

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 13.1. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2, \quad u^1 > 0,$$

розглянемо криву γ , задану параметрично

$$\begin{cases} u^1 = r \\ u^2 = t \end{cases}, \quad \alpha < t < \beta.$$

Обчислити довжину кривої γ .

Задача 13.2. На сфері F , параметризованій «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2, \quad -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},$$

розглянемо криву – локсодрому γ , задану параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \pm \tan \omega \cdot \frac{1 + \sin t}{\cos t} + C \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Обчислити довжину кривої γ .

Задача 13.3. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

$$1) \gamma : \begin{cases} u^1 = r \\ u^2 = t \end{cases}, \quad 0 < a < t < b;$$

$$2) \gamma : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = h \end{cases}, \quad a < t < b;$$

$$3) \gamma : \begin{cases} u^1 = c + r \cos t \\ u^2 = r \sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi.$$

Обчислити довжину заданих кривих γ .

Задача експеримент 13.4.1. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього циліндр. Зафіксуємо на циліндрі пару точок. Намалюйте криву на циліндрі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на циліндрі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача експеримент 13.4.2. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього конус. Зафіксуємо на конусі пару точок. Намалюйте криву на конусі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на конусі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача 13.5. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t \end{cases}, \quad t > 0; \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = r \cos t \\ u^2 = r \sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi.$$

Знайдіть точки перетину цих кривих і кут між ними в точках перетину.

Задача 13.6. Розглянемо довільну поверхню обертання F , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = f(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}$$

Опишіть лінії на поверхні обертання F , які перетинають усі меридіани під сталим кутом ω .

Задача 13.7. Розглянемо гелікоїд F , заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \mu u^2 \end{cases}$$

Опишіть лінії на гелікоїді F , які перетинають усі координатні лінії $u^2 = \text{const}$ ортогонально.

Задача 13.8. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2, \quad u^1 > 0,$$

розглянемо область Ω , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad \alpha < u^2 < \beta$$

Обчислити площу області Ω .

Задача 13.9. На сфері F , параметризованій «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2, \quad -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},$$

розглянемо область Ω_1 , визначену умовами

$$-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha < u^2 < \beta,$$

і область Ω_2 , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad 0 < u^2 < 2\pi.$$

Обчислити площу областей Ω_1 і Ω_2 і площу їх перетину.

Задача 13.10. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо область Ω , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad \alpha < u^2 < \beta.$$

Обчисліть площу області Ω .

Задача 13.11. Розглянемо явно задану поверхню F ,

$$x^3 = h(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D.$$

Обчисліть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні F .

Обчисліть площу явно заданої поверхні F .

Задача 13.12. Обчисліть площу наступних поверхонь:

1) поверхня Бельтрамі

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < u^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

2) поверхня Діні (одна компонента)

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) + \omega u^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < u^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$