Задача 13.3. Обчислити першу фундаментальну форму сфери F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\cos u^1 \cos u^2 \\ R\cos u^1 \sin u^2 \\ R\sin u^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Розв'язання. Обчислимо перші похідні радіус-вектора

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -R\sin u^1 \cos u^2 \\ -R\sin u^1 \sin u^2 \\ R\cos u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R\cos u^1 \sin u^2 \\ R\cos u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = 0,$$

$$g_{22} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = R^2 \cos^2 u^1.$$

Матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} = R^2 > 0\ ,\ g_{22} = R^2 \cos^2 u^1 > 0\ ,\ \det g = R^4 \cos^2 u^1 > 0$$

Відповідь: Перша фундаментальна форма сфери в «географічних» координатах має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1\, (du^2)^2$$

Задача 13.4. Обчислити першу фундаментальну форму наступних поверхонь, заданих параметрично:

1) катеноїд

$$\begin{cases} x^1 = R\cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R\cosh u^1 \sin u^2 \\ x^3 = Ru^1 \end{cases}$$

2) гелікоїд

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \omega u^2 \end{cases}$$

3) поверхня Бельтрамі

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) \end{cases}$$

4) поверхня Діні

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) + \omega u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, чи поверхня є регулярно параметризованою.

Знайдемо першу форму (прямого) гелікоїда – поверхні з параметризацією

$$r(u, v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ a\,v),$$

де $a > 0$. Ми вже досліджували її у задачі 3.4, де встановили, що вона регулярна, і

$$r_u = (\cos v,\ \sin v,\ 0),$$

$$r_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ a).$$

Тому коефіцієнти першої форми гелікоїда мають вигляд

$$g_{11} = \langle r_u, r_u\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1,$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v\rangle = -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v + 0 = 0,$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + a^2 = u^2 + a^2.$$

Таким чином, для гелікоїда координати також напівгеодезичні:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

Задача 13.5.

1) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1)\cos u^2 \\ x^2 = f(u^1)\sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}.$$

2) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні гвинтового обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1)\cos u^2 \\ x^2 = f(u^1)\sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) + \omega u^2 \end{cases}.$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Знайдемо першу фундаментальну форму довільної поверхні обертання. У таких задачах будемо вважати, не обмежуючи суттєво загальність (див. нижче), що віссю цієї поверхні є Oz, тому маємо справу з параметризацією

$$r(u, v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)),$$

де для регулярності нам потрібно виконання умов $f \neq 0$ і $f'^2 + g'^2 > 0$. Для нашої поверхні

$$r_u = (f'\cos v,\ f'\sin v,\ g'),$$

$$r_v = (-f\sin v,\ f\cos v,\ 0).$$

Тому коефіцієнтами першої форми є

$$g_{11} = \langle r_u, r_u\rangle = (f'\cos v)^2 + (f'\sin v)^2 + g'^2 = f'^2 + g'^2,$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v\rangle = -ff'\cos v\sin v + ff'\sin v\cos v + 0 = 0,$$

$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = (-f\sin v)^2 + (f\cos v)^2 + 0 = f^2.$$

Саму форму при цьому записують у вигляді

$$I = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2 = (f'(u)^2 + g'(u)^2)\,du^2 + f(u)^2\,dv^2$$

або

$$ds^2 = (f'(u)^2 + g'(u)^2)\,du^2 + f(u)^2\,dv^2.$$

Сенс цих позначень розкривається у лекції. Зауважимо, що поверхню обертання з будь-якою іншою віссю можна отримати з нашої рухом евклідового простору $\mathbb{R}^3$, тому при аналогічному виборі координат (u – параметр напрямної кривої, v – кут обертання) її перша форма буде такою ж.

Перевіримо, що першу фундаментальну форму поверхні обертання можна привести до вигляду

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2,$$

тобто обрати параметризацію (локальні координати) так, що у відповідному базисі форма прийме вказаний вигляд. Тут для цього достатньо за u взяти натуральний параметр напрямної кривої $\rho = (f, 0, g)$ поверхні. Тоді $f'^2 + g'^2 = 1$, і в силу попередньої задачі перша форма прийме вигляд

$$ds^2 = du^2 + f(u)^2\,dv^2.$$

Це і є потрібний нам вираз, де $G = f^2$. Це приклад т.зв. напівгеодезичної параметризації поверхні (коли $g_{12} = 0$ і $g_{11} = 1$ або $g_{22} = 1$).

Задача 13.7. Обчислити першу фундаментальну форму загальної конічної поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = u^2 \cdot \vec{\rho}(u^1) \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Розв'язання. Конічна поверхня F утворена прямими лініями, що проходять через точки базової кривої γ з радіус-вектором $\vec{\rho}(u^1)$ і точку O.

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = u^2 \vec{\rho}' \ , \ \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{\rho} \ \ .$$

Попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = (u^2)^2 \, | \vec{\rho}' |^2 \ , \ \ g_{12} = g_{21} = u^2 < \vec{\rho}', \vec{\rho} > \ , \ \ \ g_{22} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = | \vec{\rho} |^2 \ .$$

Матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u^2)^2 \, | \vec{\rho}' |^2 & u^2 < \vec{\rho}', \vec{\rho} > \\ u^2 < \vec{\rho}', \vec{\rho} > & | \vec{\rho} |^2 \end{pmatrix}$$

Якщо базова крива параметризована натуральним параметром, то $g_{11}=(u^2)^2$.

Якщо базова крива лежить на одиничній сфері з центром в точці O, то $g_{22}=1$.

Якщо базова крива лежить на сфері з центром в точці O, то $g_{12}= g_{21}=0$.

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} = (u^2)^2 |\vec{\rho}'|^2 > 0 \text{ , } g_{22} = |\vec{\rho}|^2 > 0 \text{ , } \det g = (u^2)^2 |[\vec{\rho}', \vec{\rho}]|^2 > 0$$

Точка O – вершина конічної поверхні, де $u^2=0$, завжди є сингулярною.

Регулярність конічної поверхні в інших точках (крім вершини O) забезпечується регулярністю базової кривої γ , тобто, $\vec{\rho}' \neq \vec{0}$, і умовою того, що прямолінійні твірні не дотикаються базової кривої γ в жодній її точці, тобто, $[\vec{\rho}', \vec{\rho}] \neq \vec{0}$.

Відповідь: Перша фундаментальна форма конічної поверхні

$$g = (u^2)^2 |\vec{\rho}'|^2 (du^1)^2 + 2u^2 < \vec{\rho}', \vec{\rho} > du^1 du^2 + |\vec{\rho}|^2 (du^2)^2$$

Якщо базова крива параметризована натуральним параметром і розташована на сфері одиничного радіуса з центром в точці O, то

$$g = (u^2)^2 (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Зауважимо, що при такому виборі координат на конічній поверхні її перша фундаментальна форма буде такою ж, що і перша фундаментальна форма площини в полярних координатах.

Задача 13.8. Обчислити першу фундаментальну форму загальної торсової поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\rho}'(u^1) \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Розв'язання. Торсова поверхня F утворена дотичними прямими лініями базової кривої γ з радіус-вектором $\vec{\rho}(u^1)$.

Задля спрощення будемо вважати, що базова крива параметризована натуральним параметром u^1.

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \vec{\tau}(u^1) + u^2 \cdot k\vec{\nu}(u^1) \ , \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{\tau}(u^1) \ ,$$

де $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, k – одиничний дотичний вектор, вектор головної нормалі і кривина базової кривої γ.

Попарні скалярні добутки:

$$g_{11} =< \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} >= 1 + (u^2)^2 k^2 \ , \ g_{12} = g_{21} = 1 \ , \quad g_{22} =< \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} >= 1 \ .$$

Матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(u^2)^2 k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} = 1+(u^2)^2 k^2 > 0 \ , \ g_{22} = 1 > 0 \, , \ \det g = (u^2)^2 k^2 > 0$$

Торсова поверхня має сингулярне ребро – базову криву γ, в точках якої $u^2=0$. Крім того, умова регулярності може порушуватись в точках прямолінійної твірної, що проходить через точку перегину базової кривої γ, де $k=0$.

Відповідь: Перша фундаментальна форма торсової поверхні

$$g = (1+(u^2)^2 k^2)(du^1)^2 + 2du^1 du^2 + (du^2)^2$$

Зауважимо, що перша фундаментальна форма торсової поверхні визначається кривиною базової кривої і не залежить від її скруту. Локально для заданої торсової поверхні із даною базовою кривою завжди можна розглянути площину (область на площині), утворену як торсова поверхня плоскої кривої з тією ж кривиною. Перша фундаментальна форма торсової поверхні буде співпадати із першою фундаментальною формою площини у відповідних координатах.

Задача 13.10. Розглянемо катеноїд F (або якусь іншу поверхню), перша фундаментальна форма якого має вигляд

$$g = \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2.$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма катеноїда F заміні координат за формулами

$$\begin{cases} \widetilde{u}^1 = \sinh u^1 \\ \widetilde{u}^2 = u^2 \end{cases} ?$$

Відповідь: $g = (d\widetilde{u}^1)^2 + (1 + (\widetilde{u}^1)^2)(d\widetilde{u}^2)^2$

Задача 6. Нехай поверхня $F \subset \mathbb{R}^3$ має п. ф. форму

$$g = ch^2 u^1 (du^1)^2 + ch^2 u^1 (du^2)^2$$

Зробимо заміну координат

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = sh\, u^1 \\ \tilde{u}^2 = u^2 \end{cases}$$

Запишіть п. ф. форму поверхні в нових координатах

Розв'язання: I спосіб)

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ch^2 u^1 & 0 \\ 0 & ch^2 u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch u^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch u^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ch^2u^1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\,u^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch\,u^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{ch\,u^1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch^2u^1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{ch\,u^1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+(\tilde{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$g = (d\tilde{u}^1)^2 + \left(1+(\tilde{u}^1)^2\right)(d\tilde{u}^2)^2$$

* Чи можна придумати заміну координат $\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$, після якої $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (d\tilde{u}^2)^2$, тобто $\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 13.11. Розглянемо поверхню F, перша фундаментальна форма якої має вигляд

$$g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні F при переході від декартових координат (u^1, u^2) до полярних координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^2 \\ u^2 = e^{\tilde{u}^1} \end{cases} \quad ?$$

Відповідь: $g = (d\tilde{u}^1)^2 + e^{-2\tilde{u}^1}(d\tilde{u}^2)^2$

Задача 13.12. Доведіть, що якщо до поверхні F застосувати гомотетію з коефіцієнтом $\lambda > 0$ у просторі, то її перша фундаментальна форма (усі її коефіцієнти одночасно) домножиться на λ^2.

Задача 5. Як зміниться перша фундаментальна форма $g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$, якщо зробити заміну координат $\begin{cases} u^1 = \tilde u^1 \\ u^2 = e^{\tilde u^2} \end{cases}$?

Розв'язання: $g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$

$$\begin{cases} u^1 = \tilde u^1 \\ u^2 = e^{\tilde u^2} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \tilde g_{11} & \tilde g_{12} \\ \tilde g_{21} & \tilde g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^2} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\tilde g_{ij} = \sum_{k,l} g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde u^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde u^j}} \qquad \tilde g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde u^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde u^j}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde g_{11} & \tilde g_{12} \\ \tilde g_{21} & \tilde g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\tilde u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(e^{\tilde u^2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(e^{\tilde u^2})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\tilde u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\tilde u^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = e^{-2\tilde u^2}(d\tilde u^1)^2 + (d\tilde u^2)^2$$

II спосіб: $\begin{cases} u^1 = \tilde u^1 \\ u^2 = e^{\tilde u^2} \end{cases} \quad \begin{cases} du^1 = d\tilde u^1 \\ du^2 = e^{\tilde u^2} d\tilde u^2 \end{cases}$

$$g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2 = \frac{1}{e^{2\tilde u^2}}(d\tilde u^1)^2 + \frac{1}{e^{2\tilde u^2}} e^{2\tilde u^2}(d\tilde u^2)^2 =$$

$$= e^{-2\tilde u^2}(d\tilde u^1)^2 + (d\tilde u^2)^2$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 14.1. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g=(du^1)^2+(u^1)^2(du^2)^2\ ,\ u^1>0,$$

розглянемо криву γ, задану параметрично

$$\begin{cases} u^1=r \\ u^2=t \end{cases},\quad \alpha<t<\beta .$$

Обчислити довжину кривої γ.

Розв'язання. В площині параметрів (u^1,u^2) крива γ зображається відрізком вертикальної прямої. Як виглядає сама крива γ на поверхні F в просторі $\mathbb{R}^3$ ми не знаємо, оскільки нам невідома форма поверхні F.

Але нам відома перша фундаментальна форма поверхні F, за допомогою якої можна обчислити довжину заданої на поверхні F кривої γ.

Дотичний вектор кривої:

$$\dot{\gamma}=\begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Довжина дотичного вектора кривої:

$$|\dot{\gamma}|^2 = <\dot{\gamma}, \dot{\gamma}> = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r^2$$

Довжина кривої: $$L = \int_\alpha^\beta |\dot{\gamma}|\, dt = \int_\alpha^\beta r\, dt = r(\beta - \alpha)$$

Альтернативний метод.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{(du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(dr)^2 + (r)^2(dt)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{(0)^2 + (r)^2(dt)^2} = \int_\alpha^\beta rdt = r(\beta - \alpha)$$

Відповідь: $L(\gamma) = r(\beta - \alpha)$

Зауваження. В якості поверхні F можна взяти площину, параметризовану полярними координатами так, що перша фундаментальна форма має заданий вигляд. Крива γ буде представляти собою дугу кола радіуса r. Довжина такої дуги кола дійсно дорівнює $r(\beta - \alpha)$.

Задача 14.3. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g=\frac{R^2}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{R^2}{(u^2)^2}(du^2)^2\ ,\ u^2>0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

1) $\gamma:\begin{cases}u^1=r\\ u^2=t\end{cases},\quad 0<a<t<b;$

2) $\gamma:\begin{cases}u^1=t\\ u^2=h\end{cases},\quad a<t<b;$

3) $\gamma:\begin{cases}u^1=c+r\cos t\\ u^2=r\sin t\end{cases},\quad 0<\alpha<t<\beta<\pi.$

Обчислити довжину заданих кривих γ.

Розв'язання. Область визначення координат на поверхні F – це верхня півплощина в площині параметрів (u^1,u^2) , де $u^2>0$.

Як виглядають задані криві на поверхні F в просторі $\mathbb{R}^3$ ми не знаємо, оскільки нам невідома форма поверхні F.

Але нам відома перша фундаментальна форма поверхні F, за допомогою якої можна обчислити довжину заданих на поверхні F кривих.

1) В площині параметрів (u^1,u^2) крива γ представляється вертикальним відрізком у верхній півплощині. Дотичний вектор кривої:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Довжина дотичного вектора кривої:

$$|\dot{\gamma}|^2 = <\dot{\gamma},\dot{\gamma}> = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{t^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{R^2}{t^2}$$

Довжина кривої:

$$L = \int_a^b |\dot{\gamma}|\, dt = \int_a^b \frac{R}{t}\, dt = R(\ln b - \ln a)$$

Задача експеримент 14.4.1. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього циліндр. Зафіксуємо на циліндрі пару точок. Намалюйте криву на циліндрі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на циліндрі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача експеримент 14.4.2. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього конус. Зафіксуємо на конусі пару точок. Намалюйте криву на конусі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на конусі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача 14.5. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2}(du^2)^2 \ , u^2>0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t \end{cases}, \quad t > 0; \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = r\cos t \\ u^2 = r\sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi .$$

Знайдіть точки перетину цих кривих і кут між ними в точках перетину.

Задача 14.8. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2\,(du^2)^2\ ,\ u^1 > 0,$$

розглянемо область Ω, визначену умовами

$$a<u^1<b,\ \alpha<u^2<\beta$$

Обчислити площу області Ω.

Розв'язання.

Маємо

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{vmatrix} = (u^1)^2$$

Обчислимо площу області:

$$Area(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det g}\,du^1 du^2 = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} u^1 du^1 du^2 = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(b^2-a^2)$$

Відповідь: $Area(\Omega) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(b^2-a^2)$

Як приклад, задану першу фундаментальну форму має площина в полярних координатах. Тоді область Ω – це сектор кільця з внутрішнім радіусом a і зовнішнім радіусом b. Якщо $\alpha=0$, $\beta=2\pi$, то Ω – повне кільце, його площа дорівнює якраз $\pi(b^2-a^2)$. Якщо ще й $a=0$, то Ω – проколотий круг, його площа якраз дорівнює πb^2.