

Лекція 13. Перша фундаментальна форма: довжина кривих, кут між кривими, площа областей на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Перша фундаментальна форма поверхні F – це симетрична додатно визначена білінійна диференціальна форма

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2,$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулою

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

Перша фундаментальна форма визначає в кожній точці P поверхні F скалярний добуток векторів в дотичній площині $T_P F$:

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(P) \cdot X^i \cdot Y^j$$

тобто,

$$\langle X, Y \rangle = (X^1 X^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

1. Довжина кривої на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Розглянемо регулярну криву γ на поверхні F , задану у внутрішніх локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b.$$

Обчислимо довжину кривої γ . Для цього спочатку розглянемо вектор швидкості (дотичний вектор) кривої γ в кожній її точці. Позначимо його $\dot{\gamma}$.

За визначенням, довжина кривої

$$L = \int_a^b |\dot{\gamma}| dt$$

Потрібно обчислити довжину вектора швидкості $\dot{\gamma}$.

Як вектор в дотичній площині поверхні F , він має координати

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}$$

Далі помножимо цей вектор сам на себе скалярно:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle &= \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} & \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} = \\
 &= g_{11} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{21} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} = \\
 &= g_{11} \left(\frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\xi^2}{dt} \right)^2
 \end{aligned}$$

В цій формулі $g_{ij}=g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F , обчислені в точках кривої γ .

Як наслідок, довжина вектора швидкості кривої γ дорівнює

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\xi^2}{dt} \right)^2},$$

а довжина самої кривої γ дорівнює

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt$$

Твердження. Довжина кривої γ на поверхні F , заданої у внутрішніх локальних координатах на поверхні F у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\xi^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\xi^2}{dt} \right)^2} dt ,$$

де $g_{ij} = g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F , обчислені в точках кривої γ .

Зауваження 1. Щоб обчислювати довжину кривих на поверхні, не обов'язково знати радіус-вектор поверхні (як виглядає сама поверхня), а потрібно знати лише першу фундаментальну форму поверхні.

Зауваження 2.
$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2}$$

Зауваження 3. Для кривої γ на поверхні F в $\mathbb{R}^3$ обчислення її довжини у внутрішніх координатах за допомогою першої фундаментальної форми поверхні F призводить до того самого результату, що і обчислення довжини у зовнішніх координатах, як кривої в $\mathbb{R}^3$, за допомогою евклідової метрики в $\mathbb{R}^3$.

Приклад 1. Розглянемо сферу F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos u^1 \cos u^2 \\ R \cos u^1 \sin u^2 \\ R \sin u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -R \sin u^1 \cos u^2 \\ -R \sin u^1 \sin u^2 \\ R \cos u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u^1 \sin u^2 \\ R \cos u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо скалярні добутки:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = 0,$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = R^2 \cos^2 u^1.$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів першої фундаментальної форми сфери (в «географічних» координатах):

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

Довжина кривої γ на сфері, що задано у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

дорівнює

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2} = \\ &= \int_a^b \sqrt{R^2(d\xi^1)^2 + R^2 \cos^2 \xi^1 (d\xi^2)^2} = \\ &= R \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \cos^2 \xi^1 \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Тобто, для кривих на сфері радіуса R довжина обчислюється за формулою

$$L = R \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \cos^2 \xi^1 \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt,$$

тоді як для кривих на площині (в декартових координатах) довжина обчислювалась би за формулою

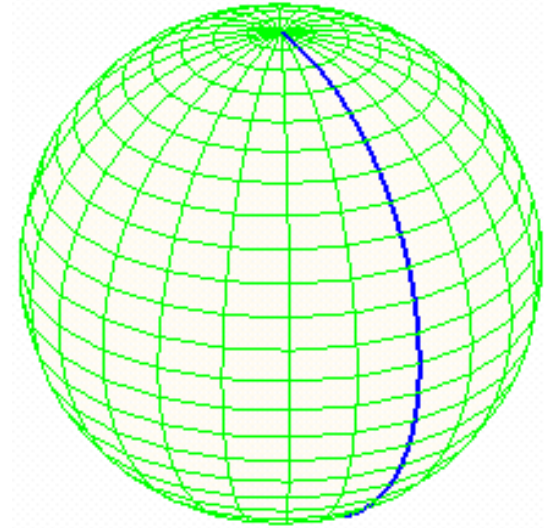
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt$$

Наприклад, довжина координатної меридіана γ , заданого параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \alpha \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

дорівнює

$$L = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t (0)^2} dt = \pi R$$

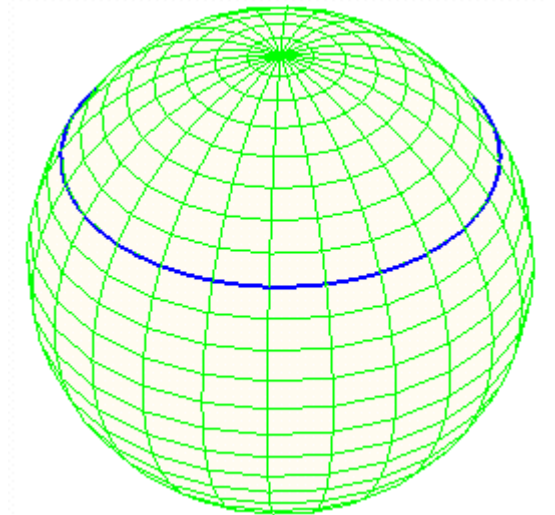


Довжина координатної паралелі γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = \beta \\ u^2 = t \end{cases}, \quad -0 < t < 2\pi,$$

дорівнює

$$L = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(0)^2 + \cos^2 \beta (1)^2} dt = 2\pi R \cos \beta$$

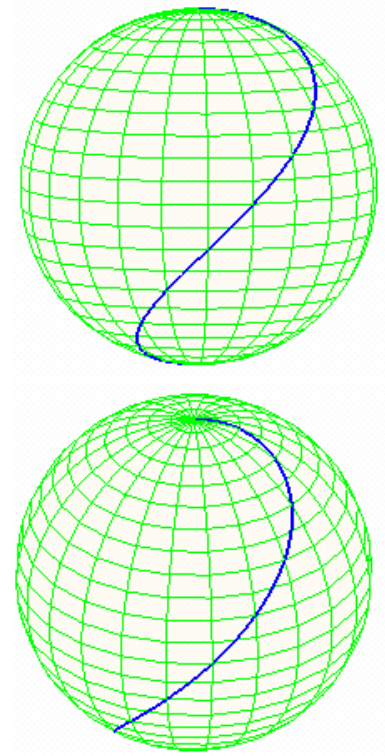


Довжина кривої γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t + c \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

дорівнює

$$L = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t \cdot (1)^2} dt = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt$$



Задача. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

обчислити довжину координатних ліній

$$\gamma_1: \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases}, \quad a < t < b, \quad \text{та} \quad \gamma_2: \begin{cases} u^1 = u_0^1 \\ u^2 = \sigma \end{cases}, \quad c < \sigma < d.$$

$$\text{Відповідь: } L(\gamma_1) = \int_a^b \sqrt{g_{11}(t, u_0^2)} dt, \quad L(\gamma_2) = \int_c^d \sqrt{g_{22}(u_0^1, \sigma)} d\sigma$$

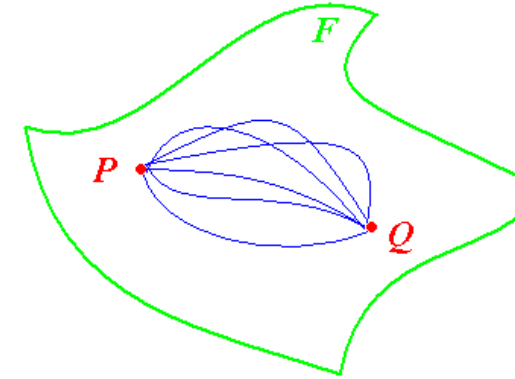
2. Регулярні поверхні як метричні простори

Нехай F – регулярна поверхня в $\mathbb{R}^3$.

Визначення. Відстанню (внутрішньою відстанню) між точками P і Q на поверхні F називається

$$d(P, Q) = \inf L(\gamma) ,$$

де інфімум береться по множині усіх кусково-регулярних кривих γ , що розташовані на поверхні F і поєднують точки P і Q .

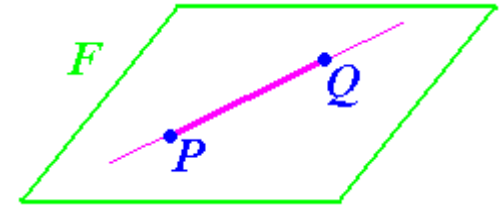


Твердження. Внутрішня відстань d , як функція $F \times F \rightarrow \mathbb{R}$, має наступні властивості:

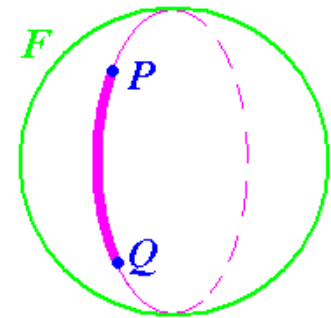
- 1) $d(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in F$, при цьому $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- 2) $d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in F$
- 3) $d(P, M) + d(M, Q) \geq d(P, Q) \quad \forall P, Q, M \in F$

Отже, кожна регулярна поверхня F з внутрішньою відстанню d представляє собою приклад метричного простору.

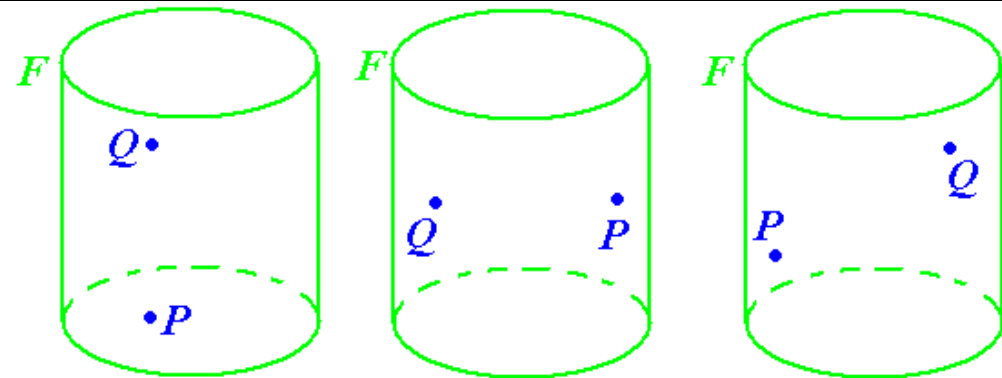
Приклад 1. F – площина. Відстань $d(P, Q)$ між точками P і Q на площині F дорівнює довжині відрізка PQ прямої, що проходить через точки P і Q на площині F .



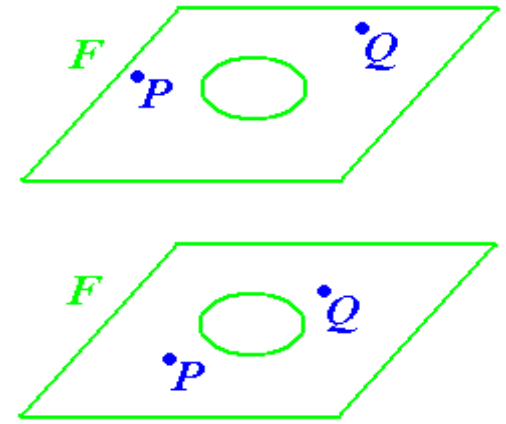
Приклад 2. F – сфера. Відстань $d(P, Q)$ між точками P і Q на сфері F дорівнює довжині меншої дуги PQ великого кола, що проходить через точки P і Q на сфері F .



Задача-приклад 3. F – циліндр. Чому дорівнює відстань $d(P, Q)$ між точками P і Q на циліндрі F ? Довжина якої кривої, що проходить через точки P і Q на циліндрі F , дорівнює відстані $d(P, Q)$?



Задача-приклад 4. F – площина, з якої видалили деякий замкнутий диск (диск разом з граничним колом). Чому дорівнює відстань $d(P, Q)$ між точками P і Q на поверхні F ? Довжина якої кривої, що проходить через точки P і Q на поверхні F , дорівнює відстані $d(P, Q)$? Чи існує така *найкоротша* крива?



3. Кут між кривими на поверхні

За допомогою першої фундаментальної форми поверхні F обчислюється кут між кривими, що розташовані на поверхні F і задані параметрично у внутрішніх координатах на поверхні.

Нагадування: кут між кривими, що перетинаються в деякій точці P , дорівнює куту між векторами швидкості (дотичними векторами) кривих в точці перетину P .

Нехай на поверхні F задано пару кривих

$$\gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad \gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases},$$

які перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$, тобто, маємо

$$\begin{cases} u_0^1 = \xi^1(t_0) = \eta^1(\sigma_0) \\ u_0^2 = \xi^2(t_0) = \eta^2(\sigma_0) \end{cases}$$

(Підкреслимо, що точка P має координати (u_0^1, u_0^2) на поверхні F , координату t_0 на кривій γ і координату σ_0 на кривій Γ)

Вектори швидкості кривих:

$$\gamma'_1(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}, \quad \gamma'_2(\sigma_0) = \begin{pmatrix} \frac{d\eta^1}{d\sigma} \\ \frac{d\eta^2}{d\sigma} \end{pmatrix}_{\sigma_0}$$

Скалярні добутки:

$$\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(\sigma_0) \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)$$

$$\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_1(t_0) \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)$$

$$\langle \gamma'_2(\sigma_0), \gamma'_2(\sigma_0) \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)$$

Кут між кривими:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Приклад 1. Розглянемо на поверхні F координатні лінії

$$\gamma_1: \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases}, \quad \gamma_2: \begin{cases} u^1 = u_0^1 \\ u^2 = \sigma \end{cases},$$

які перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$. Кут між ними визначається формулою

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} = \\ &= \frac{g_{12}(u_0^1, u_0^2)}{\sqrt{g_{11}(u_0^1, u_0^2)} \cdot \sqrt{g_{22}(u_0^1, u_0^2)}} \end{aligned}$$

Як наслідок, координатні лінії на поверхні F перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$ ортогонально тоді, і тільки тоді, коли $g_{12}(u_0^1, u_0^2) = 0$.

Визначення. Локальні координати (u^1, u^2) на поверхні F називаються *ортогональними*, якщо всюди на поверхні F координатні лінії перетинаються ортогонально, тобто, $g_{12}(u^1, u^2) \equiv 0$.

Приклад 2. Розглянемо сферу F радіуса R , параметризовану «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

Розглянемо сімейство меридіанів

$$\gamma_\alpha : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \alpha \end{cases}$$

Знайдемо криву

$$\Gamma : \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases},$$

що перетинає меридіани під сталим кутом ω . Маємо умову:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\xi^j}{dt}} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}} \equiv \cos \omega$$

Підставимо коефіцієнти першої фундаментальної форми

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

і координатні функції меридіанів $\xi^1 = t$, $\xi^2 = \text{const.}$

Отримуємо:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\xi^j}{dt}} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}} \equiv \cos \omega$$

$$\frac{\frac{d\eta^1}{d\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{d\eta^1}{d\sigma}\right)^2 + \cos^2 \eta^1 \cdot \left(\frac{d\eta^2}{d\sigma}\right)^2}} \equiv \cos \omega$$

$$\sin \omega \cdot \frac{d\eta^1}{d\sigma} = \pm \cos \omega \cdot \cos \eta^1 \cdot \frac{d\eta^2}{d\sigma}$$

$$\sin \omega \cdot \frac{1}{\cos \eta^1} \cdot d\eta^1 = \pm \cos \omega \cdot d\eta^2$$

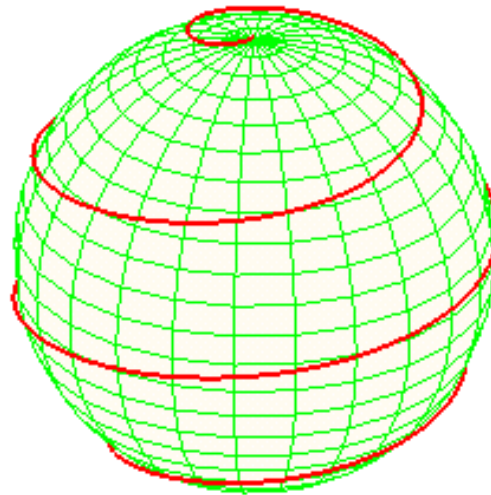
$$\sin \omega \operatorname{arcsinh}(\tan \eta^1) = \pm \cos \omega \eta^2 + C$$

Якщо $\omega = \pi/2$, то розв'язок $\eta^1 = \text{const}$, а відповідна крива Γ – це паралель.

Якщо $\omega \neq \pi/2$, то розв'язок $\eta^2 = \pm \tan \omega \cdot \frac{1 + \sin \eta^1}{\cos \eta^1} + C$, тобто

$$\begin{cases} u^1 = \sigma \\ u^2 = \pm \tan \omega \cdot \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} + C \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$$

а відповідна крива Γ називається *локсодрою*.



4. Площа області на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перша фундаментальна форма поверхні F :

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2.$$

Нагадування:

$$\begin{aligned} \det g &= g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \\ &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle^2 = \left| \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|^2 \end{aligned}$$

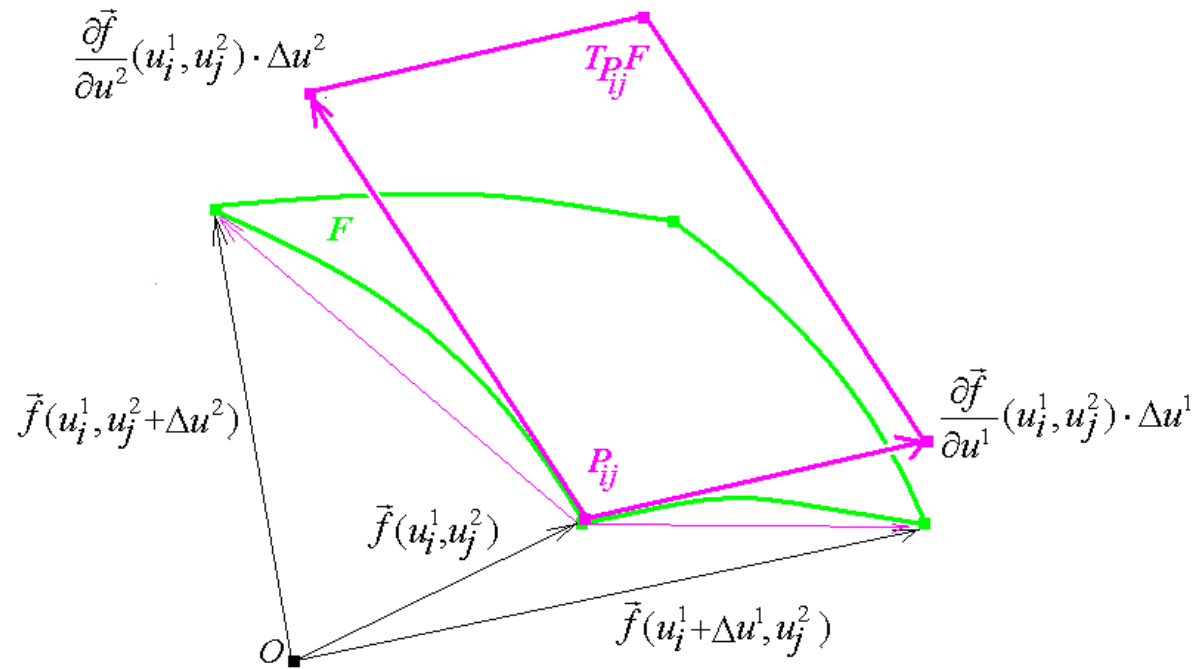
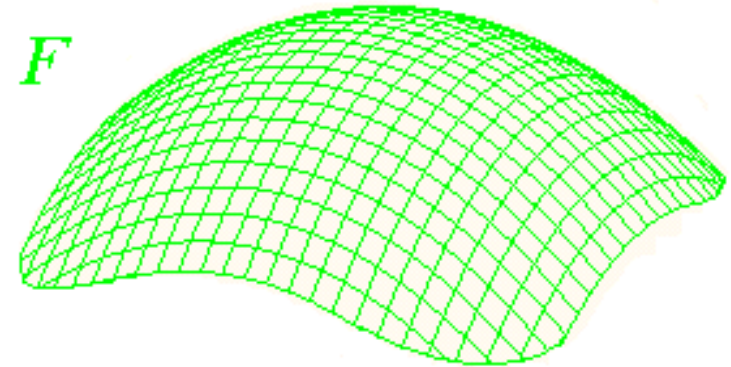
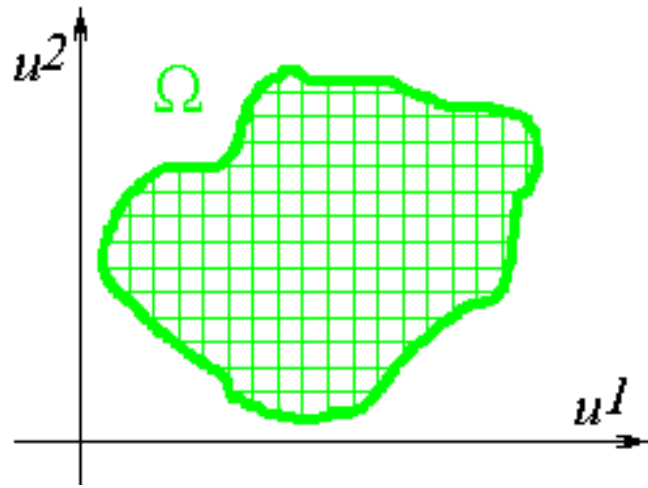
Отже, маємо:

$$\sqrt{\det g} = \left| \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|$$

Розіб'ємо область Ω на координатні чотирикутники

$$\Omega_{ij} = \{ (u^1, u^2) \mid u_i^1 < u^1 < u_i^1 + \Delta u^1, u_j^2 < u^2 < u_j^2 + \Delta u^2 \}$$

Розглянемо відповідне розбиття поверхні F на криволінійні координатні чотирикутники F_{ij} .



Кожний криволінійний чотирикутник F_{ij} на поверхні F апроксимується чотирикутником T_{ij} в дотичній площині $T_{P_{ij}} F$, натягнутим на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_i^1, u_j^2) \cdot \Delta u^1 \quad , \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_i^1, u_j^2) \cdot \Delta u^2.$$

Площа цього чотирикутника в дотичній площині $T_P F$ дорівнює

$$|[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \Delta u^1, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \Delta u^2]| = \sqrt{\det g} \cdot \Delta u^1 \cdot \Delta u^2$$

Розглядаються суми

$$\sum_{ij} Area(T_{ij}) = \sum_{ij} \sqrt{\det g} \Delta u^1 \Delta u^2$$

Подрібнюючи координатну сітку на поверхні F (координатну сітку в області Ω), при $\Delta u^1 \rightarrow 0$, $\Delta u^2 \rightarrow 0$ отримуємо *площу* поверхні F :

$$Area(F) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g} \, du^1 \, du^2$$

Зауваження 1. Площа не залежить від вибору локальних координат на регулярній поверхні – якщо зробити регулярну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

то з тензорного закону

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

ВИПЛИВАЄ, ЩО

$$\sqrt{\det \tilde{g}} \, d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \sqrt{\det g} \, \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \sqrt{\det g} \, du^1 du^2$$

Зауваження 2. Площа не залежить від розташування поверхні в просторі.

Термінологія. Величина

$$dA = \sqrt{\det g} \, du^1 du^2$$

називається *елементом площі* поверхні F .

Приклад. Розглянемо сферу F радіуса R , задану параметрично в «географічних» координатах:

$$\begin{cases} x^1 = R \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R \cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R \sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

Маємо

$$\det g = \begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{vmatrix} = R^4 \cos^2 u^1$$

Обчислимо площу сфери:

$$Area(F) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos u^1 du^1 du^2 = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u^1 du^1 = 4\pi R^2$$

Зауваження. Поняття площі можна визначати не лише для регулярних поверхонь, але й для більш загальних поверхонь, що не обов'язково є регулярними.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 13.1. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2, \quad u^1 > 0,$$

розглянемо криву γ , задану параметрично

$$\begin{cases} u^1 = r \\ u^2 = t \end{cases}, \quad \alpha < t < \beta.$$

Обчислити довжину кривої γ .

Задача 13.2. На сфері F , параметризованій «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2, \quad -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},$$

розглянемо криву – локсодрому γ , задану параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \pm \tan \omega \cdot \frac{1 + \sin t}{\cos t} + C \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Обчислити довжину кривої γ .

Задача 13.3. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

$$1) \gamma : \begin{cases} u^1 = r \\ u^2 = t \end{cases}, \quad 0 < a < t < b;$$

$$2) \gamma : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = h \end{cases}, \quad a < t < b;$$

$$3) \gamma : \begin{cases} u^1 = c + r \cos t \\ u^2 = r \sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi.$$

Обчислити довжину заданих кривих γ .

Задача експеримент 13.4.1. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього циліндр. Зафіксуємо на циліндрі пару точок. Намалюйте криву на циліндрі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на циліндрі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача експеримент 13.4.2. Візьмемо плаский аркуш паперу (або іншого *нерозтяжного* гнучкого матеріалу) і згорнемо з нього конус. Зафіксуємо на конусі пару точок. Намалюйте криву на конусі, що має найкоротшу довжину серед усіх розташованих на конусі кривих, що поєднують дану пару точок.

Задача 13.5. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо наступні криві, задані параметрично:

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t \end{cases}, \quad t > 0; \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = r \cos t \\ u^2 = r \sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi.$$

Знайдіть точки перетину цих кривих і кут між ними в точках перетину.

Задача 13.6. Розглянемо довільну поверхню обертання F , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = f(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}$$

Опишіть лінії на поверхні обертання F , які перетинають усі меридіани під сталим кутом ω .

Задача 13.7. Розглянемо гелікоїд F , заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \mu u^2 \end{cases}$$

Опишіть лінії на гелікоїді F , які перетинають усі координатні лінії $u^2 = \text{const}$ ортогонально.

Задача 13.8. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2, \quad u^1 > 0,$$

розглянемо область Ω , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad \alpha < u^2 < \beta$$

Обчислити площу області Ω .

Задача 13.9. На сфері F , параметризованій «географічними» координатами так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2, \quad -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2},$$

розглянемо область Ω_1 , визначену умовами

$$-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha < u^2 < \beta,$$

і область Ω_2 , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad 0 < u^2 < 2\pi.$$

Обчислити площу областей Ω_1 і Ω_2 і площу їх перетину.

Задача 13.10. На поверхні F з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{R^2}{(u^2)^2} (du^2)^2, \quad u^2 > 0,$$

розглянемо область Ω , визначену умовами

$$a < u^1 < b, \quad \alpha < u^2 < \beta.$$

Обчисліть площу області Ω .

Задача 13.11. Розглянемо явно задану поверхню F ,

$$x^3 = h(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D.$$

Обчисліть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні F .

Обчисліть площу явно заданої поверхні F .

Задача 13.12. Обчисліть площу наступних поверхонь:

1) поверхня Бельтрамі

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < u^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

2) поверхня Діні (одна компонента)

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) + \omega u^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < u^1 < +\infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$