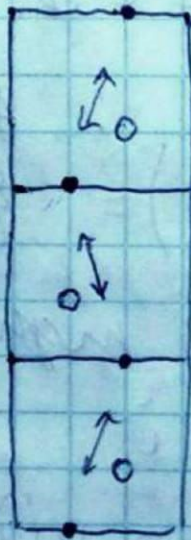


34.5 Ан-но до 34.4 :

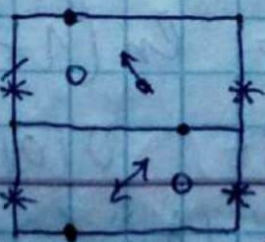
41.10x(3) Усі класи ізоморфізмів на-  
прямі з фігм. точкою лежать  
Медіза  $Y$  фігмифікаторів під-  
групам  $\Pi_1(Y, y) \cong \mathbb{Z}$ , тобто  $n \in \mathbb{Z}$   
 $\mathbb{Z}$ . При парному  $n > 0$  це напр.  
як у 34.4, при непарному - як у  
34.5  $\mathbb{Z}$  - тривіальне,  $\{0\}$  - універс.  
напр. снугою  $I \times \mathbb{R}$ .



факторизуємо за показ-  
ного гісто  $\mathbb{Z}_3$

$$/ \sim : \text{~~XXXX~~} (x, 0) \sim (1-x, 3)$$

34.6 Тем ан-но до 34.4 :



факторизуємо за  
гісто  $\mathbb{Z}_2$

$$/ \sim : \begin{aligned} (x, 0) &\sim (x, 1) \\ (0, y) &\sim (1, y) \end{aligned}$$



35.6. Отмечая, что  $(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, p)$ , где  $p: z \mapsto e^z$  многозначна,  $f: t \mapsto z - t$   $z$  нормальна и  $\ln z + 2\pi i k \in \tilde{f}: t \mapsto \ln(z - t) + 2\pi i k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Абсолютно верно  $g(t) = (1+t)e^{2\pi i t}$ :  $g(0) = 1 = f(1)$  (и  $g(1) = z = f(0)$ ),  $p^{-1}(1) = \{\ln 1 + 2\pi i k\} = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Пусть  $\tilde{g}(t) = u(t) + i v(t)$  задает непрерывную  $z$  нормальную и  $2\pi i k$ , то  $u(0) = 0$ ,  $v(0) = 2\pi k$ , и

$$(1+t) \cos 2\pi t + i (1+t) \sin 2\pi t = g(t) = p(\tilde{g}(t)) = e^{u(t)} \cos v(t) + i e^{u(t)} \sin v(t)$$

$$1+t > 0 \Rightarrow 1+t = e^{u(t)} \Rightarrow u(t) = \ln(1+t) \text{ (поскольку } u(0) = 0 \text{)}.$$

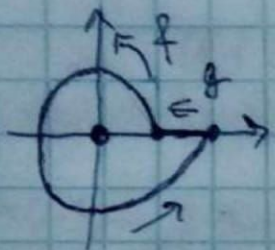
$$\cos v(t) = \cos 2\pi t, \sin v(t) = \sin 2\pi t, v(0) = 2\pi k \Rightarrow v(t) = 2\pi(t+k).$$

$$\text{Отсюда, } \tilde{g}(t) = \ln(1+t) + 2\pi(t+k)i.$$

$\forall k \quad \tilde{f}(1) = 2\pi i k = \tilde{g}(0) \Rightarrow \tilde{f} \neq \tilde{g}$  в значении  $i \in$  непрерывная



$\gamma$  — покриття з початком у  $\ln 2 + 2\pi k i$ ,  
 $f * g$ . Але  $f * g$  — не є петлею у  $Z$  а  $\tilde{f} * \tilde{g}$  — не є петлею!  
 $\tilde{f} * \tilde{g}(1) = \tilde{g}(1) = \ln 2 + 2\pi(1+k)i \neq \ln 2 + 2\pi k i = \tilde{f}(0) = \tilde{f} * \tilde{g}(0)$ .  
 Це означає, що  $f * g$  має нетривіальний гомотопічний клас:



Різноманітність не є  $f * g$  з початком у  $2\pi k i$  є  $\tilde{g} * \tilde{f}'$ ,  
 де  $\tilde{f}'(0) = \tilde{g}(1) = \ln 2 + 2\pi(1+k)i$ , маємо  $\tilde{f}'(t) = \ln(2-t) + 2\pi(1+k)i$ ,  
 $\tilde{g} * \tilde{f}'(1) = \tilde{f}'(1) = 2\pi(1+k)i \neq \tilde{g} * \tilde{f}'(0)$ .

40.2.  $(X, Y, p)$  — покриття,  $X$  — лн. зв.,  $\pi_1(X) \neq \{e\} \Rightarrow$   
 $\pi_1(Y) \neq \{e\}$ .

Це наслідок л. 9.1. Лемми:  $\forall x \in X : y = p(x) \in Y$   
 $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  — ін'єкція, маємо  $\pi_1(X, x) \cong p_*^{-1}(\pi_1(Y, y))$   
 не трив.  $\Rightarrow \pi_1(Y, y)$  не трив.

Але можна було передбачити і безпосередньо.



Дог. завдання 3. Довести, що не існує накрива  $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1, p) \rightarrow (\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^2, q)$

І спосіб. Як зазначалося,  $\forall x \in \mathbb{R}P^2$   $p_*: \pi_1(\mathbb{R}P^2, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1, p(x))$  -

інж. мор-зм, подімо із-м на образ. Тоді у  $\pi_1(\mathbb{R}P^1, p(x)) \cong \mathbb{Z}$  (бо  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ )  $\exists$  підгрупа, ізоморфна  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x) \cong \mathbb{Z}_2$ , зокрема для її елемента  $[f] \neq [e_{p(x)}]$   $[f]^2 = [e_{p(x)}]$ , що не може бути у гр.  $\cong \mathbb{Z}$ .

Ан-но,  $\forall x \in \mathbb{R}P^1$   $q_*: \pi_1(\mathbb{R}P^1, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2, q(x))$  - із-м на образ, подімо у гр.  $\cong \mathbb{Z}_2$  (з 2-ел-ми)  $\exists$  підгр.  $\cong \mathbb{Z}$  (зліченна).  $\downarrow$

II спосіб. За л. 12.4 лемми, многовид може накривати мно-  
говид лише тоді не вимірності. Тим  $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^2$  - многовиди,  
 $\dim \mathbb{R}P^1 = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}P^2$ , тому накрива  $\nexists$ .

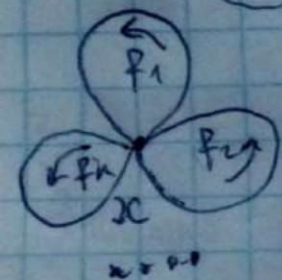


Коспоровский, 24.9(a) (Встр. 13.3 лекции)

Показать за допомогою Th. Зейдлерта-ван Каммена, що

$$\pi_1 \left( \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n \right) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

$\downarrow$   
 $X$



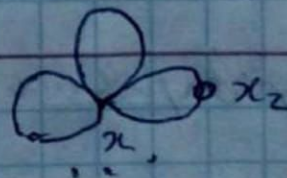
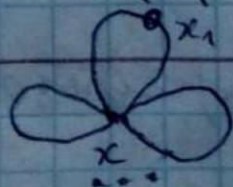
Будемо знаходити  $\pi_1(X, x)$ , де  $x$  - спільна точка  
кіль. Покажемо за індукцією, що

$$\pi_1(X, x) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \text{ де } a_i = [f_i], f_i - \text{петля,}$$

що обходить  $i$ -те коло,  $i = \overline{1, n}$ . Ми знаємо, що це вірно  
при  $n=1$   $i = \overline{1, 1}$ .

Нехай  $x_i$  - належить  $i$ -тому колу,  $i = 1, 2$ ,  $x_i \neq x$ .

Покладемо  $U_i = X \setminus \{x_i\}$ ,  $V := X \setminus \{x_2\}$





Потім  $U \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{n-1}$  - об'єднання кіл  $f_2, \dots, f_n$ .

$V \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{n-1}$  - об'єднання кіл  $f_1, f_3, \dots, f_n$

$U \cap V = X \setminus \{x_1, x_2\} \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{n-2}$  - об'єднання кіл  $f_3, \dots, f_n$ .

Потім за прообразом

$$\pi_1(U, x) = \langle a_2, \dots, a_n \rangle, \pi_1(V, x) = \langle b_1, b_3, \dots, b_n \rangle, \pi_1(U \cap V, x) = \langle c_3, \dots, c_n \rangle,$$

де  $a_i, b_i, c_i$  - розом. класа  $f_i$  у різних підкомплексіях.

Зокрема,  $(i_{UV})_* (c_i) = a_i$ ,  $(i_{VU})_* (c_i) = b_i$  для  $i = \overline{3, n}$ .

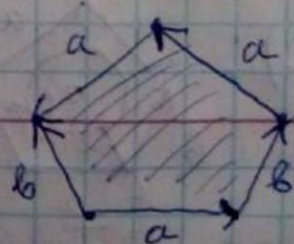
Потім за теоремою

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &\simeq \langle a_2, \dots, a_n, b_1, b_3, \dots, b_n \mid a_3 b_3^{-1}, \dots, a_n b_n^{-1} \rangle = \\ &= [a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n] = \langle b_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle, \end{aligned}$$

як відповідно  
визначу.

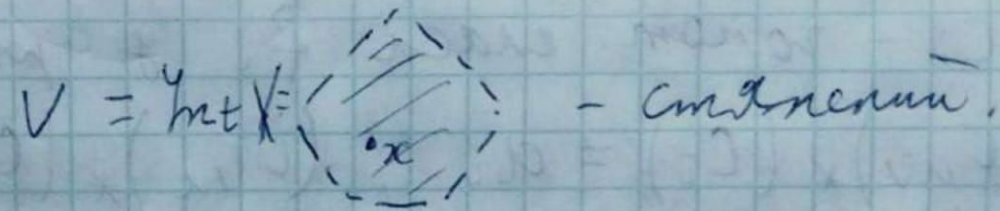
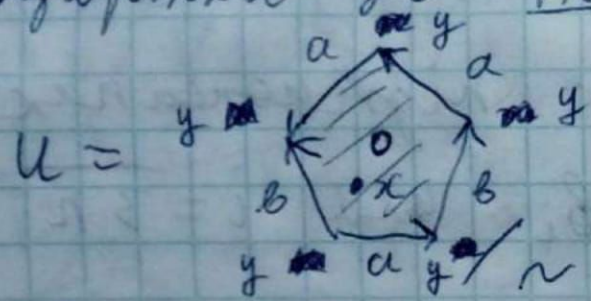
К., 25.1. (1). Знайти  $\pi_1(X/\sim)$ , де  $X$  - різноманитник у  $\mathbb{R}^3$ , а  $\sim$  задається рисунком:

(будується аналогічно розгорнуті поверхні, але



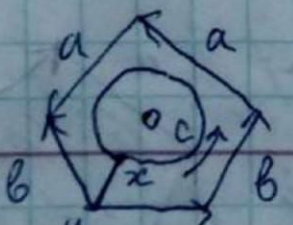


же не вона). Крім, усі вершини ототожнюються в  
 цих грах розгортки. Знайдемо  $\pi_1(X, x)$  за-но до  
 розгортки за Th. 3.-б.К.:



$U \sim S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(U, x) = \langle a, b \rangle$ ,  $a$  і  $b$  figm. петлям, що  
 утворюються з ребер.  $\pi_1(V, x) = \langle \rangle$

$U \cap V = \text{circle} \sim S^1 \Rightarrow \pi_1(U \cap V, x) = \langle c \rangle$ ,  $c$  figm. колу.

$(i_{uv})_*(c) =$    $abaab^{-1}$ .

Отже, за Th.  $\pi_1(X/\sim, x) \cong \langle a, b \mid aba^2b^{-1} \rangle$ .

Це неабелева група. Її абеліанізація:

$$\pi_1(X/\sim) / \pi_1(X/\sim)' = \langle a, b \mid a b a^{-1} b^{-1}, a b a^2 b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3,$$

"  $a^3$

Оскільки вона неізоморфна абеліанізації простого з функц. гр.

поверхонь,  $\leftarrow$  це не повертєня (і при цьому  $X/\sim$  компактний і зв'язний)



Знайдемо гомог. групи  $M_{g,k}^2 := M_g^2 \setminus (B_1^2 \cup \dots \cup B_k^2)$  і  $N_{g,k}^2 := M_g^2 \setminus (B_1^2 \cup \dots \cup B_k^2)$  - квант. зв'язні поверхні роду  $g > 0$  з  $k$  дірками:



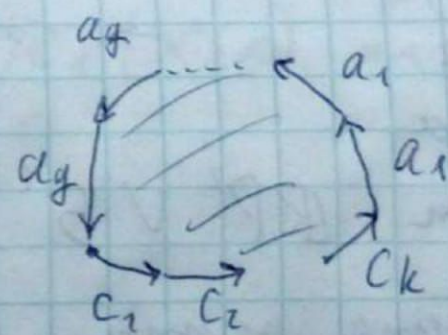
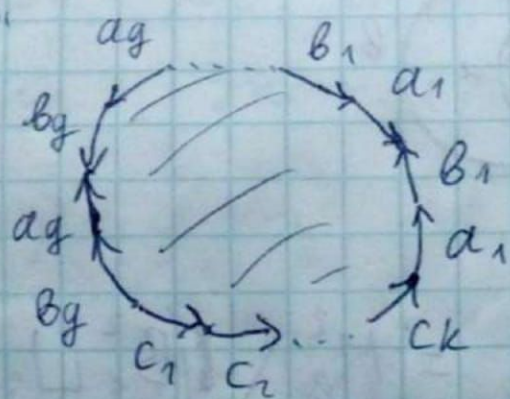
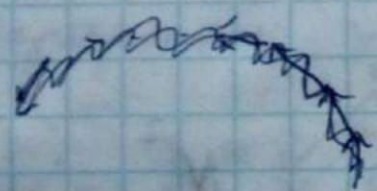
$M_{g,k}^2$



$N_{g,k}^2$

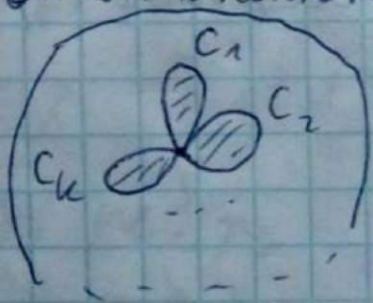


Усі "розгорнули"



Усі вершини ототожнюються в одну, а  $c_1, \dots, c_k$  переходять у

менші дірки:



і повер. загані

Але по до співвнесіє розгорток за Тн. 3. - в. К.:

$$\pi_1(M_{g,k}^2) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \dots c_k \rangle$$

$$\pi_1(N_{g,k}^2) \cong \langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_k \mid a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_k \rangle.$$

Розітимо, що  $c_k = (a_1 b_1 \dots c_{k-1})^{-1}$  і  $(a_1^2 \dots c_{k-1})^{-1}$  виводно.



Закінчуючи його на ці вирази, ми можемо виключити  $c_k$  і це співвідношення (це завжди можна зробити з і співвідношенням  $Wc$ , де  $c \notin W$ ). Отже,  $\forall g, k \in \mathbb{N}$

$$\pi_1(M_{g,k}^2) \cong \langle a_1, b_1, a_g, b_g, c_1, \dots, c_{k-1} \rangle$$

- вільні групи з  $2g+k-1$  і

$$\pi_1(N_{g,k}^2) \cong \langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_{k-1} \rangle$$

$g+k-1$  твірників  $\text{fgen}$ .

Ми знаємо, що  $M_{1,1}^2 = T^2 \setminus B^2$  - циліндр, що  $\sim S^1 V S^1$  і що  $N_{1,1}^2 = \mathbb{RP}^2 \setminus B^2$  гомеоморфно листу Мейсера ( $\sim S^1$ ) і напрямді

$$M_{g,k}^2 \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{2g+k-1}, \quad \text{і} \quad N_{g,k}^2 \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{g+k-1} \text{ завжди.}$$

Це вірно і для  $M_{0,k}^2 = S^2 \setminus (B_1^2 \cup \dots \cup B_k^2) \sim \underbrace{S^1 V \dots V S^1}_{k-1}$ , як ми знаємо.