

Нагадування: зовнішні форми

Нехай M - ∞ -м. многовид, $\dim M = n$.

Лев. ∞ -гладка k -форма на M ($k \in \mathbb{Z}_+$) - це $(k, 0)$ -тензор

на ∞ -м. полі, тобто ∞ -гладкий перетин розшарування TM^k_0 , тобто відображення, що ставить у відповідність

конкретній $p \in M$ k -лінійну форму

$$\alpha_p: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R},$$

що у конкретній карті M має ∞ -гладкі коефіцієнти (див. нижче).

Вет. Конкретно ω -м. k -форма на M відповідає відображенню $\alpha: \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_k \rightarrow C^\infty(M)$ (де $\mathcal{X}(M)$ - модуль ω -м. векторних полів на M):

$$\alpha(X_1, \dots, X_k)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) \quad \forall p \in M$$

Ця відповідність встановлює еквівалентність поруч з означення і наступного:

Лем. ω -значна k -форма на M - це відображення

$$\alpha: \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_k \rightarrow C^\infty(M),$$

k -лінійне над кільцем $C^\infty(M)$, тобто $\forall i=1, \dots, k, X_1, \dots, X_i, Y_i, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$

$$\alpha(X_1, \dots, fX_i + gY_i, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + g \cdot \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$$

Вет. Множину ω -м. k -форм на M позначимо $\mathcal{X}_0^k(M)$.

Це модуль над кільцем $C^\infty(M)$: для $\alpha, \beta \in \mathcal{X}_0^k(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ і $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$

$$(\underbrace{f}_{\text{кривая}} + \underbrace{g}_{\text{функция}})(X_1, \dots, X_k) := f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k) + g \cdot \beta(X_1, \dots, X_k)$$

Рем. $\mathcal{H}_0^k(M) = C^\infty(M)$
 Пусть (u, φ) — карта M в лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$.

Полож $\forall \alpha \in \mathcal{H}_0^k(M)$ и коэффициенты у этих координатных-
 же $\{\alpha_{i_1 \dots i_k} := \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \in C^\infty(U)\}_{i_1, \dots, i_k=1}^n$.

Знаясь, что α — тензор, то $\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ имеем

$$X_i|_u = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (X_i^j \in C^\infty(U)), \text{ то } \alpha(X_1, \dots, X_k)|_u = \\ = \alpha_{i_1 \dots i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} = (\alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k})(X_1, \dots, X_k),$$

то есть локально

$$\alpha|_u = \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \quad (\text{где } \underline{\text{deb.}} \otimes \text{ — тензорное произведение})$$

Таким образом, k -формы — это тензоры ранга k .

Определение (pullback) $F \in C^\infty(M, N)$ (где

M, N — ∞ -многообразия) называется $F^*: \mathcal{H}_0^k(N) \rightarrow \mathcal{H}_0^k(M)$

($\forall k \in \mathbb{Z}_+$):

$$F^* \alpha(X_1, \dots, X_k) := \alpha(F_* X_1, \dots, F_* X_k)$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, де для $X \in \mathcal{X}(M)$ $F_* X \in C^\infty(M, TN)$: $(F_* X)_p = d_p F(X_p) \quad \forall p \in M$. ($d_p F(X_p) \in T_{F(p)} N$).

Лем. Також $\forall p \in M$ $(F^* \alpha)(X_1, \dots, X_k)(p) = \alpha_{F(p)}(d_p F((X_1)_p), \dots, d_p F((X_k)_p))$. З нашої означень випливає, що функція

$F^* \alpha \in \mathcal{X}_0^k(M) \quad \forall \alpha \in \mathcal{X}_0^k(N)$, локально: якщо (U, φ) і (V, ψ) - карти M і N з локальними координатами $(x^1, \dots, x^m)$ і $(y^1, \dots, y^n)$

визначено ($U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$), $\alpha|_V = \alpha_{a_1 \dots a_k} dy^{a_1} \otimes \dots \otimes dy^{a_k}$, то $F^* \alpha|_{U \cap F^{-1}(V)} = \alpha_{a_1 \dots a_k} \frac{\partial F^{a_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial F^{a_k}}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$

(тут одна з $a_1, \dots, a_k = \overline{1, n}$, $i_1, \dots, i_k = \overline{1, m}$) ($\frac{\partial F^a}{\partial x^i}$ - частини розкладу локального задання F у визначених карт) у останній формі замість $\alpha_{a_1 \dots a_k}$ коректніше писати $\alpha_{a_1 \dots a_k} \circ F$; взагалі $F^* \alpha$ визначається значеннями α лише у точках $F(M)$.

Ex. Для $f \in C^\infty(M)$ $df: p \mapsto d_p f \in T_p^* M$ — 1-форма:

$$df(X)(p) = d_p f(X_p) = X_p(f) = X(f)(p) \text{ для } \forall X \in \mathcal{X}(M), p \in M, \text{ можно } df(X) = X(f) \text{ (локально: } = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i).$$

Пусть теперь $f \in C^\infty(N)$, а $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$(F^* df)(X) = df(F_* X) = (F_* X)(f) = [\text{дифференциал}] = X(f \circ F) = d(f \circ F)(X), \text{ можно } F^* df = d(f \circ F)$$

def. $\omega \in \mathcal{X}_0^k(M)$ называется завязанным, если $\forall p \in M$ ω_p антисимметрична $\Leftrightarrow \forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M), \sigma \in S_k$

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)$$

Ex. При $k=2$: $\omega(Y, X) = -\omega(X, Y) \forall X, Y$.

лем. Замечая, $\omega(X, X) = 0$. Взаимно, для любого k

и завязанного k -формы ω если $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$

исчезают $f^1, \dots, f^k \in C^\infty(M)$ такие, что $\sum_{i=1}^k (f^i)^2 > 0$ и $f^i X_i = 0$,

то $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$, замечая, $\omega = 0$ при $k > n = \dim M$ (Всп.)

Рем. ω замкнута $\Leftrightarrow \forall$ карта (U, φ) з лок. коор.
 $(x^1, \dots, x^n)$ якщо $\omega|_U = \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$, то
 $\forall i_1, \dots, i_k \neq \overline{1, n} \forall \sigma \in S_k \quad \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = \text{sign } \sigma \cdot \alpha_{i_1 \dots i_k}$ (при
 $k=2: \alpha_{\bar{j}i} = -\alpha_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$). (Впр.) Зокрема, якщо
серед $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$ однакових індексів, то $\alpha_{i_1 \dots i_k} = 0$
(з цього теж випливає, що $\omega = 0$ при $k > n$).

Рем. Очевидно, що якщо ω і β замкнуті, то $\forall f, g \in C^\infty(M)$
 $f\omega + g\beta$ - замкнута.

Спр. Замкнуті форми утворюють підпростір у $\mathcal{X}_0^k(M)$.

Рем. Далі позначимо $\Omega^k(M)$ ^($n-k$) модуль замкнутих k -форм на M .
 $\Omega^k(M) \subset \mathcal{X}_0^k(M)$ з доб., $\Omega^0(M) = \mathcal{X}_0^0(M) = C^\infty(M)$;
 $\Omega^1(M) = \mathcal{X}_0^1(M)$. Як ми побачили, $\Omega^k(M) = 0$ при $k > n =$
 $= \dim M$.

доб. Для $\omega \in \mathcal{X}_0^k(M)$, $\beta \in \mathcal{X}_0^l(M)$ їх тензорне добутком

здесь $\alpha \otimes \beta : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{k+l} \rightarrow C^\infty(M)$

$\otimes$ ассоциативна:
 $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$
 можно менять места
 $\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma)$

$$(\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{k+l}) := \alpha(X_1, \dots, X_k) \beta(X_{k+1}, \dots, X_{k+l})$$

Лем. Очевидно, было $(k+l)$ -линейно можно $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{X}_0^{k+l}(M)$.
 $\otimes$ дистрибутивна: $(f\alpha + g\tilde{\alpha}) \otimes \beta = f\alpha \otimes \beta + g\tilde{\alpha} \otimes \beta$, $\alpha \otimes (f\beta + g\tilde{\beta}) = f\alpha \otimes \beta + g\alpha \otimes \tilde{\beta} \quad \forall \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, f, g$.
лев. Альтернирующей k -формой $\alpha \in \mathcal{X}_0^k(M)$ здесь

$$\text{Alt } \alpha \in \mathcal{X}_0^k(M) : X_1, \dots, X_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign } \sigma \cdot \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}),$$

$$\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M). \quad \underline{\text{Ex.}} \quad k=2: \text{Alt } \alpha(X, Y) = \frac{1}{2} (\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X))$$

Пр. 1 $\forall \alpha \in \mathcal{X}_0^k(M) \quad \text{Alt } \alpha \in \Omega^k(M)$

2. $\alpha \in \Omega^k(M) \Leftrightarrow \alpha = \text{Alt } \alpha$

def. Для $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ихним зовнішнім добутком звється $\alpha \wedge \beta := \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$.

Ex. Для $k=l=1$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$:

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \frac{1}{2} \left((\alpha \otimes \beta)(X, Y) - (\alpha \otimes \beta)(Y, X) \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha(X) \beta(Y) - \alpha(Y) \beta(X) \right) = \frac{1}{2} (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(X, Y).$$

Pr. (властивості зовнішнього добутку) $\forall \hat{\alpha} \in \Omega^k(M)$, $\hat{\beta} \in \Omega^l(M)$,
 $\gamma \in \Omega^m(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

$$1. \quad \alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$$

$$2. \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (= \text{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma))$$

$$3. \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$$

$$\underline{4.} \quad (f\alpha + g\hat{\alpha}) \wedge \beta = f\alpha \wedge \beta + g\hat{\alpha} \wedge \beta, \\ \alpha \wedge (f\beta + g\hat{\beta}) = f\alpha \wedge \beta + g\alpha \wedge \hat{\beta}.$$

Pr. $\forall \omega \in \Omega^k(M) \quad \forall$ карту (U, φ) $\exists$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$

$\exists!$ $\{\alpha_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ таковы, что

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Rem. Понятно $\forall p \in M \quad \exists \forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ в окр.

Р $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ образуют базис
пространства касательных форм на $T_p M$ (закрепим,
выбравшись этого пространства C_n^k , 0 при $k > n$).

Rem. $\forall \omega \in \Omega^k(N) \text{ и } F \in C^\infty(M, N) \quad F^* \omega \in \Omega^k(M)$ -
все напряжения валиваются с означень.

def. Зовнимним дифференциалом формы $\omega \in \Omega^k(M)$ звется
 $d\omega \in \Omega^{k+1}(M) : \forall X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$
$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \right),$$

де $\wedge$ позначає пропуск відповідного члена.

Рем. У частині інтеграла ця формула дається без $\frac{1}{k+1}$,
це пов'язано з іншим означенням $\wedge$; при цьому
формула у локальних координатах (див. нижче) збігається
на.

Еск. $k=0$: $df(X) = \frac{1}{1}((-1)^2 X(f) + 0) = X(f)$ - звичайний
диференціал

$k=1$: $d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} (X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]))$. Зауважимо,
що при $\alpha = df$ це $\frac{1}{2} (X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f)) = 0$.

Рез. Це означення коректне, тобто $d\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$.

Реш. Знайдемо формулу для зовнішнього диференціювання у
лох. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Нехай $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Оскільки $d\alpha$ - зовнішня $(k+1)$ -форма, вона повинна мати
формулу $d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n} (d\alpha)_{i_1 \dots i_{k+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$

(можливо, це ф-ми для однієї з α і $d\alpha$ на визн. координат-
ним окіл). Знайдемо, що коефіцієнти тут $k!$ і
 $(k+1)!$ раз визначено діями та коеф. розкладення по

$$\begin{aligned} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (k+1) \text{ раз впровадження порядку. Подімо:} \\ (d\alpha)_{i_1 \dots i_{k+1}} &= (k+1)! d\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{б. дов. група сим} \\ = 0, \text{ до } \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \end{array} \right] = \\ &= \frac{(k+1)!}{k+1} \left(\sum_{\hat{j}=1}^{k+1} (-1)^{\hat{j}+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_{\hat{j}}}} \left(\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{\hat{j}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right) \right) \right) = \\ &= \left[k! \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) = \alpha_{i_1 \dots i_k} \right] = \sum_{\hat{j}=1}^{k+1} (-1)^{\hat{j}+1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots \hat{i}_{\hat{j}} \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_{\hat{j}}}} \end{aligned}$$

Подімо

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n} \sum_{\hat{j}=1}^{k+1} (-1)^{\hat{j}+1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots \hat{i}_{\hat{j}} \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_{\hat{j}}}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\hat{j}}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} \quad \textcircled{=}$$

Переставимо dx^{i_j} вгору (для 1-го $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$):

$$\begin{aligned} & \textcircled{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}} (-1)^{j-1} dx^{i_j} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

У останній рівності ми перепозначили $i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}$ через $i_1, \dots, i_k$ (ці набори пробірають однакові множини значень), i_j - через i та додали нульові доданки (коли i збігається з одним з $i_1, \dots, i_k$). Отже:

$$\text{Соч. } d \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Рет. Використовуючи кососиметричність, можна з цієї гр-ли отримувати аналогічні і для індексів, не впорядкованих за зростанням, якщо потрібно.

Рн. (властивості зовнішнього диференціювання).

1. $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M): \alpha \mapsto d\alpha \in$ минимальное векторное пространство над $\mathbb{R}$.

2. $\forall \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^l(M)$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

3. $\forall \alpha \in \Omega^k(M) \quad d(d\alpha) = 0$.

Rem. Пусть $k=0$ 2. $\forall \alpha \in \Omega^0(M) \quad d(f \beta) = df \wedge \beta + f d\beta$.

Классификация: интегрируемость

Линейно M - n -вымерный м. многовид, $\forall \alpha \in \Omega^n(M) \subset \wedge^n T^*M$
локал. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\alpha|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ для $f \in C^\infty(U)$.
Линейно для локал. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ на $\tilde{U}$ $\alpha|_{\tilde{U}} = \tilde{f} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n$, то
на $U \cap \tilde{U}$ $\tilde{f} = f \cdot \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)_{i,j=1}^n$ - вычисл. якобиан перехода.

деф. Атлас M звется ориентированным, линейно $\forall$ глоб. форм. карт
выбор. переходу нае годатний якобиан. Два ориент. атласа экви-
валентни, линейно их объединя - ориентированный атлас. Клас экв-
валент. ориент. атласов звется ориентацией M , а M разом з α звется
ориентацией-ориентированным многовидом. M звется ориентованным,
линейно на нем $\exists$ ориентация (ориент. атлас).

Ек. Ориентовні. $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{R}P^n$ для четных n , $M \times N$ для ор. M, N .

Кеориентовні: $\mathbb{R}P^n$ для нечетных n , $M \times N$, где один из M, N не-
ориентованный.

def ACM-міри 0 за Жорданом, якщо $\exists$ карти $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ такі, що $\forall i \in \varphi_i(A \cap U_i)$ -міри 0 за Ж. у $\mathbb{R}^n$ (тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists \{(\chi_{ij}, \chi_{ij} > 0)\}_{j=1}^{l_i} : \varphi_i(A \cap U_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l_i} B_{\chi_{ij}}(\chi_{ij})$ (евкл. кулі); $\sum_{j=1}^{l_i} \chi_{ij}^n < \varepsilon$). ДСМ зветься удбовною, якщо ∂ -картат $\partial \mathcal{D}$ -міри 0 за Ж. Γ нехай M -орієнтований.

Th. $\forall$ удбовної ДСМ $\exists!$ лінійне $\int_{\mathcal{D}} : \Omega^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ таке, що $\forall$ карти (U, φ) з атласа, що задає орієнтацію з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ $\subset \forall \alpha \in \Omega^n(M)$ такої, що $\mathcal{D} \cap \text{supp } \alpha \subset U$, якщо $\alpha|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, то $\int \alpha = \int_{\varphi(\mathcal{D} \cap U)} f \circ \varphi^{-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (інтеграл Дікама).

Уся Th. і задає def. $\int_{\mathcal{D}} \alpha$ зветься інтегралом α по $\mathcal{D}$. При цьому $\int_{\mathcal{D}} \alpha$ будеться за допомогою розбиття одиниці.

def. Розбиттям одиниці на топ. просторі X зветься $\{\varphi_\alpha \in C(X)\}_{\alpha \in A}$ такий, що $\forall p \in X \exists$ відкр. $U \ni p : |\{\alpha \mid \text{supp } \varphi_\alpha \cap U \neq \emptyset\}| < \infty$, $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1 \quad \forall p$. Говорять, що воно нормоване по-критично $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, якщо $\forall \alpha \text{ suppp } \varphi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$.

Тн. 1. В $V^{\text{відкрите}}$ покриття $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ многовиду M можна вписати
 лок. скінченне відкрите покриття $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$ (тобто $\forall \mu \in M \exists \lambda: V_\mu \subset U_\lambda$
 $U_\lambda \subset V \rho \in M \exists \text{ відкр. } U \ni \rho: |\{\mu: U \cap V_\mu \neq \emptyset\}| < \infty$), для
 якого існує підпорядковане йому гладке фінитне розбиття
 одиниць $\{f_\mu \in C^\infty(M, [0, 1])\}_{\mu \in M}$ (тобто $\forall \mu \text{ supp } f_\mu$ - компакт)
2. В відкритого покриття M існує підпорядковане йому гладке розбиття
 одиниць.

Отже, ми вписуємо лок. скінченне відкр. покриття у атлас
 M , що задає орієнтацію, і знаходимо $\int \alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\oplus} f_\lambda \alpha =$
 $= \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \oplus)} (f_\lambda \varphi_\lambda) \circ \varphi_\lambda^{-1} dx_\lambda^1 \dots dx_\lambda^n$, де $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - відкр. розбиття
 одиниць, $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ - відкр. карти з лок. коорд. $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n) \subset$
 $\alpha|_{U_\lambda} = f_\lambda dx_\lambda^1 \wedge \dots \wedge dx_\lambda^n$. Сума скінченна, бо $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ підпоряд-
 коване локально скінченному покриттю, ~~яке~~ компакт
 $\oplus$ перетинається лише зі скінченною кільк. його елементів.

Def. Кудовна DCM має регулярну кенсу, якщо $\overline{D} = \overline{\text{Int } D}$ і ∂D - вкладена інерповерська в M (або $\partial D = \emptyset$).

Th. (Стокс). Якщо D -кудовна з рег. кенсою у орієнтованому M , то існує орієнтація ∂D така, що $\forall \alpha \in \Omega^{n-1}(M)$

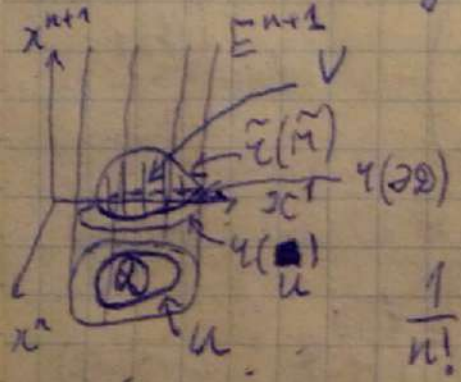
$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \underbrace{(\bar{i})^*}_{\leftarrow} \alpha, \quad \text{часто явно не пишуть}$$

де $\bar{i}: \partial D \rightarrow M$ - вкладення ($\bar{i}: P \mapsto P$).

Доведення цих трьох теорем - див. Костников.

(показові приклади - зав. у Goldring - Minicozzi) $[(U, \varphi)]$

Рн. Явно задана мінімальна крив-ня $\gamma \in E^{n+1}$ (що задана $f \in C^\infty(U)$) мінімізує об'єм серед гіперповерхонь, що містяться у $U \times \mathbb{R}$ (тобто $(\tilde{M}, \tilde{\gamma})$ таких, що $\tilde{\gamma}(\tilde{M}) \subset U \times \mathbb{R}$)



► Розглянемо n -форму (зовнішню) на $U \times \mathbb{R}$:

$$\omega(X_1, \dots, X_n) := \frac{\det(X_1, \dots, X_n, \xi)}{n!} = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 & -f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n & -f_n \\ x_1^{n+1} & \dots & x_n^{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

і нехай $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \left(-\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \right)$ продовжену на $U \times \mathbb{R}$

З властивостей $\det$, це дійсно n -лінійна на $C^\infty(U \times \mathbb{R})$ гладка кососиметрична форма. У координатах:

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^a}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \right) = \frac{1}{n! \sqrt{1+|\nabla f|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & -f_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & -f_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1-a} \cdot (-f_a)}{n! \sqrt{1+|\nabla f|^2}}, & a=1, \dots, n \\ 1, & a=n+1 \end{cases}$$

тому розкладення за зовн. базисом n -форм $(n! \xi \text{ пн.к.е.})$:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \left(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^{n+1} \right)$$

Зокрема,

$$d\alpha = 0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^{n+1} =$$

гармонізація на $(-1)^{i+1}$

$$= (-1)^{n+1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n+1} = 0, \text{ бо } f \text{ задов. рівняння}$$

ін-у (позначена як вище, можна div еволюція).

Нехай мерен $(\tilde{M}, \tilde{\epsilon})$ - ін-а у $U \times \mathbb{R}$. На ній у розк. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ (поверхня орієнтована, бигр. карта - з атласа, що задов. орієнт.) :

$$\tilde{\epsilon}^* \alpha = n! \tilde{\epsilon}^* \alpha \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^n = n! \left(\tilde{\epsilon}_* \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right), \dots, \right.$$

$$\left. \tilde{\epsilon}_* \left(\frac{\partial}{\partial u^n} \right) \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n} & -f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^n} & 1 \end{pmatrix} du^1 \wedge \dots \wedge du^n =$$

$$= (-1)^n \langle [\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_n], \xi \rangle du^1 \wedge \dots \wedge du^n, \text{ де } \left\{ \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \right\}_{(a=i, n+1, i=\overline{1, n})} - \text{ч. розк. коорд.}$$

р-інн розк. задов. $\tilde{\epsilon}$, і гда $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$[\nu_1, \dots, \nu_n] := \underbrace{\det}_{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n+1}^1} \\ \nu_1 & \dots & \nu_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_n^1 & \dots & \nu_n^{n+1} \end{pmatrix} - \text{зависимости векторный доброты}$$

(используем теорему), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ - стандартные евклидовы.

Затем, для базисной ин-ти use $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -f_1 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & -f_n \\ f_1 f_2 & & f_n & 1 \end{pmatrix} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$

$$= \frac{1+|\nabla F|^2}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{и } [\gamma_1, \dots, \gamma_n] = (-f_1, \dots, -f_n, 1) = \text{[redacted]})$$

$$\stackrel{(-1)^n}{=} \sqrt{1+|\nabla F|^2} \text{ } \S) \text{ Отсюда,}$$

$$\gamma^* \alpha = \sqrt{1+|\nabla F|^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dV_g - \text{форма объема } (u, \gamma)$$

(то $\det G = 1+|\nabla F|^2$, габ. формула для базиса канонич).

Аналогично для зависимой $(\tilde{M}, \tilde{\gamma})$ в локал. коорд. $dV_{\tilde{g}} =$

$$= |[\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n]| du^1 \wedge \dots \wedge du^n. \text{ Дифференциально } \left(\text{номинально } \tilde{\gamma}_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \right),$$

$$|[\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n]|^2 = \left\langle \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \\ \tilde{\gamma}_1 & \dots & \tilde{\gamma}_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\gamma}_n & \dots & \tilde{\gamma}_n^{n+1} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \tilde{\gamma}_1^1 & \dots & \tilde{\gamma}_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} & \tilde{\gamma}_1^{n+1} & \dots & \tilde{\gamma}_n^{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle = \left[\begin{array}{l} \text{правильно} \\ \text{множим} \\ \text{базис и} \\ \text{для фор-} \\ \text{мальной det} \end{array} \right]$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \\ \tilde{q}_1 & \dots & \tilde{q}_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{q}_n & \dots & \tilde{q}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \tilde{q}_1^1 & \dots & \tilde{q}_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \tilde{q}_1^{n+1} & \dots & \tilde{q}_n^{n+1} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} n+1 \tilde{q}_1 & \dots & \tilde{q}_n \\ \tilde{q}_1 \langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_1 \rangle & \dots & \langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{q}_n \langle \tilde{q}_n, \tilde{q}_1 \rangle & \dots & \langle \tilde{q}_n, \tilde{q}_n \rangle \end{pmatrix} =$$

первый столбец

$$= [\text{погрн. за } \text{~~первый столбец~~}] = (n+1) \det \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} - \langle \tilde{q}_1, \det \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & \dots & \tilde{q}_n \\ \tilde{g}_{21} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} \rangle + \dots + (-1)^n \langle \tilde{q}_n, \det \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & \dots & \tilde{q}_n \\ \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n-1,1} & \dots & \tilde{g}_{n-1,n} \end{pmatrix} \rangle = (n+1 - \underbrace{\dots}_{n})$$

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} = \det \tilde{G}_1$$

Отсюда, если $\mathcal{D} \subset U$ кубовна и $(\tilde{M}, \tilde{\epsilon})$ — ^{определ.} инерционная макс., то $\tilde{\epsilon}(\tilde{M}) \subset U \times \mathbb{R}$ и $\exists \tilde{\mathcal{D}} \subset \tilde{M}$ кубовна с $\tilde{\epsilon}(\partial \tilde{\mathcal{D}}) = \epsilon(\partial \mathcal{D})$ (вспомогат. δ и кубов $\tilde{\epsilon}(\tilde{\mathcal{D}}) \subset U \times \mathbb{R}$). Замечаете, го области $V \subset U \times \mathbb{R}$, то определена $\epsilon(\mathcal{D}) \cup \tilde{\epsilon}(\tilde{\mathcal{D}})$, (узкая часть)

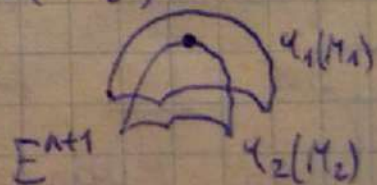
Тр. Следствие, обратная ориентация макс., то

$$\int_{\mathcal{D}} \epsilon^* \alpha - \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\epsilon}^* \alpha = \int_V d\alpha = 0.$$

Рк. (сильный принцип максимума для явно заданных ин-ов)
 Если (U, γ_1) и (U, γ_2) - явно заданные мин. инер-ии в E^{n+1}
 на фиксированной зв'язній $U \subset \mathbb{R}^n$, явно заданные $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$
 выпн., $f_1 \leq f_2$ и $\exists p \in U: f_1(p) = f_2(p)$, то $f_1 = f_2$
 (тобто $\gamma_1 = \gamma_2$).

Выводится из сильного принципа макс. для разв'язков эллип-
 ных диф. уравн., глв. Colding - Minicozzi. $\triangle$

Слж. Если (M_1, γ_1) и (M_2, γ_2) - повні зв'язні мин. инер-ии
 в E^{n+1} , одна з яких лежить по одну відк. від іншої
 (тобто, наприклад, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \gamma_1(M_1) = U \sqcup V$, і $\gamma_2(M_2) \subset$
 $U \cup \gamma_1(M_1)$) і $\gamma_1(M_1) \cap \gamma_2(M_2) \neq \emptyset$, то
 $\gamma_1(M_1) = \gamma_2(M_2)$.



Застосовуємо лемму Рк локально спочатку в околі
 точки перетину, потім за повнотою і зв'язністю - в одній області.

Впр. Нехай (M, γ) - поверхня у E^3 , і на $U \subset M$ визначене (шадне) одичичне норм. поле ξ . Нехай $\Phi: U \rightarrow S^2$ - задане нм гауссове відображення: $\forall p \in U \quad |\xi_p| = 1$, тому можна визначити $\Phi: p \mapsto \xi_p \in S^2 \subset E^3$. Тоді, якщо $H|_U = 0$, то Φ конформне: І ф.р. g поверхні проєкційна (третій фундаментальній формі) $\Phi^* h$, де h - станд. метрика S^2 . Чи вірне обернене? Як щодо інт. поверхні у E^{n+1} для довільного n ?

Мінімальні поверхні в E^3 і комплексні числа

Нехай (M, γ) - мін. поверхня у E^3 . Зокрема, $\Delta \gamma = 0$. За Тл Корна - Ліхтенштайна, $\forall p \in M \exists$ ізометричні лок. коорд. (u, v) на відр. $V \ni p$, тобто у цих коорд. рін. u -на (І ф.р.) поверхні має вигляд

$$g = e^{2\omega(u,v)} (du^2 + dv^2).$$

(тобто пов-ня лок. конформно еквівалентна E^2) Ми будемо вважати $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, де U - відкрита однозв'язна (закрита, $\mathbb{R}^2$ або B_ε^2). Отже, для лок. задання γ $(u, v) \mapsto (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\omega}, \quad g_{12} = 0: \\ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \right)^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x^k}{\partial v} \right)^2 = e^{2\omega}, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} = 0.$$

Лем. В ізотермічних координатах лапласіан Δ має вигляд

$$\Delta = e^{-2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

► У позначеннях $u^1 = u, u^2 = v$ $\Delta = g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right)$.
Оскільки $g = \begin{pmatrix} e^{2\omega} & 0 \\ 0 & e^{2\omega} \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\omega} & 0 \\ 0 & e^{-2\omega} \end{pmatrix}$, тобто $g^{ij} = e^{-2\omega} \delta^{ij}$.

За формулами, $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \omega_u$, $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \omega_v$ (Вспр.),
тому $g^{ij} \Gamma_{ij}^k = 0$ для $k = 1, 2$. $\triangle$

Отже, з $\Delta \gamma = 0$ і Лем.,

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial v^2} = 0, \quad k = \overline{1,3},$$

тобто x^k гармонічні в звичайному "евклідовому" сенсі.

Введемо комплексну координату $z := u + i v$ (i менше вважати ^{фіктив.} $U \subset \mathbb{C}$ - однозв'язна). Для $k = \overline{1,3}$ визначимо

$$\varphi^k : U \rightarrow \mathbb{C} : z = u + i v \mapsto \frac{\partial x^k}{\partial u} - i \frac{\partial x^k}{\partial v}.$$

Для них виконуються такі умови Коші-Рімана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \right) &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^2} = - \frac{\partial^2 x^k}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(- \frac{\partial x^k}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(- \frac{\partial x^k}{\partial v} \right) &= - \frac{\partial^2 x^k}{\partial u \partial v} = - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \right), \quad k = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Тобто $\{\varphi^k\}_{k=1}^3$ - голоморфні на U . За побудовою, $\forall k = \overline{1,3}$

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \varphi^k(z) dz = x^k + c^k \quad \text{для деяких } z_0 \in U, c^k \in \mathbb{R}$$

(інтеграл не залежить від шляху в силу однозв'язності).

Зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^3 (\varphi^k)^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^k}{\partial v} \right)^2 - 2i \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \right) = 0, \quad \text{бо}$$

координати ізотермічні. Тобто

$$(\varphi^1 - i\varphi^2)(\varphi^1 + i\varphi^2) = -(\varphi^3)^2$$

Покладемо $f := \varphi^1 - i\varphi^2$, $g := \frac{\varphi^3}{\varphi^1 - i\varphi^2}$. Тоді

$$\varphi^1 + i\varphi^2 = -g^2 f$$

тобто $\varphi^1 = \frac{f}{2}(1 - g^2)$, $\varphi^2 = \frac{if}{2}(1 + g^2)$, $\varphi^3 = fg$.

$f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$, причому f не є голоморфна. Будемо вважати, що її нулі ізольовані (Впр. Як це обмежує поверхню?).

Тоді g - мероморфна, причому її полюси порядку $\leq m$ відновляються нулем f порядку $\geq 2m$ (бо $g^2 f = -\varphi^1 - i\varphi^2$ голоморфна). Вірно й обернене (з тих же викладок):

Сл. (Представлення Вефштрасса - Еппера) Нехай $U \subset \mathbb{C}^n$ - ^{Впр. 1} одностов'язна, $z_0 \in U$, $\{c^k\}_{k=1}^3 \in \mathbb{R}$ і $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ такі, що f голоморфна, g мероморфна, і її полюси порядку $\leq m$ - це нулі f порядку $\geq 2m$. Тоді $\varphi = (x^1, x^2, x^3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$, де

$$x^1 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1-g^2) f dz + C^1$$

$$x^2 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z i(1+g^2) f dz + C^2$$

$$x^3 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z z f g dz + C^3$$

(гармонична
на $\mathbb{C}$).

задає мінімальну поверхню в E^3 (ізометрично параметр.).

Ex. 1. (Поверхня Еннепера). $U = \mathbb{C}$, $f = 1$, $g = z$ -

регулярні; нехай $z_0 = 0$, $C^1 = C^2 = C^3 = 0$:

$$x^1 = \operatorname{Re} \int_0^z (1-z^2) dz = \operatorname{Re} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) = \operatorname{Re} \left(u + iv - \frac{(u+iv)^3}{3} \right) = u - \frac{u^3}{3} + u v^2$$

$$x^2 = \operatorname{Re} \int_0^z i(1+z^2) dz = \operatorname{Re} i \left(z + \frac{z^3}{3} \right) = \operatorname{Re} \left(iu - v + i \frac{(u+iv)^3}{3} \right) = -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v$$

$$x^3 = \operatorname{Re} \int_0^z z z dz = \operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} (u+iv)^2 = u^2 - v^2$$

Бона не буває!

2. (Трикутник) $U = \mathbb{C}$, $f = \frac{1}{2} e^{-i\alpha} e^z$, $g = e^{-z}$ - регулярні;

$z_0 = 0$, $C^1 = \cos \alpha$, $C^2 = C^3 = 0$:

$$x^1 = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} e^{-i\alpha} (e^z - e^{-z}) dz + \cos \alpha = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} e^{-i\alpha} (e^z + e^{-z}) - e^{-i\alpha} \right) + \cos \alpha$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} e^{-i\alpha} (e^{u+iv} + e^{-u-iv}) \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} ((\cos \alpha - i \sin \alpha) (e^u \cos v + e^{-u} \cos v))$$

$$+ i e^u \sin v + e^{-u} \cos v - i e^{-u} \sin v) = \cos 2 \operatorname{ch} u \cos v + \sin 2 \operatorname{sh} u \sin v.$$

$$x^2 = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} i \bar{e}^{-i\alpha} (e^z + e^{-z}) dz = \frac{1}{2} \operatorname{Re} ((i \cos \alpha + \sin \alpha) (e^z - e^{-z})) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} ((i \cos \alpha + \sin \alpha) (e^u \cos v + i e^u \sin v - e^{-u} \cos v + i e^{-u} \sin v)) =$$

$$= -\cos 2 \operatorname{ch} u \sin v + \sin 2 \operatorname{sh} u \cos v.$$

$$x^3 = \operatorname{Re} \int_0^z \bar{e}^{-i\alpha} dz = \operatorname{Re} (e^{-i\alpha} z) = \operatorname{Re} ((\cos \alpha - i \sin \alpha) (u + i v)) =$$

$$= \cos \alpha \cdot u + \sin \alpha \cdot v$$

Поэтому

$$\chi(u, v) = \cos \alpha \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \cos v \\ -\operatorname{ch} u \sin v \\ u \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \sin v \\ \operatorname{sh} u \cos v \\ v \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{векторы из метри-} \\ \text{ческого пространства: } I \text{ ф. ф.} \\ \operatorname{ch}^2 u (du^2 + dv^2) \end{array} \right)$$

При $\alpha = 0$ мы имеем катеноид (и $\mathbb{C}$ тоже α -метно покрывает, тогда можно обозначить $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — цилиндр (у изотермической параметризации).

Впр. Да ли всегда χ представление для явно заданной поверхности? А $\chi \in \mathbb{R}^4$ (гип. Римана)?

Впр. Выразить кривизну поверхности через f и g .

Впр. (Представлення Ейзенхартта). Перевіряючи, що $\forall f, g, h$:

$U \rightarrow \mathbb{C}$ ^(U - однозв. функція) така, що $\varphi^1 := h(f+g)$, $\varphi^2 := -ih(f-g)$, $\varphi^3 :=$
 $= f - h^2 g$, $\varphi^4 := -i(f + h^2 g)$ голоморфні, $z_0 \in U$, $\{c^k\}_{k=1}^4 \subset \mathbb{R}$
визначається $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^4$, де $x^k = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \varphi^k(z) dz + c^k$, $k=1, 4$,

задає ізотермічно параметризовану мінімальну поверхню в E^4

Реш. У загальному випадку f і g задаються на рімановій поверхні (1-вих. комплексна функція).