}(w\xi, \xi) \xi \quad (\text{норм } \bar{\text{Ric}} - \text{тензор Риччи } (\bar{M}, \bar{g})) :$$

$$\bar{\text{Ric}}(X, Y) = \sum_{a=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{R}(X, F_a) F_a, Y) \quad \text{у нас } F_a = \begin{cases} d\varphi(E_a), & a=1, \dots, n \\ \xi, & a=n+1 \end{cases}$$

$$\bar{g}(\bar{R}(w\xi, \xi) \xi, \xi) = 0. \quad \text{для симметрич. тензора } \{F_a\}_{a=1}^{n+1}$$

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j) w\xi) B(E_i, E_j) = \left[\begin{array}{c} \text{вычисляемо} \\ \text{скалярный т.ф.ф.} \\ b: B = b\xi \end{array} \right] = \sum_{i,j=1}^n w b(E_i, E_j)^2 \xi$$

(SY)

def. $\sum_{i,j=1}^n b(E_i, E_j)^2 =: |b|^2$ будею звати квадратом норми

Rem. Коректність виводиться з Впр. вище. Очевидно, $|b|^2 \geq 0$ і $|b|^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$, тобто (M, γ) є плоскою.
Впр. Записати $|b|^2$ в лок. коорд. $\{ad\mathcal{O}(\mathcal{D}, \gamma)\}$

Ex. При $n=2$ позначимо $b_{ij} := b(E_i, E_j)$; тоді

$$|b|^2 = b_{11}^2 + b_{22}^2 + 2b_{12}^2 = \left[H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 b(E_i, E_i) = 0 \right] = 2(b_{11}^2 + b_{12}^2) = -2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = -2K_{ext}$$

гауссова кривина (M, γ) (зауваження $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1$ у такій позначеннях). Звичайно, $K_{ext} = k_1 k_2 = -k_1^2 \leq 0$ для мінімальних

Сох. $L(w\xi) = (\Delta w + (\overline{Ric}(\xi, \xi) + |b|^2)w)\xi =: Lw \cdot \xi$,

де $L: C^\infty(\mathcal{D}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{D})$; у цих позначеннях

$$I_{\mathcal{D}}(v, w) = I_{\mathcal{D}}(v\xi, w\xi) = - \int_{\mathcal{D}} \bar{g}(v\xi, Lw \cdot \xi) dV_g = [| \xi | = 1] = - \int_{\mathcal{D}} v \cdot Lw dV_g$$

і для віртуальної варіації $\delta^2 Vol(\mathcal{D}) = I_{\mathcal{D}}(w, w)$

Rem. Дати розглядати інерновесні (M, γ) у $(M, \bar{g})$,
 для яких існує модальне значення нормального поля