

Основи алгебраїчної топології

Петров Є.В.

7 травня 2025 р.

Зміст

1	Гомотопія	3
2	Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність	7
3	Гомотопії шляхів	11
4	Фундаментальна група	14
5	Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи	18
6	Однозв'язні простори	23
7	Накриття	26
8	Накриття та шляхи	33
9	Накриття та фундаментальні групи	37
9.1	Теорема про обчислення фундаментальної групи	37
9.2	Приклади обчислення фундаментальних груп	42
10	Підняття у накриваючий простір. Морфізми накрить	47
10.1	Підняття відображень у накриваючий простір	47
10.2	Морфізми накрить. Ізоморфні накриття. Накриття з відміченими точками	54
11	Автоморфізми накрить та регулярні накриття	61

12 Існування та єдиність накрить	75
12.1 Напівлокальна і локальна однозв'язність	75
12.2 Теорема про існування та єдиність накрить	80
12.3 Накриття і фундаментальні групи многовидів	89
13 Теорема Зейферта – ван Кампена та її застосування	96
13.1 Формулювання та ідея доведення теорема Зейферта – ван Кампена	97
13.2 Застосування: фундаментальні групи поверхонь	104
14 Гомотопічні групи	112
14.1 Основні означення та властивості	112
14.2 Накриття та гомотопічні групи	120
14.3 Надбудови та обчислення гомотопічних груп	124
15 Застосування гомотопічних груп	129
15.1 Інваріантність вимірності. Нерухомі точки	129
15.2 Теорема Борсука – Улама та її наслідки	132
15.3 Степінь відображення сфер	135
Доповнення. Необхідні відомості з алгебри	143
Література	155
Частина 2. Гомології	157

Алгебраїчна (алгебрична) топологія – це розділ топології, що вивчає інваріанти алгебраїчної природи: групи, кільця, векторні простори тощо, які певним чином визначаються даним топологічним простором. Найчастіше вони є інваріантами відносно слабшого за гомеоморфність відношення еквівалентності – гомотопічної еквівалентності. Алгебраїчна топологія як предмет систематичного вивчення виникла у кінці дев’ятнадцятого сторіччя у роботах Анрі Пуанкаре (як і два основні підходи, яким ми приділятимемо увагу – гомотопічний і гомологічний), але й досі займає центральне місце в топології та її застосуваннях. Ми почнемо з деяких важливих для неї загальнотопологічних понять.

1 Гомотопія

У цьому розділі ми побачимо, що топологія встановлює відношення еквівалентності не тільки між просторами, а й між відображеннями. Поняття гомотопії формалізує інтуїтивне уявлення про ”деформацію” одного відображення в інше. Нагадаємо, що літерою I традиційно позначається відрізок $[0, 1]$.

Означення 1.1. Нехай $f, g: X \rightarrow Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. *Гомотопією* f і g зветься неперервне відображення $F: X \times I \rightarrow Y$ таке, що $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$ для будь-якої $x \in X$. Гомотопія F відображень f і g зветься *A -гомотопією*, де $A \subset X$ – деяка підмножина, якщо крім цього $F(x, s) = f(x) = g(x)$ для будь-яких $x \in A$ і $s \in I$. Якщо існує гомотопія (відповідно, A -гомотопія) f і g , то говорять, що f *гомотопне* (A -гомотопне) g і пишуть $f \sim g$ ($f \sim_A g$).

Зауваження. Тут на $X \times I$ вводиться, як зазвичай, топологія прямого добутку. A -гомотопію ще називають гомотопією, що *зв’язана на A* . З означення випливає, що для її існування необхідне співпадіння f і g на A : $f|_A = g|_A$. ”Звичайна” гомотопія (т. зв. *вільна*) – це $\emptyset$ -гомотопія.

Твердження 1.1. *A -гомотопність відображень є відношенням еквівалентності на $\{f \in C(X, Y) \mid f|_A = f_A\}$ (підмножині неперервних відображень з X у Y , що збігаються на A з деяким фіксованим f_A). Зокрема, гомотопність – відношення еквівалентності на $C(X, Y)$.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом еквівалентності для A -гомотопності (звичайно, вони тоді будуть виконуватися й у частковому випадку гомотопності).

- $f \sim_A f$ для будь-якого f з $f|_A = f_A$: неважко перевірити, що $F(x, s) := f(x)$ задає потрібну A -гомотопію.
- Якщо $f \sim_A g$ і F – відповідна A -гомотопія, то визначимо $G: X \times I \rightarrow Y$ умовою $(x, s) \mapsto F(x, 1 - s)$. Воно неперервне як композиція неперервних відображень, $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$, $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ для $x \in X$, $G(x, s) = F(x, 1 - s) = f_A(x) = f(x) = g(x)$ для $x \in A$, $s \in I$, тому G – A -гомотопія g і f . Отже, $g \sim_A f$.
- Нехай $f \sim_A g$, $g \sim_A h$. Зауважимо, що при цьому $h|_A = g|_A = f|_A = f_A$ за означенням A -гомотопності. Нехай F і G – відповідні A -гомотопії. Визначимо $H: X \times I \rightarrow Y$ умовою

$$H(x, s) := \begin{cases} F(x, 2s), & s \in [0, \frac{1}{2}); \\ G(x, 2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене, бо при $s = \frac{1}{2}$ маємо $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ за умовою. Його неперервність випливає з неперервності F і G (аналогічно до неперервності добутку шляхів; див. також [3, с. 63-64]). При цьому $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ для $x \in X$ і $H(x, s) = f_A(x) = f(x) = h(x)$ для $x \in A$, $s \in I$ за властивостями F і G . Отже, H – A -гомотопія, тобто $f \sim_A h$.

■

Зауваження. Гомотопія F задає для кожного $s \in I$ відображення $f_s := F(\cdot, s): X \rightarrow Y$ (тобто $f_s(x) = F(x, s)$ для $x \in X$), що є неперервним як композиція неперервних $x \mapsto (x, s)$ (перевірте, що таке відображення $X \rightarrow X \times I$ дійсно неперервне) і F . Тобто гомотопію можна розуміти як "неперервну сім'ю" відображень $\{f_s\}_{s \in I} \subset C(X, Y)$ або як "шлях" $I \rightarrow C(X, Y): s \mapsto f_s$. При цьому за означенням $f_0 = f$ і $f_1 = g$, тобто цей "шлях" з'єднує f і g у $C(X, Y)$.

Виникає природне запитання: чи можна ввести топологію на $C(X, Y)$ так, щоби гомотопії дійсно були шляхами у цьому просторі? Відповідь міститься у наступній вправі (див. також [2, с. 145-148], [3, с. 145-148, 186-187] або [17, с. 281-290]).

Вправа 1.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Для будь-яких компактної $K \subset X$ і відкритої $U \subset Y$ позначимо

$$W(K, U) := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

1. Показати що $\{W(K, U)\}$ (для усіх пар K і U) є передбазою деякої топології на $C(X, Y)$. Вона зветься *компактно-відкритою*.
2. Показати, що якщо X компактний а Y метричний з метрикою ρ , то компактно-відкрита топологія на $C(X, Y)$ породжується метрикою *рівномірної збіжності*

$$\sigma(f, g) := \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}.$$

Показати, що для $Y = \mathbb{R}$ (з евклідовою метрикою) збіжність послідовності функцій у цій метриці рівносильна рівномірній збіжності (хоча б для випадку $X = I$).

3. Показати, що якщо X локально компактний та хаусдорфовий, то шляхи у $C(X, Y)$ з компактно-відкритою топологією – це в точності відображення вигляду $s \mapsto F(\cdot, s)$, де F – деяка гомотопія.

Зауваження. З аналогічних міркувань випливає, що для кожної $x \in X$ відображення $I \rightarrow Y: s \mapsto F(x, s)$ неперервне, а отже є шляхом, що з'єднує точки $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$. Зокрема, $f(x)$ і $g(x)$ повинні тоді лежати в одній компоненті лінійної зв'язності Y (в силу твердження 28.2 лекцій з топології).

Наслідок 1.1. Якщо $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопні, то для будь-якої $x \in X$ її образи $f(x)$ і $g(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності Y .

Приклад 1.1. Нехай $X = \{x\}$ – одноточковий простір. Будь-які відображення $f, g: X \rightarrow Y$ у довільний простір Y мають вигляд $f: x \mapsto f(x)$, $g: x \mapsto g(x)$ (і автоматично є неперервними як постійні). Якщо f і g гомотопні, то $f(x)$ і $g(x)$ можна з'єднати шляхом в Y за попереднім наслідком. Неважко побачити, що в даному випадку вірне й обернене: якщо $h: I \rightarrow Y$ – шлях, що з'єднує $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x, s) := h(s)$ задає гомотопію f і g .

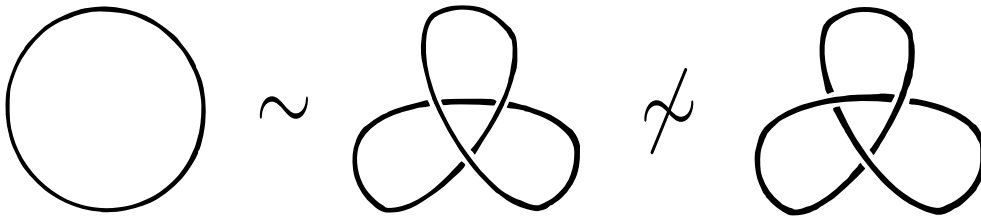
Приклад 1.2. Нехай $Y \subset \mathbb{R}^n$ – опукла підмножина. Тоді для будь-яких топологічного простору X , підмножини $A \subset X$ і відображень $f, g \in C(X, Y)$ таких, що $f|_A = g|_A$, маємо $f \sim_A g$. Дійсно, відображення $F: X \times I \rightarrow Y$, що визначене умовою $F(x, s) := (1-s)f(x) + sg(x)$ (тобто з'єднує $f(x)$ і $g(x)$ відрізками, пор. з прикладом 23.7 лекцій з топології) є тоді неперервним і задовольняє означенню A -гомотопії f і g .

Вправа 1.2. Показати, що те ж саме вірне для зірчатої $Y \subset \mathbb{R}^n$ і $A = \emptyset$ (тобто для вільних гомотопій).

Приклад 1.3. Нехай тепер $Y \subset S^n$ – відкрита напівсфера n -вимірної сфери для $n \geq 1$, тобто її перетин з відкритим напівпростором $\mathbb{R}^{n+1}$ відносно деякої гіперплощини, що проходить через початок координат (центр сфери), а простір X довільний. Аналогічно до минулого прикладу можна показати, що тоді будь-які $f, g \in C(X, Y)$ є A -гомотопними (звичайно, якщо $f|_A = g|_A$). Гомотопія F при цьому будується за допомогою менших дуг великих кіл сфери (випишіть її явно, використовуючи формулу з прикладу 23.8 лекцій з топології).

Зауваження. Інколи розглядають гомотопії між відображеннями, що задовольняють деяким додатковим обмеженням, такі, що усі "проміжні" відображення f_s задовольняють тим же обмеженням. У цьому випадку гомотопію зазвичай називають *ізотопією*.

Приклад 1.4. (*Ручним*) вузлом називається регулярне вкладення кола S^1 у $\mathbb{R}^3$, тобто будь-яке ін'єктивне відображення $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, координатні функції якого (від кутового параметра кола) належать до класу C^1 , а вектор f' з їхніх похідних ненульовий у кожній точці. Зокрема, f є вкладенням в силу компактності кола і наслідку 20.4 курсу топології. (*Гладкою*) *ізотопією* вузлів f і g зветься їх гомотопія $F \in C^1(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$ така, що $f_s = F(\cdot, s): S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$ (де гладкість розуміємо як вище). Якщо існує ізотопія вузлів, вони називаються *ізотопними*. Нижче зображені т. зв. *тривіальний вузол*, вузол, що ізотопний тривіальному, і вузол, що їм не ізотопний – *трилисник* (але доведення цієї неізотопності потребує спеціальних інваріантів). Детальніше див. у [6], [7, с. 213-239], [8], а також приклад 13.3 далі та посилання там.



Розглянемо цікавий приклад застосування гомотопії до задачі продовження відображень (іншими прикладами цього класу топологічних задач є теорема Тітце з курсу топології та вправа 2.3 далі). Нагадаємо, що межею стандартної замкненої кулі є стандартна сфера: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Твердження 1.2. Нехай Y – топологічний простір і $n \geq 1$. Неперервне відображення $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ продовжується до неперервного $\bar{f}: D^n \rightarrow Y$ (тобто $\bar{f}|_{S^{n-1}} = f$) тоді й тільки тоді, коли воно гомотопне постійному відображенню.

Доведення. $\Rightarrow$ Отже, нехай $f \in C(S^{n-1}, Y)$ продовжується до $\bar{f} \in C(D^n, Y)$. Виберемо $x_0 \in S^{n-1}$ і покладемо $F(x, s) := \bar{f}((1-s)x + sx_0)$. Таке $F: S^{n-1} \times I \rightarrow Y$ коректно визначене в силу опуклості D^n , неперервне як композиція неперервних, $F(\cdot, 0) = \bar{f}|_{S^{n-1}} = f$ і $F(\cdot, 1) = \bar{f}(x_0) = f(x_0)$ – постійне відображення. Тобто F і буде потрібною гомотопією.

$\Leftarrow$ Тепер нехай існує гомотопія F відображення f і постійного відображення S^{n-1} у точку $y_0 \in Y$. Побудуємо $\bar{f}: D^n \rightarrow Y$ наступним чином:

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} y_0, & |x| \in [0, \frac{1}{2}]; \\ F\left(\frac{x}{|x|}, 2 - 2|x|\right), & |x| \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\bar{f}$ коректно визначене і неперервне, оскільки при $|x| = \frac{1}{2}$ маємо $F\left(\frac{x}{|x|}, 1\right) = y_0$. При цьому для $|x| = 1$ (тобто $x \in S^{n-1}$) за побудовою $\bar{f}(x) = F(x, 0) = f(x)$. Таким чином, $\bar{f}|_{S^{n-1}} = f$. $\blacksquare$

2 Гомотопічна еквівалентність.

Ретракти. Стяжність

Відношення еквівалентності між топологічними просторами не обмежуються гомеоморфізмом. Розглянемо більш загальне відношення, що є основним саме для алгебраїчної топології.

Означення 2.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Неперервні відображення $f: X \rightarrow Y$ і $g: Y \rightarrow X$ зветься *гомотопічно оберненими* одне до одного, якщо $g \circ f \sim id_X$ і $f \circ g \sim id_Y$. Якщо такі f і g існують, то X та Y називають *гомотопічно еквівалентними* й пишуть $X \sim Y$.

Лема 2.1. Нехай $f_0, f_1: X \rightarrow Y$, $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ – неперервні відображення топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ – такі підмножини, що $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, і $f_0 \sim_A f_1$, $g_0 \sim_B g_1$. Тоді $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Доведення. З умови випливає, що $f_0|_A = f_1|_A$ і $g_0|_B = g_1|_B$, тому $(g_0 \circ f_0)|_A = (g_1 \circ f_1)|_A$. Якщо F – A -гомотопія f_0 і f_1 , а G – B -гомотопія g_0 і g_1 , то $H(x, s) := G(F(x, s), s)$ визначає A -гомотопію $g_0 \circ f_0$ і $g_1 \circ f_1$. Дійсно, це неперервне відображення $X \times I \rightarrow Z$ як композиція неперервних, $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x))$ та аналогічно для $s = 1$, і $H(x, s) = G(F(x, s), s) = G(f_0(x), s) = g_0(f_0(x)) = g_1(f_1(x))$ для $x \in A$ та довільного $s \in I$, бо $f_0(x) \in B$. $\blacksquare$

Твердження 2.1. Гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.

Доведення. Перевіримо аксіоми еквівалентності.

- $X \sim X$ для будь-якого простору X : достатньо взяти $f = g = id_X$.
- Умови $X \sim Y$ та $Y \sim X$ еквівалентні за означенням (воно симетричне відносно X та Y).
- Покажемо тепер транзитивність. Нехай $X \sim Y$ та $Y \sim Z$, тобто існують $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, X)$, $h \in C(Y, Z)$ і $k \in C(Z, Y)$ такі, що $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_Z$ і $k \circ h \sim id_Y$. Тоді $h \circ f \in C(X, Z)$ і $g \circ k \in C(Z, X)$ гомотопічно обернені:

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ id_Y \circ k = h \circ k \sim id_Z,$$

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X,$$

де перші гомотопності в кожному рядку випливають з умови та попередньої леми для випадку вільних гомотопій (застосованої двічі, до кожної з композицій). Таким чином, $X \sim Z$.

■

Приклад 2.1. Якщо $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфізм, то f і f^{-1} неперервні та гомотопічно обернені (бо вони просто обернені). Отже, гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні.

Приклад 2.2. Простір $\mathbb{R}^n$ гомотопічно еквівалентний одноточковому простору $\{y\}$. Дійсно, вибір відображень тут невеликий: нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{y\}$ переводить всі точки $\mathbb{R}^n$ в y , а $g: \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводить y в якусь $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обидва ці відображення постійні, а отже неперервні. Тоді $f \circ g = id_{\{y\}}$ і $(g \circ f)(x) = x_0$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$. З прикладу 1.2 випливає, що постійне відображення $g \circ f$ опуклої $\mathbb{R}^n$ в себе гомотопне $id_{\mathbb{R}^n}$ (при цьому $F(x, s) = (1-s)x_0 + sx$ задає потрібну гомотопію). Отже, f і g гомотопічно обернені. Також зауважимо, що в силу транзитивності тоді $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Далі цей приклад узагальнимо у прикладі 2.4.

Вправа 2.1. Показати, що з $X \sim Y$ і $Z \sim W$ випливає $X \times Z \sim Y \times W$. Так, в силу попереднього прикладу, циліндр гомотопічно еквівалентний колу: $S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1 \times \{y\} \cong S^1$.

Зауваження. Ці приклади демонструють, зокрема, що гомотопічна еквівалентність є слабшим за гомеоморфність відношенням еквівалентності: класи гомотопічної еквівалентності, взагалі кажучи, ширші. Вона не зберігає компактність і навіть потужність множини (але зберігає зв'язність та лінійну зв'язність, див. наступну вправу). Далі ми наведемо ще декілька прикладів гомотопічних еквівалентностей, що пов'язані з поняттям ретракції.

Вправа 2.2. Показати, що якщо $X \sim Y$ і простір X зв'язний (відповідно, лінійно зв'язний), то й простір Y (лінійно) зв'язний. Більш того, у загальному випадку гомотопічно еквівалентні X та Y мають однакові кількості компонент зв'язності та лінійної зв'язності відповідно. Чи вірні аналогічні твердження для властивостей локальних зв'язності та лінійної зв'язності?

Означення 2.2. Ретракцією топологічного простору X на його підмножину $A \subset X$ зветься будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow A$ таке, що $f|_A = id_A$, тобто $f(x) = x$ для будь-якої $x \in A$. Множину A у цьому випадку звуть ретрактом X .

Приклад 2.3. Будь-яка одноточкова підмножина $\{x\} \subset X$ будь-якого простору є його ретрактом: відповідною ретракцією є постійне відображення у x .

Вправа 2.3. Показати, що $A \subset X$ є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли будь-яке неперервне відображення $g: A \rightarrow Y$ можна продовжити неперервним $\bar{g}: X \rightarrow Y$.

Означення 2.3. Ретракція простору X на $A \subset X$ зветься *деформаційною* (відповідно, *строгою деформаційною*), якщо вона гомотопна (A -гомотопна) тотожному відображенню id_X . У цьому випадку A називають (*строгим*) *деформаційним ретрактом* X .

Зауваження. Тут, коли йдеться про гомотопність ретракції $f: X \rightarrow A$ і тотожного $id_X: X \rightarrow X$, фактично мається на увазі не f , а його композиція з включенням $i: A \rightarrow X$.

Твердження 2.2. Якщо $A \subset X$ – деформаційний ретракт топологічного простору X , то $X \sim A$.

Доведення. Дійсно, нехай $f: X \rightarrow A$ – деформаційна ретракція, а $i: A \rightarrow X$ – відображення включення. Тоді $f \circ i = id_A$ та $i \circ f \sim id_X$ за умовою (див. попереднє зауваження). Отже, ці відображення гомотопічно обернені, тому $X \sim A$.

■

Приклад 2.4. Всі ретракти будь-якої опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$, зокрема, всі одноточкові підмножини $\{x\} \subset X$, є строгими деформаційними. Дійсно, якщо A – ретракт X , то відповідна ретракція f та id_X збігаються на A (обидва дорівнюють id_A), а тому A -гомотопні за прикладом 1.2. Аналогічно, всі ретракти будь-якої зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$ є деформаційними в силу вправи 1.2. Тоді з попереднього твердження випливає, що, зокрема, $X \sim \{x\}$ для будь-якої зірчатої (зокрема опуклої) $X \subset \mathbb{R}^n$ і кожної $x \in X$.

Приклад 2.5. Аналогічно до попереднього прикладу, всі ретракти будь-якої відкритої напівсфери S^n для $n \geq 1$ є строгими деформаційними в силу прикладу 1.3. Зокрема, така напівсфера гомотопічно еквівалентна кожній свої точці.

Приклад 2.6. Сфера S^{n-1} є строгим деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (тут $n \geq 1$). Дійсно, $f(x) := \frac{x}{|x|}$, очевидно, визначає ретракцію. При цьому $F(x, s) := (1-s) \frac{x}{|x|} + s x$ задає неперервне відображення $F: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (бо відрізок $\left[\frac{x}{|x|}, x\right]$ не проходить через 0), $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ і $F(x, s) = x$ для будь-яких $x \in S^{n-1}$, $s \in I$. Отже, F є S^{n-1} -гомотопією, тому ретракція f – строга деформаційна. Зокрема, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ за попереднім твердженням. Інший спосіб це побачити – використати вправу 2.1: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, як пам'ятаємо, гомеоморфний $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (ми використовували цей факт у прикладі 23.11 з курсу топології), що, у свою чергу, гомотопічно еквівалентний $S^{n-1} \times \{y\} \cong S^{n-1}$.

Означення 2.4. Топологічний простір X зветься *стяжним*, якщо він гомотопічно еквівалентний одноточковому простору: $X \sim \{y\}$.

Твердження 2.3. *Топологічний простір X стяжний тоді й тільки тоді, коли існує $x_0 \in X$ така, що $\{x_0\}$ – деформаційний ретракт X .*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай X стяжний, тобто існують гомотопічно обернені $f: X \rightarrow \{y\}$ і $g: \{y\} \rightarrow X$. Це постійні відображення (пор. з прикладом 2.2), зокрема, g переводить y у якусь $x_0 \in X$. Тоді $g \circ f: x \mapsto x_0$ – ретракція X на $\{x_0\}$, і $g \circ f \sim id_X$ за умовою, тобто ця ретракція деформаційна.

$\Leftarrow$ Достатність тут випливає з твердження 2.2. ■

Зауваження. Насправді в якості x_0 можна використати будь-яку точку X (перевірте; це випливає з наступного твердження і того, що будь-які два постійні відображення у лінійно зв'язний простір гомотопні за

прикладом 1.1). З прикладів 2.4 і 2.5 випливає, що зірчаті (зокрема опуклі) підмножини $\mathbb{R}^n$ та відкриті напівсфери S^n (при $n \geq 1$) стяжні. Іншим прикладом стяжного простору є скінченне (зв'язне) *дерево*, яке можна побудувати, послідовно склеюючи відрізки кінцями. Наступне твердження легко виводиться з вправи 2.2, але ми доведемо його безпосередньо.

Твердження 2.4. *Будь-який стяжний топологічний простір є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай X стяжний. З попереднього твердження випливає, що ретракція f на деяку $\{x_0\} \subset X$ гомотопна id_X . В силу наслідку 1.1, тоді для будь-якої $x \in X$ точки $x_0 = f(x)$ та $x = id_X(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X . Це й означає, що цей простір лінійно зв'язний.

■

3 Гомотопії шляхів

Наступна вправа демонструє, що поняття гомотопності шляхів у топологічному просторі є не дуже змістовним без додаткових обмежень. Це мотивує наступне за цією вправою означення.

Вправа 3.1. Показати, що шляхи $f, g: I \rightarrow X$ у топологічному просторі X гомотопні (вільно, тобто у сенсі означення 1.1 при $A = \emptyset$) тоді й тільки тоді, коли $f(I)$ та $g(I)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X .

Означення 3.1. Шляхи f і g у топологічному просторі X зі спільним початком та кінцем ($f(0) = g(0)$ і $f(1) = g(1)$) будемо називати *гомотопними*, якщо вони $\{0, 1\}$ -гомотопні. Класи еквівалентності шляхів відносно цього відношення еквівалентності (тобто $\{0, 1\}$ -гомотопності) звуться їх *гомотопічними класами*.

Зауваження. Тобто f і g гомотопні, якщо існує $\{0, 1\}$ -гомотопія (або *гомотопія з закріпленими кінцями*) – відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = f(0) = g(0)$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, для кожного s відображення $f_s = F(\cdot, s)$ (див. зауваження після твердження 1.1) теж буде шляхом з тими ж початком та кінцем, що f і g . Нагадаємо, що $\{0, 1\}$ -гомотопність є відношенням еквівалентності в силу твердження 1.1. У подальшому

гомотопність шляхів будемо завжди розуміти саме в сенсі цього нового означення, при цьому писатимемо просто $f \sim g$, а описану вище $\{0, 1\}$ -гомотопію F будемо називати *гомотопією шляхів f і g* . Гомотопічний клас шляху f позначатимемо через $[f]$ (тобто $[f] = [g]$ означає, що $f \sim g$).

Приклад 3.1. З прикладу 1.2 випливає, що у опуклій підмножині $X \subset \mathbb{R}^n$ будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні (це вірно й для зірчатої X , і взагалі для будь-якого стяжного простору, як покажемо далі у твердженні 6.1).

Приклад 3.2. Аналогічно, будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем у відкритій напівсфері S^n для $n \geq 1$ гомотопні за прикладом 1.3 (звичайно, така напівсфера теж стяжна).

Лема 3.1. Нехай $f_0, f_1, g_0, g_1: I \rightarrow X$ – шляхи у просторі X , причому $f_0(0) = f_1(0) = x$, $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0) = y$, $g_0(1) = g_1(1) = z$. Якщо $f_0 \sim f_1$ і $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Доведення. Нехай F, G – гомотопії f_0 і f_1 , g_0 і g_1 відповідно. Визначимо відображення $H: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$H(t, s) := \begin{cases} F(2t, s), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t - 1, s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1}{2}$ маємо $F(1, s) = y = G(0, s)$ для будь-якого $s \in I$ за умовою. При цьому $H(\cdot, 0) = f_0 * g_0$, $H(\cdot, 1) = f_1 * g_1$, $H(0, \cdot) = F(0, \cdot) = x$ і $H(1, \cdot) = G(1, \cdot) = z$. Отже, H – гомотопія шляхів $f_0 * g_0$ і $f_1 * g_1$. ■

Зауваження. Нагадаємо, що, взагалі кажучи, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?). Але він є таким ”у гомотопічному сенсі”, як демонструє наступна лема.

Лема 3.2. Нехай $f, g, h: I \rightarrow X$ – шляхи у просторі X такі, що $f(1) = g(0) = y$, $g(1) = h(0) = z$. Тоді $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

Доведення. За означенням добутку шляхів маємо

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ g(4t - 1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ h(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Аналогічно,

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(4t - 2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ h(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{4}]; \\ g(4t - s - 1), & t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]; \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t \in [\frac{s+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{4}$ і $t = \frac{s+2}{4}$ маємо $f(1) = y = g(0)$ і $g(1) = z = h(0)$ відповідно. Крім того, $F(\cdot, 0) = (f * g) * h$, $F(\cdot, 1) = f * (g * h)$, $F(0, \cdot) = f(0)$, $F(1, \cdot) = h(1)$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Зокрема, звідси випливає, що для гомотопічних класів шляхів можна писати $[f * g * h]$, не розставляючи дужки (замість $[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$). За індукцією отримуємо, що це так і для довільної скінченної кількості шляхів.

Лема 3.3. Нехай $f: I \rightarrow X$ – шлях у просторі X з початком $f(0) = x$ та кінцем $f(1) = y$. Тоді $e_x * f \sim f \sim f * e_y$.

Доведення. Нагадаємо, що постійний шлях e_x – це просто постійне відображення I в точку x . Доведемо другу гомотопність, перша доводиться аналогічно (зробіть це). За означенням добутку шляхів:

$$(f * e_y)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{s+1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{2}$ маємо $f(1) = y$, і $F(\cdot, 0) = f * e_y$, $F(\cdot, 1) = f$, $F(0, \cdot) = f(0) = x$, $F(1, \cdot) = y$. Таким чином, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Лема 3.4. Нехай $f: I \rightarrow X$ – шлях у просторі X з початком $f(0) = x$ та кінцем $f(1) = y$. Тоді $f * \bar{f} \sim e_x$ і $\bar{f} * f \sim e_y$.

Доведення. Згадаймо, що обернений шлях $\bar{f}$ визначений умовою $\bar{f}(t) = f(1 - t)$. Зауважимо, що друга гомотопність впливає з першої (просто поміняємо f та $\bar{f}$ місцями і помітимо, що $\bar{\bar{f}} = f$), отже достатньо довести першу. За означенням добутку:

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(2 - 2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

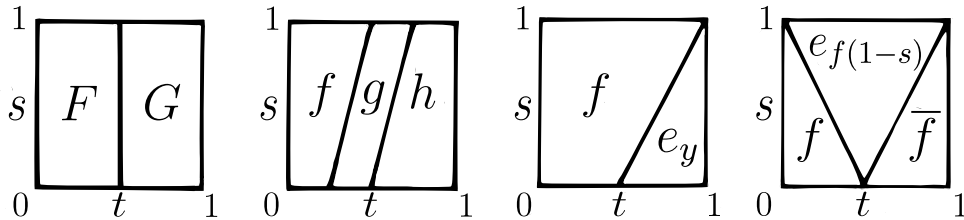
Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1 - s), & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2 - 2t), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{2}$ і $t = \frac{1+s}{2}$ маємо одне й те саме значення $f(1 - s)$. При цьому $F(\cdot, 0) = f * \bar{f}$, $F(\cdot, 1) = e_x$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = f(0) = x$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Деяке уявлення про логіку побудови гомотопій в цих лемах дають наступні діаграми, де область визначення $I \times I$ розділена на частини, кожна з яких позначена символом відображення, що "відповідає" за гомотопію на цій підмножині:



4 Фундаментальна група

Необхідні відомості з теорії груп можна знайти у доповненні, зокрема, означення групи, гомоморфізма та ізоморфізма груп (означення А.1, А.2 та А.3 відповідно). У цьому та інших розділах, що присвячені фундаментальній групі, будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення. Нагадаємо також, що $G \simeq H$ означає ізоморфізм груп G і H .

Означення 4.1. Нехай X – топологічний простір. *Петлею* (або *замкненим шляхом*) у точці $x \in X$ зветься шлях $f: I \rightarrow X$ з початком та кінцем у x : $f(0) = f(1) = x$.

Теорема 4.1 (Конструкція фундаментальної групи). *Гомотопічні класи петель у точці x топологічного простору X з операцією $[f][g] := [f * g]$ утворюють групу.*

Доведення. Перш за все, зауважимо, що для петель f і g у x добуток $f * g$ визначений і теж є петлею у x , тому можна говорити про його клас $[f * g]$. Переконаємося тепер у коректності введеної операції. Дійсно, якщо $[f_0] = [f_1]$ і $[g_0] = [g_1]$, то $[f_0 * g_0] = [f_1 * g_1]$ за лемою 3.1. Асоціативність операції випливає з леми 3.2:

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f][g * h] = [f]([g][h])$$

для будь-яких гомотопічних класів петель $[f]$, $[g]$ і $[h]$. З леми 3.3 маємо, що $[f][e_x] = [e_x][f] = [f]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[e_x]$ є нейтральним елементом (одиноцею групи). Нарешті, з леми 3.4 випливає, що $[f][\bar{f}] = [\bar{f}][f] = [e_x]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[\bar{f}]$ є елементом, що обернений до $[f]$: $[f]^{-1} = [\bar{f}]$. Разом це й означає, що гомотопічні класи $[f]$ з даною операцією утворюють групу.

■

Означення 4.2. Група, що описана в теоремі 4.1, зветься *фундаментальною групою* простору X у точці x . Її позначають через $\pi_1(X, x)$:

$$\pi_1(X, x) = \{[f] \mid f \in C(I, X): f(0) = f(1) = x\}.$$

Зауваження. Фундаментальну групу ще називають *першою гомотопічною групою*. Сенс цієї назви, а також індексу 1 у її позначенні, стане зрозумілим пізніше (див. розділ 14).

Вправа 4.1. Нехай f – петля в x . Оскільки $f(0) = f(1) = x$, це відображення факторизується у неперервне $\hat{f} := f/\sim: I/\{0,1\} \rightarrow X$, де $I/\{0,1\}$ можна ототожнити з S^1 (згадаймо приклад 16.5 лекцій з топології). І навпаки, для будь-якого неперервного $\hat{f}: S^1 \rightarrow X$, що переводить точку $1 = e^0 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ у x , відображення $f: I \rightarrow X: t \mapsto \hat{f}(e^{2\pi it})$ є петлею в x . Тут ототожнюємо S^1 з множиною комплексних чисел модуля 1, як ми вже робили раніше у курсі топології. Показати, що тоді $\{1\}$ -гомотопним відображенням кола відповідають гомотопні шляхи, тобто множина гомотопічних класів таких відображень (відносно $\{1\}$ -гомотопії) таким чином ототожнюється з $\pi_1(X, x)$, більш того, це ототожнення можна перетворити на ізоморфізм груп. Для цього, звичайно, доведеться визначити

добуток класів відображень $S^1 \rightarrow X$ (див. задачу 32.3 у [3]). Таким чином, отримуємо альтернативний опис фундаментальної групи.

Приклад 4.1. Фундаментальна група одноточкового простору, очевидно, тривіальна: $\pi_1(\{x\}, x) = \{[e_x]\}$.

Приклад 4.2. Для опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якої $x \in X$ кожна петля f у x гомотопна постійній в силу прикладу 3.1: $[f] = [e_x]$. Тому фундаментальна група також тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$.

Твердження 4.1. Нехай шлях $h: I \rightarrow X$ з'єднує точки x та y топологічного простору X . Тоді відображення фундаментальних груп

$$\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y): [f] \mapsto [\bar{h} * f * h]$$

коректно визначене та є ізоморфізмом груп.

Доведення. Зауважимо, що для будь-якого класу $[f] \in \pi_1(X, x)$ шлях f починається і закінчується в x , тому визначений добуток $(\bar{h} * f) * h$, що починається і закінчується в y , а отже його клас $[\bar{h} * f * h]$ належить до $\pi_1(X, y)$. Перевіримо коректність визначення α : якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то з леми 3.1 (застосованої двічі) випливає, що $(\bar{h} * f_0) * h \sim (\bar{h} * f_1) * h$, тобто $[\bar{h} * f_0 * h] = [\bar{h} * f_1 * h]$.

Покажемо тепер, що α – гомоморфізм груп. Для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\begin{aligned} \alpha([f][g]) &= \alpha([f * g]) = [\bar{h} * f * g * h] = [\bar{h} * f * e_x * g * h] = \\ &= [\bar{h} * f * h * \bar{h} * g * h] = [\bar{h} * f * h][\bar{h} * g * h] = \alpha([f])\alpha([g]), \end{aligned}$$

де третя рівність випливає з лем 3.1 і 3.3, а четверта – з лем 3.1 і 3.4 (і, звичайно, ми постійно використовуємо лему 3.2, записуючи гомотопічні класи добутків без розставляння дужок).

Розглянемо відображення

$$\beta: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x): [f] \mapsto [h * f * \bar{h}].$$

Це теж коректно визначений гомоморфізм груп, що перевіряється аналогічно до α . Покажемо, що α і β взаємно обернені. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\beta(\alpha([f])) = [h * \bar{h} * f * h * \bar{h}] = [e_x * f * e_x] = [f],$$

де теж використали усі перелічені вище леми (як саме?). Таким чином, $\beta \circ \alpha = id_{\pi_1(X, x)}$. Аналогічно встановлюємо, що $\alpha \circ \beta = id_{\pi_1(X, y)}$. Це означає, що α і β дійсно взаємно обернені, тому вони є бієкціями, а отже ізоморфізмами груп.

■

Наслідок 4.1. Якщо топологічний простір X лінійно зв'язний, то фундаментальні групи у будь-яких двох точках X ізоморфні: $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ для будь-яких $x, y \in X$.

Зауваження. Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору не залежить від точки з точністю до ізоморфізма. Тому часто для такого простору X позначають через $\pi_1(X)$ єдиний клас еквівалентності (ізоморфності) його фундаментальних груп, і говорять про нього просто як про *фундаментальну групу* X . Наприклад, кажуть, що фундаментальна група опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ тривіальна (в силу прикладу 4.2): $\pi_1(X) = \{e\}$. Зауважимо також, що α з твердження 4.1, взагалі кажучи, залежить від h .

Вправа 4.2. Показати, що α не змінюється при заміні h в межах гомотопічного класу (тобто на $\tilde{h} \sim h$). Показати також, що α взагалі не залежить від h тоді й тільки тоді, коли група $\pi_1(X, x)$ абелева (тобто $[f][g] = [g][f]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$).

Існує цікавий клас топологічних просторів, для яких фундаментальні групи завжди абелеві.

Приклад 4.3. Топологічною групою зветься множина G зі структурами групи та топологічного простору, що узгоджені у наступному сенсі: відображення добутку $\mu: G \times G \rightarrow G: (a, b) \mapsto ab$ та відображення взяття оберненого елемента $\iota: G \rightarrow G: a \mapsto a^{-1}$ є неперервними (де $G \times G$ розглядається з топологією прямого добутку). Прикладами топологічних груп є простір $\mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів, коло $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ з операцією комплексного добутку, тори $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ зі структурами прямого добутку груп (див. означення А.4) і топологічних просторів, матричні групи $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ та $O(1, 1)$ з топологіями, що описані у прикладі 28.2, вправах 28.1 і 28.2 курсу топології, а також матрична група $GL(n, \mathbb{R})$ з прикладу 18.1 того ж курсу, топологія на якій вводиться аналогічним чином (як саме?).

Перевірте, що вони всі дійсно є топологічними групами. Детальніше з топологічними групами та їхніми загальнотопологічними властивостями можна ознайомитися за главою 5х у [3] або за доповненням 5 у [16].

Вправа 4.3. Показати, що для будь-якої топологічної групи G і для кожного її елемента $a \in G$ фундаментальна група $\pi_1(G, a)$ абелева. Тут можна використати критерій абелевості, що наведений у вправі 4.2, або діяти наступним чином. Помітимо, що для будь-яких петель $f, g: I \rightarrow$

G у точці $e \in G$ (одиниці цієї групи) їхній "груповий добуток", тобто відображення $f \odot g: I \rightarrow G: t \mapsto f(t)g(t)$, теж буде петлею у e в силу неперервності групової операції G (чому?). Таким чином, на множині $\Omega(G, e)$ таких петель виникає бінарна операція

$$\odot: \Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \rightarrow \Omega(G, e): (f, g) \mapsto f \odot g.$$

Показати, що ця операція перетворює $\Omega(G, e)$ на групу і що вона коректно "факторизується" у операцію

$$\odot: \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \rightarrow \pi_1(G, e): ([f], [g]) \mapsto [f \odot g].$$

Показати, що ця операція збігається з груповою операцією $\pi_1(G, e)$, тобто $[f] \odot [g] = [f][g]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(G, e)$, і є комутативною, що й демонструє абелевість $\pi_1(G, e)$. Для цього можна розглянути шлях $(f * e_e) \odot (e_e * g)$ для довільних $f, g \in \Omega(G, e)$. Нарешті, показати, що усі фундаментальні групи топологічної групи ізоморфні навіть якщо вона не є лінійно зв'язною. Для цього можуть знадобитися техніка і результати наступного розділу та відображення *лівого зсуву* на довільний елемент $a \in G$, що діє множенням на цей елемент зліва: $L_a: G \rightarrow G: b \mapsto ab$. Воно, зокрема, є гомеоморфізмом G на себе (чому?). Див. також розділи 32.7х та 33.5х у [3].

5 Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи

Перевіримо тепер, що фундаментальна група – дійсно інваріант: гомотопічний (значення цього терміна пояснюється у зауваженні після наслідку 5.1), а отже й топологічний. Для цього знадобиться поняття індукованого гомоморфізма, що важливе й саме по собі.

Твердження 5.1 (Конструкція індукованого гомоморфізма). *Нехай X та Y – топологічні простори, $\varphi: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, точка $x \in X$. Тоді відображення*

$$\varphi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)): [f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

коректно визначене і має наступні властивості:

1. φ_* – гомоморфізм груп.

2. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ для будь-яких неперервних $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow Z$.

3. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$.

4. Якщо відображення $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ гомотопні, F – їхня гомотопія і $\alpha: \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$ – ізоморфізм, що побудований з використанням шляху $t \mapsto F(x, t)$ як у твердженні 4.1, то $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$.

Доведення. Якщо $f: I \rightarrow X$ – петля в x , то з $f(0) = f(1) = x$ випливає $(\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x)$. Тому відображення $\varphi \circ f: I \rightarrow Y$, що неперервне як композиція неперервних, є петлею в $\varphi(x)$. Крім того, якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ за лемою 2.1 (для гомотопії шляхів f_0 і f_1 та тривіальної гомотопії), тому $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1]$. Отже, φ_* визначене коректно. Перевіримо заявлені властивості.

1. Для будь-яких гомотопічних класів петель $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо з означень

$$\begin{aligned} \varphi_*([f][g]) &= \varphi_*([f * g]) = [\varphi \circ (f * g)] = \\ &= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \varphi_*([g]), \end{aligned}$$

тобто φ_* – дійсно гомоморфізм.

2. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$:

$$\psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = (\psi \circ \varphi)_*([f])$$

за означеннями.

3. Це так, бо $(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]$ для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$.

4. Іншими словами, нам потрібно показати, що діаграма з груп та їхніх гомоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, \varphi(x)) & \\ \varphi_* \nearrow & \downarrow \alpha & \\ \pi_1(X, x) & & \pi_1(Y, \psi(x)) \\ \psi_* \searrow & & \end{array}$$

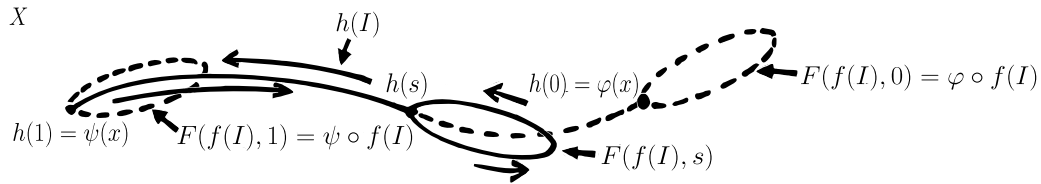
комутативна (тобто усі можливі комбінації стрілочок рівні). Отже, нехай F – гомотопія φ і ψ : $F(\cdot, 0) = \varphi$, $F(\cdot, 1) = \psi$. Позначимо шлях з умови через $h: I \rightarrow Y: t \mapsto F(x, t)$. Він з'єднує $F(x, 0) = \varphi(x)$ і $F(x, 1) = \psi(x)$. Тоді, згідно з побудовою у твердженні 4.1, для

довільного $[f] \in \pi_1(X, x)$ будемо мати $\alpha(\varphi_*([f])) = [\bar{h} * (\varphi \circ f) * h]$. Нам треба довести, що цей гомотопічний клас дорівнює $\psi_*([f]) = [\psi \circ f]$, тобто побудувати гомотопію петель $(\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $\psi \circ f$ у $\psi(x)$. За означеннями оберненого шляху і добутку шляхів, для кожного $t \in I$ маємо

$$((\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h)(t) = \begin{cases} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \varphi(f(4t - 1)), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $H: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$H(t, s) := \begin{cases} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1-s}{4}]; \\ F(f(\frac{4t+s-1}{3s+1}), s), & t \in [\frac{1-s}{4}, \frac{1+s}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$



Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{4}$ маємо вірну рівність $F(x, s) = F(f(0), s)$, а при $t = \frac{1+s}{2}$ — $F(x, s) = F(f(1), s)$. При цьому $H(0, s) = H(1, s) = F(x, 1) = \psi(x)$ для будь-якого $s \in I$, отже H дійсно є потрібною нам гомотопією петель $H(\cdot, 0) = (\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $H(\cdot, 1) = \psi \circ f$. Ідея її побудови полягає у наступному: для кожного s ми проходимо уздовж h від точки $\psi(x) = h(1)$ до $h(s) = F(x, s)$, далі уздовж петлі $t \mapsto F(f(t), s)$ у точці $F(x, s)$ і назад у $\psi(x)$ уздовж h , як показано на рисунку вище.

■

Означення 5.1. Відображення φ_* з попереднього твердження будемо називати гомоморфізмом фундаментальних груп, що *індукований* відображенням φ (у точці x).

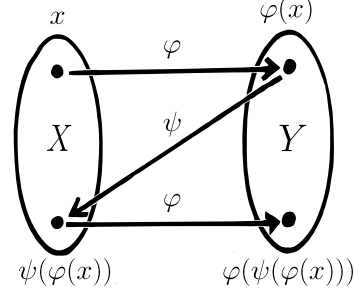
Зауваження. Звичайно, φ_* залежить не тільки від φ , а й від точки x , але її зазвичай не вказують явно у позначенні, що може привести до певних незручностей.

Твердження 5.2. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow X$ – гомотопічно обернені відображення топологічних просторів. Тоді

- $\varphi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $x \in X$;
- $\psi_*: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, \psi(y))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $y \in Y$.

Доведення.

Те, що це гомоморфізми, вже доведено у пункті 1. попереднього твердження. Залишилося довести їх бієктивність. Фіксуємо якусь довільну $x \in X$, і далі розглядаємо такі індуковані гомоморфізми (див. також ілюстрацію справа):



$$\begin{aligned}\varphi_*: & \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)), \\ \psi_*: & \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x))), \\ \varphi'_*: & \pi_1(X, \psi(\varphi(x))) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))\end{aligned}$$

де штрих нам знадобився саме для компенсації відсутності базової точки у позначенні. З умови гомотопічної оберненості $\psi \circ \varphi \sim id_X$ маємо

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = \alpha \circ (id_X)_* = \alpha \circ id_{\pi_1(X, x)} = \alpha,$$

де перші три рівності випливають з пунктів 2., 4. і 3. попереднього твердження відповідно, а α – деякий ізоморфізм $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$. Зокрема, звідси випливає, що гомоморфізм ψ_* сюр'єктивний. Дійсно, для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$

$$[f] = \alpha(\alpha^{-1}([f])) = \psi_*(\varphi_*(\alpha^{-1}([f]))) \in \psi_*(\pi_1(Y, \varphi(x))).$$

Аналогічним чином з $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ отримуємо, що $\varphi'_* \circ \psi_* = \beta$ для деякого ізоморфізма $\beta: \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))$ (перевірте це). У свою чергу, з цього випливає ін'єктивність ψ_* . Дійсно, нехай $\psi_*([f]) = \psi_*([g])$ для деяких $[f], [g] \in \pi_1(Y, \varphi(x))$. Тоді

$$\beta([f]) = \varphi'_*(\psi_*([f])) = \varphi'_*(\psi_*([g])) = \beta([g]),$$

й тому $[f] = [g]$. Отже ψ_* – бієкція, а тоді й $\varphi_* = (\psi_*)^{-1} \circ \alpha$ теж. Аналогічно доведемо друге твердження, починаючи з $y \in Y$ (або просто використаємо симетричність гомотопічної еквівалентності).

■

Наслідок 5.1. Якщо лінійно зв'язні топологічні простори X та Y гомотопічно еквівалентні, то $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, y)$ для будь-яких точок $x \in X$ та $y \in Y$.

Доведення. Випливає з попереднього твердження та наслідку 4.1. ■

Зауваження. У позначеннях, що введені в зауваженні після наслідку 4.1, це виглядатиме як $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ для лінійно зв'язних гомотопічно еквівалентних просторів X та Y (або просто $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$, бо це класи ізоморфності груп). Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору зберігається (з точністю до ізоморфізма) при гомотопічних еквівалентностях – є, як кажуть, його *гомотопічним інваріантом*. Зокрема, вона є й топологічним інваріантом. Точніше буде сказати, що гомотопічна інваріантність – це властивість *функтора* з *категорії* топологічних просторів з *відміченими точками* та їх неперервних відображень, що переводять відмічені точки у відмічені, у категорію груп та їх гомоморфізмів, що визначений конструкціями фундаментальної групи та індукованого гомоморфізма. Детальніше про цю термінологію див., наприклад, у [2, с. 153-157], [10, с. 911-918], [11, с. 162-165, с. 209-213 перекладу] або [14, с. 209-214].

Твердження 5.3. Для будь-яких топологічних просторів X, Y і будь-якої точки $(x, y) \in X \times Y$

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y),$$

тобто фундаментальна група прямого добутку X та Y ізоморфна прямому добутку їх фундаментальних груп (див. означення A.4).

Доведення. Зауважимо, що для будь-якої петлі f у (x, y) її композиції з канонічними проєкціями $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ є петлями у x та y відповідно. Тому можна коректно визначити відображення $\alpha: \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ умовою $\alpha([f]) := ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f])$. Це відображення буде гомоморфізмом груп:

$$\begin{aligned} \alpha([f][g]) &= ((p_X)_*([f][g]), (p_Y)_*([f][g])) = \\ &= ((p_X)_*[f](p_X)_*[g], (p_Y)_*[f](p_Y)_*[g]) = \\ &= ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f])((p_X)_*[g], (p_Y)_*[g]) = \alpha([f]) \alpha([g]) \end{aligned}$$

для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$ за означенням і гомоморфністю $(p_X)_*$ та $(p_Y)_*$. Щоб перевірити бієктивність α , побудуємо відображення $\beta: \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x, y))$, що переводить кожну пару гомотопічних класів $([g], [h]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ у гомотопічний клас $[(g, h)]$ відображення $(g, h): I \rightarrow X \times Y$, яке визначене умовою $t \mapsto (g(t), h(t))$ і є петлею у (x, y) (див. також зауваження після доведення теореми 26.1

курсу топології). Воно коректно визначене, бо з гомотопностей шляхів $g_0 \sim g_1$ і $h_0 \sim h_1$ випливає $(g_0, h_0) \sim (g_1, h_1)$ (перевірте це), і

$$\alpha(\beta([g], [h])) = \alpha([(g, h)]) = ([p_X \circ (g, h)], [p_Y \circ (g, h)]) = ([g], [h]),$$

$$\beta(\alpha([f])) = \beta([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = [(p_X \circ f, p_Y \circ f)] = [f],$$

тобто α і β взаємно обернені, а отже є ізоморфізмами. ■

Приклад 5.1. Згадаймо, що $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ для $n \geq 1$. Тоді з (топологічної) інваріантності фундаментальної групи, твердження 5.3, прикладу 4.2 та властивостей прямого добутку груп випливає, що

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x) \simeq \pi_1(S^{n-1}, y) \times \pi_1(\mathbb{R}, z) = \pi_1(S^{n-1}, y) \times \{[e_z]\} \simeq \pi_1(S^{n-1}, y)$$

для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, де $(y, z) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ – точка, у яку переходить x при гомеоморфізмі. Або у спрощених позначеннях для лінійно зв'язних просторів: $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ (при $n \geq 2$). Втім, цей ізоморфізм можна було встановити й без застосування добутків: він також випливає з прикладу 2.6 та гомотопічної інваріантності фундаментальної групи.

Зауваження. Твердження 5.3 також узагальнюється очевидним чином на прямий добуток будь-якої скінченної кількості множників (за індукцією або безпосередньо).

6 Однозв'язні простори

Введемо клас просторів, для яких фундаментальні групи найпростіші – тобто тривіальні.

Означення 6.1. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається *однотривіальним*, якщо всі його фундаментальні групи тривіальні: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$.

Зауваження. Лінійно зв'язний простір, що гомотопічно еквівалентний однотривіальному, також буде однотривіальним в силу наслідку 5.1. З наслідку 4.1 випливає, що умову тривіальності фундаментальної групи достатньо перевірити в одній точці. Неформально кажучи, вона означає, що будь-яку петлю у цьому просторі можна стягнути в точку (тобто вона гомотопна постійній). Виявляється, що вірна й більш загальна умова:

Твердження 6.1. *Топологічний простір є однозв'язним тоді й тільки тоді, коли він є лінійно зв'язним і у ньому будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні.*

Доведення. $\Leftarrow$ Достатність виконується автоматично, бо петлі – теж шляхи, отже за умовою кожна петля гомотопна постійній.

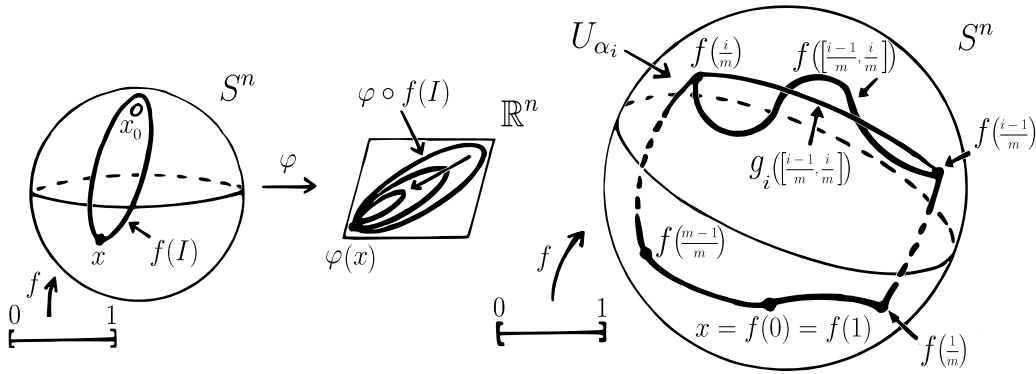
$\Rightarrow$ Нехай тепер X однозв'язний, f і g – якісь шляхи в X , і $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Нам потрібно побудувати їх гомотопію, тобто відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = x$ і $F(1, s) = y$ для будь-яких $t, s \in I$. Цю задачу можна інтерпретувати як продовження на квадрат $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ неперервного відображення, що задане на його межі $\partial(I \times I)$. Зауважимо, що $I \times I$ гомеоморфний замкненому кругу D^2 . Гомеоморфізм можна побудувати, наприклад, за допомогою центральної проєкції у площині, і при ньому межа квадрата переходить у межу круга – коло S^1 . Тому для побудови потрібно нам гомотопії шляхів достатньо побудувати продовження деякого неперервного відображення $\hat{h}: S^1 \rightarrow X$ на D^2 (перевірте це формально, використавши композиції з відповідним гомеоморфізмом аналогічно до міркувань у прикладі 6.2 нижче). Згідно з твердженням 1.2, для цього, у свою чергу, потрібно, щоб $\hat{h}$ було гомотопне постійному відображенню. Далі діємо аналогічно до вправи 4.1 (власне, потрібна гомотопність випливає з її твердження, але ми тут випишемо її окремо).

Розглянемо відображення $h: I \rightarrow X: t \mapsto \hat{h}(e^{2\pi it})$. Воно неперервне як композиція неперервних, і $h(0) = h(1) = \hat{h}(1)$, тобто це петля. За умовою однозв'язності існує гомотопія H петлі h та постійної петлі $e_{\hat{h}(1)}$. Визначимо тепер відображення $\hat{H}: S^1 \times I \rightarrow X$ умовою $\hat{H}(e^{2\pi it}, s) := H(t, s)$. Воно коректно визначене і неперервне (чому?), при цьому $\hat{H}(e^{2\pi it}, 0) = H(t, 0) = h(t) = \hat{h}(e^{2\pi it})$ і $\hat{H}(e^{2\pi it}, 1) = H(t, 1) = \hat{h}(1)$ для будь-якого t , тобто це гомотопія $\hat{h}$ і постійного відображення в точку $\hat{h}(1)$. Це й завершує доведення. ■

Приклад 6.1. Будь-який стяжний простір є однозв'язним згідно з наслідком 5.1 і прикладом 4.1. Зокрема, у таких просторах (наприклад, у зірчатих підмножинах $\mathbb{R}^n$) будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні в силу попереднього твердження.

Приклад 6.2. Сфери S^n однозв'язні при $n \geq 2$. Дійсно, нехай f – петля у деякій $x \in S^n$. Треба встановити, що ця петля гомотопна постійній. Спочатку припустимо, що носій f не покриває всю сферу, тобто існує $x_0 \in S^n \setminus f(I)$. Позначимо через $\varphi: S^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ стереографічну проєкцію (див. приклад 14.5 з курсу топології), що є гомеоморфізмом. Тоді

$\varphi \circ f$ коректно визначене і неперервне, а отже є петлею в $\mathbb{R}^n$ у точці $\varphi(x)$ (див. ілюстрацію нижче). Оскільки $\mathbb{R}^n$ однозв'язний за попереднім прикладом, існує гомотопія F петлі $\varphi \circ f$ та постійної петлі $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F$ (що неперервне як композиція неперервних) є гомотопією $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 0) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$ і $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 1) = \varphi^{-1} \circ e_{\varphi(x)} = e_x$, яка нам і потрібна.



Тепер розглянемо загальний випадок (якщо існування петлі, носій якої покриває всю сферу, видається неможливим, можна згадати про класичний приклад *кривої Пеано* у площині, тобто шляху, образом якого є квадрат $I^2 = I \times I$, див. [3, с. 65-66], [7, с. 36-38] або [17, с. 271-275]). Цей приклад природним чином узагальнюється на шляхи в багатовимірних кубах I^n та багатьох інших компактах, зокрема S^n . Нашою задачею буде побудувати гомотопію петель f і деякої g такої, що $g(I) \neq S^n$. Тим самим ми зведемо цей випадок до попереднього й нарешті покажемо однозв'язність S^n . Розглянемо деяке покриття $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сфери S^n , що складається з відкритих напівсфер. За неперервністю f прообраз цього покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ є тоді відкритим покриттям компактного метричного простору I . Застосуємо до цього покриття лему Лебега і знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді з означення числа Лебега випливає, що для кожного i від 1 до m існує таке $\alpha_i \in A$, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$, а отже $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{\alpha_i}$: образ $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ міститься у деякій відкритій напівсфері. З прикладу 1.3 (і аналогічно до прикладу 3.2) тоді випливає, що для кожного i шлях $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ буде $\{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$ -гомотопний деякому шляху $g_i \in C([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}], U_{\alpha_i})$ з тими ж кінцями, носієм якого є дуга великого кола S^n (див. рисунок вище).

Визначимо тепер відображення $g: I \rightarrow S^n$ умовою $g|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} = g_i$ для кожного i . Зауважимо, що за побудовою $g_i(\frac{i-1}{m}) = f(\frac{i-1}{m}) = g_{i-1}(\frac{i-1}{m})$ для i від 2 до m , $g_1(0) = f(0) = x$ і $g_m(1) = f(1) = x$, тому g коректно визначене, неперервне і є петлею в x . Гомотопію між f і g можна побудувати,

”зшиваючи” гомотопії між їхніми частинами, аналогічно до доведення лема 3.1. Більш точно, нехай $F_i - \{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$ -гомотопія $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ та g_i для i від 1 до m . Тоді неважко перевірити, що відображення $F: I \times I \rightarrow S^n$, що задане умовою $F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times I} = F_i$ для кожного i , коректно визначене та є потрібною гомотопією. При цьому носій g міститься у скінченному об’єднанні дуг великих кіл S^n , а отже не дорівнює S^n (саме тут умова $n \geq 2$ є суттєвою). Отже, це потрібна нам петля, і, комбінуючи дві частини доведення, отримуємо $f \sim g \sim e_x$.

Приклад 6.3. Простір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ однозв’язний при $n \geq 3$ в силу попереднього прикладу, оскільки $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ за прикладом 5.1 (або просто в силу гомотопічної еквівалентності, що була встановлена у прикладі 2.6).

Приклад 6.4. Прямий добуток будь-яких двох однозв’язних просторів однозв’язний за теоремою 26.1 курсу топології (що забезпечує лінійну зв’язність) та твердженням 5.3. При цьому прямий добуток двох стяжних просторів стяжний за вправою 2.1. Це також вірно для прямого добутку довільної скінченної кількості просторів за очевидними узагальненнями згаданих тверджень.

Вправа 6.1. Показати, що вірне й обернене: якщо $X \times Y$ однозв’язний (відповідно, стяжний), то простори X та Y однозв’язні (стяжні). Узагальнити це на довільну скінченну кількість множників.

7 Накриття

Ми вже достатньо багато дізналися про фундаментальні групи, але поки що не маємо жодного нетривіального прикладу і навіть не знаємо, чому дорівнює фундаментальна група кола. У цьому та наступних розділах ми познайомимося з технікою накрить, що є одним з найважливіших інструментів алгебраїчної топології та її застосувань. Зокрема, за допомогою накрить, як побачимо, можна обчислювати фундаментальні групи. Накриття є окремим випадком більш загальної топологічної конструкції *розшарування* (див., наприклад, [2, с. 291-318] або [11, с. 375-384, с. 474-486 перекладу], а також далі зауваження після прикладу 14.6).

Означення 7.1. Трійка (X, Y, p) , де $p: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивне неперервне відображення топологічних просторів, зветься *накриттям*, якщо для будь-якої $y \in Y$ існує відкрита $U \ni y$ така, що $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де

- усі U_α відкриті;

- $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ для будь-яких $\alpha \neq \beta$ (тобто об'єднання диз'юнктне);
- $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ є гомеоморфізмом для будь-якого α (відносно індукованих топологій).

При цьому X називають *накриваючим простором* цього накриття, Y – його *базою* (а також говорять, що (X, Y, p) – накриття простору Y), p – *накриваючим відображенням* (або просто накриттям), $p^{-1}(y)$ – *шаром* накриття над точкою $y \in Y$. Накриття зветься *універсальним*, якщо його накриваючий простір однозв'язний.

Зауваження. Також називатимемо окіл U з попереднього означення *правильно накритим*, а про множини U_α для $\alpha \in A$ будемо говорити, що вони *правильно накривають* U (і взагалі будемо так говорити про будь-яку відкриту множину U , що задовольняє умовам із означення). З означення тоді випливає, що правильно накриті околи утворюють відкрите покриття Y . Зауважимо також, що будь-яка відкрита підмножина $V \subset U$ правильно накритего околу також правильно накрита: якщо покласти $V_\alpha := (p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ для кожного $\alpha \in A$, то $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ також задовольняє усім умовам із означення (перевірте це).

Приклад 7.1. Будь-який гомеоморфізм $p: X \rightarrow Y$ задає приклад накриття (т. зв. *тривіальне накриття*). У цьому випадку в якості U можна взяти Y , а в якості єдиного $U_\alpha = X$.

Вправа 7.1. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p відкрите, тобто у загальному випадку йому "заважає" бути гомеоморфізмом лише відсутність ін'єктивності (див. також лему 11.2 далі).

Приклад 7.2. Нехай Y – довільний топологічний простір, F – простір з дискретною топологією, $X = Y \times F$, і $p = p_Y: X \rightarrow Y$ – канонічна проєкція на Y . Тоді для $U = Y$ маємо $p^{-1}(Y) = Y \times F = \bigcup_{f \in F} Y \times \{f\}$ –

диз'юнктне об'єднання. Тут усі $Y \times \{f\}$ відкриті за побудовою топології прямого добутку (бо одноточкові $\{f\}$ відкриті у дискретному F), а обмеження $p|_{Y \times \{f\}}$ є гомеоморфізмами за пунктом 4, твердження 15.2 курсу топології, тому (X, Y, p) – накриття.

Вправа 7.2. Показати, що будь-яке накриття (X, Y, p) локально влаштоване як у попередньому прикладі: якщо $U \subset Y$ – правильно накритий окіл, то його прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфний добутку $U \times p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка U , а шар $p^{-1}(y)$ наділений індукованою з X топологією, що є дискретною.

Вправа 7.3. Показати, що якщо підмножина $A \subset Y$ бази накриття (X, Y, p) зв'язна (зокрема лінійно зв'язна), то усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in A$ рівнопотужні.

Зауваження. Якщо усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in Y$ складаються з n елементів, говорять, що накриття – n -листоє. Зауважимо, що для прообразу правильного накритого околу $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ з означення накриття доповненням до кожної відкритої U_α буде $\bigcup_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ – об'єднання відкритих множин, тому всі U_α будуть відкритозамкненими в $p^{-1}(U)$. Звідси можна вивести, що, наприклад, ортогональна проєкція $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ площини на вісь x не визначає накриття. Дійсно, якщо припустити, що існує правильно накритий окіл U , скажімо, точки 0 , то він повинен містити інтервал (a, b) , який теж буде правильно накритим, як було зауважено вище. Його прообраз $p^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ – смуга у площині, що є зв'язною, а отже єдина її непорожня відкритозамкнена підмножина – це вона сама. Тобто об'єднання $p^{-1}((a, b)) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ складається з єдиної $V_\alpha = (a, b) \times \mathbb{R}$, яка за означенням повинна бути гомеоморфна (a, b) . Але вони негомеоморфні (це впливає з прикладу 23.11 курсу топології), протиріччя. Інший спосіб прийти тут до суперечності – згадати, що індукована топологія шару накриття повинна бути дискретною (див. вправу 7.2).

Зауваження. Для нас особливе значення матимуть приклади, що утворені за допомогою дії групи на просторі (див. розділ 18 курсу топології). Для фіксованої дії λ групи G на множині X , як і раніше, будемо використовувати позначення з точками: $\lambda: G \times X \rightarrow X: (a, x) \mapsto \lambda(a, x) = a \cdot x$.

Означення 7.2. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *неперервною*, якщо для будь-якого $a \in G$ відображення $\lambda_a := \lambda(a, \cdot): X \rightarrow X: x \mapsto a \cdot x$ неперервне.

Зауваження. Для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$ за властивістю дії $\lambda_a(\lambda_b(x)) = a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$, тобто $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}$. Зокрема, $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \lambda_e = id_X$ (бо $\lambda_e(x) = e \cdot x = x$ для будь-якої $x \in X$), тобто відображення $\lambda_{a^{-1}}$ є оберненим до λ_a : $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$. Тому ці відображення є бієкціями. Якщо дія неперервна, то усі λ_a і обернені до них $\lambda_{a^{-1}}$ неперервні, тобто це гомеоморфізми:

Наслідок 7.1. Дія λ групи G на просторі X неперервна тоді й тільки тоді, коли $\lambda_a: X \rightarrow X$ є гомеоморфізмом для будь-якого $a \in G$.

Означення 7.3. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *цілком розривною*, якщо для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap \lambda_a(U) = \emptyset$ для будь-якого $a \in G$, $a \neq e$.

Зауваження. Це один зі способів вказати, що група діє на просторі "дискретно". З означень випливає, що будь-яка цілком розривна дія є вільною (зокрема ефективною). Для фіксованої дії далі будемо використовувати позначення $a \cdot U := \lambda_a(U) = \{a \cdot x \mid x \in U\}$. З означення випливає, що умова цілком розривності еквівалентна формально сильнішій умові:

Наслідок 7.2. Дія групи G на просторі X цілком розривна тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $a \cdot U \cap b \cdot U = \emptyset$ для будь-яких $a, b \in G$, $a \neq b$.

Доведення. $\Leftarrow$ Достатньо покласти $b = e$ в умові.

$\Rightarrow$ Для будь-якої $x \in X$ розглянемо відкриту $U \ni x$ з означення цілком розривної дії. Тоді $U \cap a^{-1}b \cdot U = \emptyset$ для довільних $a \neq b$, оскільки $a^{-1}b \neq e$. Застосовуючи до цієї рівності бієкцію λ_a , отримуємо потрібне:

$$a \cdot U \cap b \cdot U = a \cdot U \cap a \cdot (a^{-1}b \cdot U) = \emptyset.$$

■

Твердження 7.1. Якщо група G діє на топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, а $p: X \rightarrow X/G$ – канонічна проєкція на простір орбіт X/G цієї дії, то $(X, X/G, p)$ є накриттям.

Доведення. Нагадаємо, що образом кожної точки $x \in X$ під дією канонічної проєкції є її орбіта: $p(x) = G \cdot x$. Ми знаємо, що p неперервна і сюр'єктивна. Для будь-якої орбіти $G \cdot x \in X/G$ розглянемо окіл $U \ni x$ з означення цілком розривної дії (при цьому в якості x можна обрати довільну точку цієї орбіти). Тоді множина $G \cdot U := \{G \cdot y \mid y \in U\}$ є відкритим околом $G \cdot x$ у просторі X/G . Дійсно, вона містить $G \cdot x$ за побудовою, і

$$p^{-1}(G \cdot U) = \{a \cdot x \mid a \in G, x \in U\} = \bigcup_{a \in G} a \cdot U = \bigcup_{a \in G} \lambda_a(U)$$

відкрита, оскільки дія неперервна, а отже всі λ_a є гомеоморфізмами за наслідком 7.1, тому всі $\lambda_a(U)$ відкриті. Тоді $G \cdot U$ відкрита за означенням фактортопології на X/G .

Більш того, відкриті множини $a \cdot U$ для $a \in G$ правильно накривають $G \cdot U$ (звідки й випливає за означенням, що $(X, X/G, p)$ – накриття). Дійсно, ми тільки що побачили, що $p^{-1}(G \cdot U)$ є їх об’єднанням, яке диз’юнктне, бо $a \cdot U \cap b \cdot U = \emptyset$ при $a \neq b$ за наслідком 7.2 (зауважимо, що множина U в його доведенні – та ж, що і в означенні цілком розривної дії). Залишилося перевірити, що для будь-якого a обмеження канонічної проєкції $p|_{a \cdot U} : a \cdot U \rightarrow G \cdot U$ – гомеоморфізм. Оскільки $G = \{ba \mid b \in G\}$ (чому?), за властивостями дії $p(a \cdot y) = G \cdot (a \cdot y) = G \cdot y$ для кожної $a \cdot y \in a \cdot U$. Це обмеження є сюр’єкцією, бо $G \cdot y = p(a \cdot y)$ для будь-якої $G \cdot y \in G \cdot U$. Якщо $p(a \cdot y) = p(a \cdot z)$, тобто $G \cdot y = G \cdot z$, то існує $b \in G$ такий, що $z = b \cdot y$. Оскільки $y, z \in U$, $b = e$ за умовою на U , тому $y = z$ і $a \cdot y = a \cdot z$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – ін’єкція. Вона неперервна як обмеження неперервної проєкції p . Нарешті, будь-яка відкрита підмножина $a \cdot U$ має вигляд $a \cdot V$ для деякої відкритої $V \subset U$, бо λ_a – гомеоморфізм. Тоді її образ $p(a \cdot V) = G \cdot V$ буде відкритим у X/G (аналогічно до $G \cdot U$), а отже і в індукованій топології $G \cdot U$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – відкрита неперервна бієкція, тобто гомеоморфізм.

■

Зауваження. Для таких накрить шаром над будь-якою точкою (орбітою) $G \cdot x \in X/G$ буде $p^{-1}(G \cdot x) = \{a \cdot x \mid a \in G\}$, що ототожнюється з G : $a \cdot x \leftrightarrow a$, при цьому a визначений однозначно, бо дія вільна. І взагалі, індексуюча множина A з означення накриття природним чином ототожнюється з шаром $p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка правильно накритого околу U (як саме?).

Часто корисною є наступна достатня умова виконання попереднього твердження:

Твердження 7.2. *Будь-яка вільна неперервна дія скінченної групи на хаусдорфовому топологічному просторі є цілком розривною.*

Доведення. Отже, нехай $G = \{a_i\}_{i=0}^n$ – скінченна група, що вільно й неперервно діє на хаусдорфовому просторі X , де $a_0 = e$ – одиниця групи. Для довільної $x \in X$ та кожного i від 1 до n з того, що дія вільна, випливає $x \neq a_i \cdot x$. В силу хаусдорфовості тоді існують такі відкриті $U_i \ni x$, $V_i \ni a_i \cdot x$, що $U_i \cap V_i = \emptyset$. Оскільки прообрази $a_i^{-1} \cdot V_i = (\lambda_{a_i})^{-1}(V_i)$ є відкритими за лемою 7.1 та містять точку $a_i^{-1} \cdot (a_i \cdot x) = x$ для усіх i , перетин $U := \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n a_i^{-1} \cdot V_i \right)$ є відкритим околом x . При цьому $U \subset U_i$ та $a_i \cdot U \subset a_i \cdot (a_i^{-1} \cdot V_i) = V_i$, а отже $U \cap a_i \cdot U = \emptyset$ для кожного ненульового i , що й означає цілком розривність даної дії за означенням.

■

Приклад 7.3. Дія $G = \mathbb{R}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.3 курсу топології ($a \cdot x = x + a$) є неперервною, бо паралельні перенесення неперервні, але не цілком розривною (хоч і вільною). Дійсно, будь-який відкритий окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^n$ повинен містити евклідову кулю $B_\varepsilon(0)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Але тоді дія елементом $a = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \neq 0$ переводить 0 у $a \cdot 0 = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in B_\varepsilon(0)$, тобто $U \cap a \cdot U \neq \emptyset$.

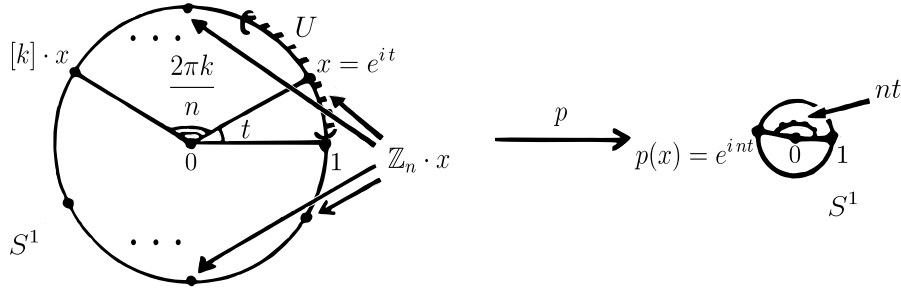
Вправа 7.4. Чи є неперервними дії з прикладів 18.1 і 18.2 курсу топології? Чи є вони цілком розривними?

Приклад 7.4. Розглянемо тепер дію $G = \mathbb{Z}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.4 курсу топології (знову $a \cdot x = x + a$). Як і у попередньому прикладі, вона неперервна. Щоб показати, що вона цілком розривна, покладемо $U = B_{\frac{1}{2}}(x)$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$ (тут кулі знову евклідові). Оскільки для $a \neq 0$ евклідова відстань між x і $a \cdot x$ не менша за 1, з нерівності трикутника випливає, що $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = \emptyset$ (де $a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(a \cdot x)$). Нагадаємо, що простір орбіт для даної дії гомеоморфний n -вимірному тору T^n , далі для спрощення позначень будемо їх ототожнювати. При цьому ототожненні канонічній проєкції відповідатиме відображення $p: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$. Таким чином, з твердження 7.1 випливає, що $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ – накриття T^n , яке є універсальним за прикладом 6.1. Зокрема, при $n = 1$ маємо універсальне накриття $(\mathbb{R}, S^1, p)$ кола.

Приклад 7.5. У прикладі 18.5 курсу топології було показано, зокрема, що n -вимірний дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфний простору орбіт дії групи $G = \mathbb{Z}_2$ на сфері $X = S^n$ (знову ж будемо їх ототожнювати для спрощення позначень). Тут $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ – група з двох елементів (див. приклад А.4), а її дія задається умовами $[0] \cdot x = x$ і $[1] \cdot x = -x$. Оскільки тотожне відображення і центральна симетрія сфери неперервні, ця дія неперервна. Вона також цілком розривна: для будь-якої $x \in S^n$ у якості U можна взяти будь-яку відкриту напівсферу, що містить x (або просто пошлемося на твердження 7.2). Отже, $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ – дволистоє накриття $\mathbb{R}P^n$ за твердженням 7.1. Тут канонічна проєкція має вигляд $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n: (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1 : \dots : x^{n+1})$. При $n \geq 2$ це накриття універсальне в силу прикладу 6.2.

Приклад 7.6. Нехай тепер $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$ – група залишків за модулем n з прикладу А.4, $X = S^1$ – коло (яке знову ототожнюємо з множиною комплексних чисел модуля 1), а дія задається умовою $[k] \cdot e^{it} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} e^{it} = e^{i(t + \frac{2\pi k}{n})}$, тобто клас еквівалентності $[k]$ діє обертанням кола на кут $\frac{2\pi k}{n}$. Це коректно визначена дія (чому?), вона неперервна

(бо обертання неперервні) та цілком розривна: для $x \in S^1$ у якості U візьмемо відкриту дугу довжини $\frac{2\pi}{n}$, що містить x (або знову ж використаємо твердження 7.2). Визначимо відображення $p: S^1 \rightarrow S^1$ умовою $p(e^{it}) = e^{int}$. Воно переводить усі точки кожної орбіти $\mathbb{Z}_n \cdot e^{it}$ в одну точку e^{int} кола (й різні орбіти – у різні точки), тому факторизується у бієкцію $S^1/\mathbb{Z}_n \rightarrow S^1$ (див. рисунок нижче). Можна сказати, що p "намотує" коло на себе n разів. Його факторизація є гомеоморфізмом (покажіть це), тобто $S^1/\mathbb{Z}_n \cong S^1$. Ототожнюючи ці простори, маємо за твердженням 7.1, що (S^1, S^1, p) – накриття кола, де канонічній проєкції відповідає описане вище відображення p . Усі шари цього накриття складаються з n елементів, тобто воно n -листоє. Зауважимо, що при $n = 1$ це тривіальне накриття з прикладу 7.1, а при $n = 2$ – накриття проєктивної прямої $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ з попереднього прикладу.



Приклад 7.7. Розглянемо дію тієї ж групи $G = \mathbb{Z}_n$, що у попередньому прикладі, на тривимірній сфері $X = S^3$. Її зручно представляти як одиничну сферу у просторі $\mathbb{C}^2$, що очевидним чином ототожнюється з $\mathbb{R}^4$, тобто як множину пар комплексних чисел, сума квадратів модулів яких дорівнює одиниці:

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

З урахуванням цього ототожнення дія $\mathbb{Z}_n$ на S^3 , що крім натурального n визначається деяким взаємно простим з ним натуральним числом $m < n$, задається умовами

$$[k] \cdot (z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i k}{n}} z, e^{\frac{2\pi i m k}{n}} w \right)$$

для будь-яких $[k] \in \mathbb{Z}_n$, $(z, w) \in S^3$. Зауважимо, що пара комплексних чисел у правій частині попередньої рівності теж належить до S^3 , бо множення на комплексні числа модуля 1 не змінює модулі z і w . Тому з аналогічних до попереднього прикладу міркувань випливає, що це коректно визначена неперервна дія (перевірте це). Вона цілком розривна в силу

твердження 7.2. Простір орбіт цієї дії позначається через $L(n, m)$ і зветься *лінзовим простором*. Таким чином, $(S^3, L(n, m), p)$, де p – канонічна проєкція, є n -листовим накриттям цього простору в силу твердження 7.1 і зауваження після нього. Це накриття універсальне за прикладом 6.2. Зокрема, $L(2, 1)$ гомеоморфний $\mathbb{R}P^3$, а накриття у цьому випадку те ж, що у прикладі 7.5 для $n = 3$ (чому?). Детальніше про лінзові простори та їхні узагальнення див., наприклад, у [11, с. 144-146, с. 186-189 перекладу].

Зауваження. Також приклади накрить виникають у комплексному аналізі як т. зв. *ріманові поверхні* функцій комплексної змінної. Див., наприклад, [5, с. 41-61].

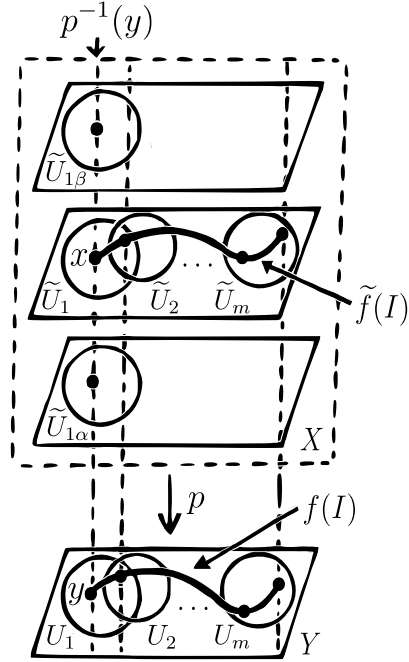
8 Накриття та шляхи

Для опису фундаментальної групи за допомогою накрить нам потрібно спочатку сформулювати та довести кілька важливих технічних результатів, що стосуються шляхів.

Лема 8.1 (Про підняття шляху). *Нехай (X, Y, p) – накриття, а $f: I \rightarrow Y$ – шлях у його базі з початком у точці $f(0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдиний шлях $\tilde{f}: I \rightarrow X$ у накриваючому просторі, що починається в x і накриває $f: \tilde{f}(0) = x, p \circ \tilde{f} = f$.*

Доведення.

За означенням накриття, для будь-якого $t \in I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_t \ni f(t)$. Тоді $\{f^{-1}(U_t)\}_{t \in I}$ – відкрите покриття компактного I . Застосувавши лему Лебега, оберемо число m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$, де $\delta > 0$ – число Лебега цього покриття. Тоді для будь-якого $i = \overline{1, m}$ існує t_i таке, що $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{t_i}$. Далі позначатимемо $U_i := U_{t_i}$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ має вигляд об'єднання $\bigcup_{\alpha \in A_1} \tilde{U}_{1\alpha}$ околів, що правильно накривають U_1 , й містить, зокрема, прообраз точки $y = f(0)$. Тому існує індекс $\alpha_1 \in A_1$ такий, що $x \in \tilde{U}_{1\alpha_1}$; позначимо $\tilde{U}_1 := \tilde{U}_{1\alpha_1}$. За означенням, $p|_{\tilde{U}_1}$ – гомеоморфізм, причому $(p|_{\tilde{U}_1})^{-1}(y) = x$, тому $\tilde{f}_1 := (p|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ$



$f|_{[0, \frac{1}{m}]}: [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_1$ коректно визначене і неперервне, тобто є шляхом (в $\tilde{U}_1$, а отже і в X) з початком у $\tilde{f}_1(0) = x$. За побудовою, він накриває перший відрізок $f: p \circ \tilde{f}_1 = f|_{[0, \frac{1}{m}]}$ (див. ілюстрацію вище). Кінець цього шляху лежить у прообразі правильно накритого U_2 , для якого використовуємо аналогічні позначення: $\tilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in p^{-1}(f(\frac{1}{m})) \subset p^{-1}(U_2) = \bigcup_{\alpha \in A_2} \tilde{U}_{2\alpha}$. Тоді існує індекс $\alpha_2 \in A_2$ такий, що $\tilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in \tilde{U}_{2\alpha_2}$; позначимо $\tilde{U}_2 := \tilde{U}_{2\alpha_2}$ і покладемо $\tilde{f}_2 := (p|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ f|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}: [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \rightarrow \tilde{U}_2$. Це шлях в $\tilde{U}_2$ і в X з початком у $\tilde{f}_1(\frac{1}{m})$, і $p \circ \tilde{f}_2 = f|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}$. Аналогічним чином обираємо околиці $\tilde{U}_i$, що правильно накривають U_i , і будуємо шляхи $\tilde{f}_i := (p|_{\tilde{U}_i})^{-1} \circ f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}: [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \rightarrow \tilde{U}_i$ для кожного i від 3 до m . Нарешті, визначимо $\tilde{f}: I \rightarrow X$ умовою $\tilde{f}|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} = \tilde{f}_i$ для кожного i (пор. з конструкцією у прикладі 6.2). За побудовою це коректно визначений шлях, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}_1(0) = x$ і $p \circ \tilde{f} = f$.

Тепер перевіримо єдиність такого $\tilde{f}$. Нехай $\tilde{\tilde{f}}: I \rightarrow X$ – якийсь ще шлях такий, що $\tilde{\tilde{f}}(0) = x$ і $p \circ \tilde{\tilde{f}} = f$. Зокрема, $p \circ \tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) = f([0, \frac{1}{m}]) \subset U_1$, тому $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset p^{-1}(U_1) = \bigcup_{\alpha \in A_1} \tilde{U}_{1\alpha}$. Оскільки $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ містить $\tilde{\tilde{f}}(0) = x$, вона перетинається з $\tilde{U}_1$, що є відкритозамкнутою підмножиною $p^{-1}(U_1)$ (див. зауваження після вправи 7.3). Оскільки $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ до того ж зв'язна як носій шляху, $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset \tilde{U}_1$. З бієктивності обмеження $p|_{\tilde{U}_1}: \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ та рівності відображень $p \circ \tilde{\tilde{f}}|_{[0, \frac{1}{m}]} = f|_{[0, \frac{1}{m}]} = p \circ \tilde{f}|_{[0, \frac{1}{m}]}$ випливає, що $\tilde{\tilde{f}}|_{[0, \frac{1}{m}]} = \tilde{f}|_{[0, \frac{1}{m}]}$. Зокрема, $\tilde{\tilde{f}}(\frac{1}{m}) = \tilde{f}(\frac{1}{m})$. Далі повторюємо аналогічні міркування для $\tilde{U}_2$ і т. д. Таким чином, $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$.

■

Означення 8.1. Шлях $\tilde{f}$ з попередньої леми зветься *підняттям* (або *накриваючим шляхом*) шляху f у накриваючий простір X .

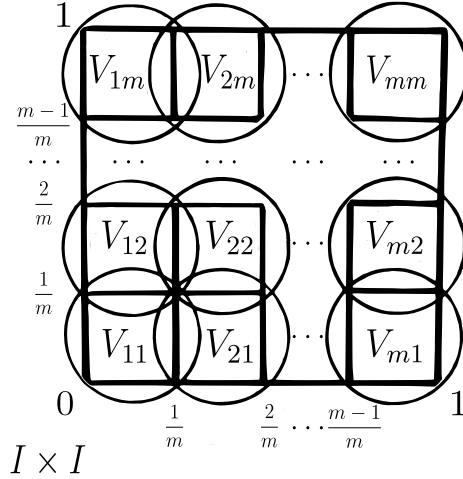
Також нам знадобиться наступне безпосереднє узагальнення леми про підняття шляху:

Лема 8.2 (Про підняття відображень куба). *Нехай (X, Y, p) – накривання, а $F: I^n \rightarrow Y$ – неперервне відображення n -вимірного куба у його базу таке, що $F(0, \dots, 0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдине неперервне відображення $\tilde{F}: I^n \rightarrow X$ у накриваючий простір таке, що $\tilde{F}(0, \dots, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$.*

Доведення. Дійсно, при $n = 1$ це твердження попередньої леми. Наведемо доведення для випадку $n = 2$, тобто для відображень квадрата $I^2 = I \times I$. Будемо діяти як у попередньому доведенні. Для будь-якого $(t, s) \in I \times I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_{(t,s)} \ni F(t, s)$, тому $\{F^{-1}(U_{(t,s)})\}_{t,s \in I}$ є відкритим покриттям компактного $I \times I$. Нехай $\delta > 0$ – якесь його число Лебега. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{\sqrt{2}}{m} < \delta$. Тоді для будь-яких $i, j = \overline{1, m}$ існує точка (t_{ij}, s_{ij}) така, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subset F^{-1}(U_{(t_{ij}, s_{ij})})$ (бо евклідовий діаметр цього квадрата, що дорівнює його діагоналі $\frac{\sqrt{2}}{m}$, менший за δ), а отже $F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]) \subset U_{(t_{ij}, s_{ij})}$. Позначимо тоді $U_{ij} := U_{(t_{ij}, s_{ij})}$ (див. рисунок нижче, де через V_{ij} позначені $F^{-1}(U_{ij})$).

Прообраз правильно накритого околу U_{11} містить $p^{-1}(y)$ і має вигляд $p^{-1}(U_{11}) = \bigcup_{\alpha \in A_{11}} \tilde{U}_{11\alpha}$, тому існує індекс $\alpha_{11} \in A_{11}$ такий, що $x \in \tilde{U}_{11\alpha_{11}}$. Позначимо $\tilde{U}_{11} := \tilde{U}_{11\alpha_{11}}$ і покладемо $\tilde{F}_{11} := (p|_{\tilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{[0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]} : [0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{11}$. Тоді $\tilde{F}_{11}$ неперервне, і $p \circ \tilde{F}_{11} = F|_{[0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$. Зокрема, образ правої сторони квадрата $p \circ \tilde{F}_{11}(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) = F(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) \subset U_{11} \cap U_{21}$. Далі вибираємо з околів, що правильно накривають U_{21} , окіл $\tilde{U}_{21}$, що містить $\tilde{F}_{11}(\frac{1}{m}, 0)$, і будемо $\tilde{F}_{21} := (p|_{\tilde{U}_{21}})^{-1} \circ F|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]} : [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{21}$. Це відображення неперервне, $p \circ \tilde{F}_{21} = F|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$, і $\tilde{F}_{11}|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]} = \tilde{F}_{21}|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]}$, бо на підмножині $\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]$ обидва ці обмеження збігаються з $(p|_{\tilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]}$.

Далі, рухаючися вправо, отримаємо аналогічним чином відображення $\tilde{F}_{i1}$ для усіх i від 1 до m . Після цього переходимо на другий рядок квадратиків, починаючи з відображення $\tilde{F}_{12} : [0, \frac{1}{m}] \times [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{12}$, що збігається з $\tilde{F}_{11}$ на верхній стороні $[0, \frac{1}{m}] \times \{\frac{1}{m}\}$ нижнього лівого квадрата. Далі отримаємо таким чином відображення $\tilde{F}_{i2}$ і т. д. Зрештою, ми отримаємо набір неперервних відображень $\tilde{F}_{ij} : [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \rightarrow X$ для усіх пар $i, j = \overline{1, m}$, що узгоджені на перетинах їхніх областей визначення і є такими, що $p \circ \tilde{F}_{ij} = F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]}$ для усіх i та j . Визначимо



тепер $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ умовою $\tilde{F}|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]} = \tilde{F}_{ij}$ для кожної пари $i, j = \overline{1, m}$. За побудовою це коректно визначене неперервне відображення, $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}_{11}(0, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$. Єдиність такого $\tilde{F}$ перевіряється аналогічно до попереднього доведення (зробіть це).

Вправа 8.1. Узагальнити це доведення на випадок довільного n .

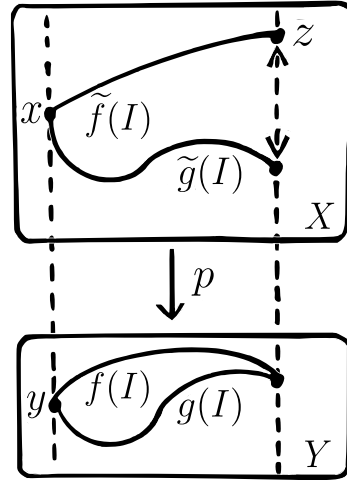
■

Зауваження. Пізніше в цьому курсі ми сформулюємо і доведемо теорему 10.1 про існування та єдиність піднятих відображень, що узагальнює дві попередні леми (див. також вправу 10.1).

Лема 8.3 (Про накриваючу гомотопію). *Нехай (X, Y, p) – накриття, $f, g: I \rightarrow Y$ – шляхи у його базі, що гомотопні й мають спільний початок у точці y : $f \sim g$, $y = f(0) = g(0)$, а $\tilde{f}, \tilde{g}: I \rightarrow X$ – підняття f і g відповідно у накриваючий простір зі спільним початком у деякій точці $x \in p^{-1}(y)$. Тоді ці підняття теж гомотопні, зокрема, їхні кінці збігаються: $\tilde{f} \sim \tilde{g}$ і $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Доведення.

Твердження даної леми проілюстроване справа. Нехай $F: I \times I \rightarrow Y$ – гомотопія шляхів f і g . Тобто це неперервне відображення, $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = y$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, $F(0, 0) = y$. Тоді з леми 8.2 у випадку $n = 2$ випливає, що існує неперервне $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ таке, що $\tilde{F}(0, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$. Зауважимо, що тоді $s \mapsto \tilde{F}(0, s)$ – шлях у X з початком у x , що є підняттям шляху $s \mapsto F(0, s) = y$ в Y . Але цей шлях в Y є постійним e_y за умовою на F , тому постійний шлях e_x є його підняттям з початком у x . Тоді $s \mapsto \tilde{F}(0, s)$ дорівнює e_x в силу єдиності в лемі 8.1, тобто $\tilde{F}(0, s) = x$ для будь-якого s .



Далі діємо аналогічно. Розглянемо шляхи $t \mapsto \tilde{F}(t, 0)$ і $t \mapsto \tilde{F}(t, 1)$. З доведеного вище випливає, що вони мають спільний початок у точці x . При цьому вони є підняттями шляхів $F(\cdot, 0) = f$ і $F(\cdot, 1) = g$ відповідно. З єдиності в лемі 8.1 маємо тоді, що вони повинні дорівнювати $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ відповідно, тобто $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t)$ і $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{g}(t)$ для будь-якого t . Зокрема,

$\tilde{F}(1, 0) = \tilde{f}(1)$. Позначимо цю точку через z . Тоді $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ є підняттям $F(1, \cdot) = e_{f(1)}$ з початком у z , і знову ж з єдиності в лемі 8.1 випливає, що це e_z , тобто $\tilde{F}(1, s) = z$ для будь-якого s , зокрема $\tilde{g}(1) = \tilde{F}(1, 1) = z = \tilde{f}(1)$. Встановлене вище означає, що $\tilde{F}$ – гомотопія шляхів $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$. ■

Зауваження. Згадана вище теорема 10.1 дозволить також узагальнити попередню лему на гомотопії відображень з довільних просторів (див. вправу 10.2). Наслідком цієї лемі є, зокрема, *теорема про монодромію* з комплексного аналізу, що встановлює достатні умови існування та єдиності *аналітичного продовження* функції комплексної змінної. Інші застосування техніки підняття можна знайти у наступних вправах та у багатьох твердженнях розділів 9–12.

Вправа 8.2. Нехай (X, Y, p) – накриття, де простір Y (а отже й X , див. далі твердження 10.1) локально лінійно зв’язний. Показати, що тоді будь-яка відкрита однозв’язна підмножина U є правильно накритою.

Вправа 8.3. Нехай $p: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивне відображення хаусдорфових локально лінійно зв’язних топологічних просторів (наприклад, многовидів, див. означення 29.1 і твердження 29.2 курсу топології), що є *локальним гомеоморфізмом*, тобто для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $p(U)$ відкрита і обмеження $p|_U: U \rightarrow p(U)$ – гомеоморфізм (див. також далі означення 11.3 і обговорення після нього), та *власним відображенням*, тобто таким, що прообрази компактних підмножин Y компактні в X . Показати, що тоді (X, Y, p) – накриття і що, крім того, воно *скінченнолистоє*, тобто шар над будь-якою точкою скінченний. Підказка: спочатку показати, що для відображення p виконується твердження лемі 8.1.

9 Накриття та фундаментальні групи

У цьому розділі ми нарешті сформулюємо і доведемо результати (теорему 9.1 і наслідок 9.1), що дозволять обчислювати фундаментальні групи топологічних просторів за допомогою накрить. Необхідні для цього алгебраїчні поняття та конструкції містяться у доповненні (зокрема, означення A.5–A.9, твердження A.1 і A.2).

9.1 Теорема про обчислення фундаментальної групи

Почнемо з дослідження властивостей індукованого гомоморфізма накриваючого відображення для довільного накриття.

Твердження 9.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття, $y \in Y$, $x \in p^{-1}(y)$, а $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – гомоморфізм фундаментальних груп, що індукований відображенням p .*

1. *Гомоморфізм p_* є ін'єктивним.*
2. *Гомотопічний клас деякої петлі f в y міститься в образі p_* тоді й тільки тоді, коли підняття f у накриваючий простір з початком у x має кінець теж у x , тобто є петлею в x .*

Зауваження. При цьому за пунктом 2. твердження А.2 образ $\text{Im } p_* = p_*(\pi_1(X, x))$ гомоморфізма p_* є підгрупою групи $\pi_1(Y, y)$, а з ін'єктивності та наслідку А.1 випливає, що $\pi_1(X, x) \simeq p_*(\pi_1(X, x))$.

Доведення.

1. З пункту 1. твердження А.2 випливає, що достатньо перевірити рівність $\text{Ker } p_* = \{[e_x]\}$. Нагадаємо, що $p_*([f]) = [p \circ f]$ для будь-якого гомотопічного класу петель $[f] \in \pi_1(X, x)$. Нехай $[f] \in \text{Ker } p_*$, тобто $[e_y] = p_*([f]) = [p \circ f]$, що означає гомотопність петель e_y і $p \circ f$. (Єдині за лемою 8.1) підняття цих петель в X з початком у x – це e_x і f відповідно. Тоді з леми 8.3 отримуємо, що $e_x \sim f$, тобто $[f] = [e_x]$. Це й означає, що $\text{Ker } p_* = \{[e_x]\}$.
2. Дійсно, клас $[f] \in \pi_1(Y, y)$ належить до $p_*(\pi_1(X, x))$ тоді й тільки тоді, коли має вигляд $p_*([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}]$ для деякої петлі $\tilde{g}$ в x , що є (єдиним за лемою 8.1) підняттям петлі $g := p \circ \tilde{g}$ з початком у x . При цьому рівність $[f] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ еквівалентна в силу леми 8.3 тому, що підняття $\tilde{f}$ петлі f з початком у x гомотопне $\tilde{g}$ і тому теж є петлею (точніше, ця лема потрібна для доведення необхідності, а при доведенні достатності можна просто покласти $\tilde{g} := \tilde{f}$).

■

Теорема 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття). *Нехай X та Y – лінійно зв'язні топологічні простори, а (X, Y, p) – накриття.*

1. *Для будь-яких $y \in Y$ та $x \in p^{-1}(y)$ існує бієкція між множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, y)$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ і шаром $p^{-1}(y)$.*
2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де G – група, що діє на X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проєкція, то $p_*(\pi_1(X, x))$ –*

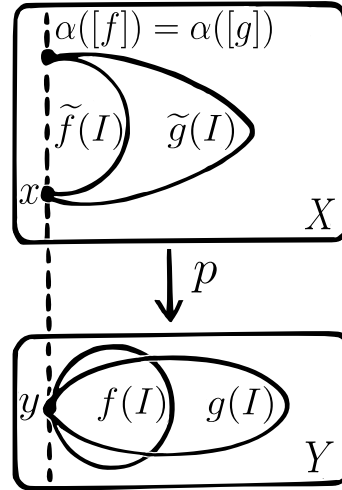
нормальна підгрупа $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ для будь-якої $x \in X$, і бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп

$$\pi_1(X/G, G \cdot x)/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq G.$$

Зауваження. Якщо простір X лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то з неперервності й сюр'єктивності p випливає, що простір $Y = p(X)$ також лінійно зв'язний, тому умову на нього можна прибрати з формулювання теореми. Те, що у пункті 1. йдеться саме про праві класи, теж насправді несуттєве, бо між множинами лівих та правих класів суміжності за підгрупою існує бієкція. У пункті 2. ми використовуємо твердження 7.1 (згідно з яким $(X, X/G, p)$ – дійсно накриття) і ототожнення шарів даного накриття з групою G із зауваження після цього твердження. Якщо, як у пункті 2., $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(Y, y)$, то визначена в силу твердження A.1 факторгрупа $\pi_1(Y, y)/p_*(\pi_1(X, x))$, що знаходиться у бієктивній відповідності з шаром $p^{-1}(y)$ за пунктом 1., інколи зветься *групою монодромії* накриття (X, Y, p) у точці x . Ми повернемося до питань про нормальність підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ у загальному випадку та топологічний сенс групи монодромії у розділі 11 (див., зокрема, теорему 11.1 та наслідок 11.3).

Доведення.

Отже, нехай $x \in X$ і $y = p(x)$. Для кожного класу петель $[f] \in \pi_1(Y, y)$ нехай f – деякий його представник (петля в y), а $\tilde{f}$ – підняття петлі f з початком у x (що існує і єдине за лемою 8.1). Воно повинне закінчуватися у деякій точці з $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(y)$. Покладемо $\alpha([f]) := \tilde{f}(1)$ (див. ілюстрацію справа). Покажемо перш за все, що так можна коректно визначити відображення $\alpha: \pi_1(Y, y) \rightarrow p^{-1}(y)$. Нехай f і g – петлі в y , для яких $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$. Тоді $\tilde{f} \sim \tilde{g}$ за лемою 8.3, зокрема, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Це й означає коректність визначення α . Перевіримо, що це відображення сюр'єктивне. Оскільки X лінійно зв'язний, для будь-якої $z \in p^{-1}(y)$ існує шлях h , що з'єднує x і z . Тоді $(p \circ h)(0) = p(x) = y$ і $(p \circ h)(1) = p(z) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y , і в наших позначеннях $h = \widetilde{p \circ h}$ (підняття $p \circ h$ з початком у x), тому $\alpha([p \circ h]) = h(1) = z$, що й демонструє сюр'єктивність α .



Позначимо $H := p_*(\pi_1(X, x))$. Як зазначалося вище, це підгрупа групи $\pi_1(Y, y)$. Щоб довести пункт 1., нам залишилося показати, що $\alpha([f]) = \alpha([g])$ тоді й тільки тоді, коли рівні класи суміжності $H[f] = H[g]$ за H у $\pi_1(Y, y)$. Дійсно, у цьому випадку ми можемо факторизувати α у коректно визначене ін'єктивне відображення з множини правих класів суміжності $\pi_1(Y, y)$ за H у $p^{-1}(y)$, що визначене умовою $H[f] \mapsto \alpha([f]) = \tilde{f}(1)$, і це буде сюр'єкцією, бо α – сюр'єкція. Так і отримаємо потрібну бієкцію.

Отже, нехай $\alpha([f]) = \alpha([g])$, тобто $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Тоді добуток шляхів $\tilde{f} * \tilde{g}$ визначений і є петлею в x , тому задає гомотопічний клас $[\tilde{f} * \tilde{g}] \in \pi_1(X, x)$. Звідси за означеннями маємо

$$\begin{aligned} [f][g]^{-1} &= [f * \bar{g}] = [(p \circ \tilde{f}) * \overline{(p \circ \tilde{g})}] = \\ &= [p \circ (\tilde{f} * \tilde{g})] = p_*([\tilde{f} * \tilde{g}]) \in p_*(\pi_1(X, x)) = H. \end{aligned}$$

Таким чином, $[f][g]^{-1} \in H$, що еквівалентне $H[f] = H[g]$ (чому?).

Тепер нехай $H[f] = H[g]$, тобто існує $[h] \in H$ таке, що $[f] = [h][g] = [h * g]$, отже $f \sim h * g$. Оскільки $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$, $\tilde{h}(1) = x$ за пунктом 2. твердження 9.1. Тому визначений шлях $\tilde{h} * \tilde{g}$, що накриває $h * g$ і починається в x , тобто $\widetilde{h * g} = \tilde{h} * \tilde{g}$. Тоді

$$\alpha([f]) = \tilde{f}(1) = \widetilde{h * g}(1) = \tilde{h} * \tilde{g}(1) = \tilde{g}(1) = \alpha([g]),$$

де друга рівність випливає з гомотопності $f \sim h * g$ і леми 8.3. Це завершує доведення пункту 1.

Нехай тепер $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де група G діє на X неперервно та цілком розривно, і $x \in X$. Ототожнимо $p^{-1}(G \cdot x)$ з G як у зауваженні після твердження 7.1: $a \cdot x \leftrightarrow a$, де $a \in G$ (нагадаємо, що це бієкція, бо дія вільна). За допомогою цього ототожнення перетворимо α із доведення пункту 1. на відображення $\alpha: \pi_1(X/G, G \cdot x) \rightarrow G$, тобто тепер у введених вище позначеннях $\tilde{f}(1) = \alpha([f]) \cdot x$ для кожного $[f] \in \pi_1(X/G, G \cdot x)$. Тоді з уже доведеного випливає, що α коректно визначене та сюр'єктивне.

Покажемо, що α є гомоморфізмом груп $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ і G . Нехай $[f], [g] \in \pi_1(X/G, G \cdot x)$. Для піднять $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ петель f і g відповідно з початком у x маємо $\tilde{f}(1) = \alpha([f]) \cdot x$ і $\tilde{g}(1) = \alpha([g]) \cdot x$. Тепер зауважимо, що шлях $\alpha([f]) \cdot \tilde{g} := \lambda_{\alpha([f])} \circ \tilde{g}: t \mapsto \alpha([f]) \cdot \tilde{g}(t)$ теж накриває g , бо

$$(p \circ (\alpha([f]) \cdot \tilde{g}))(t) = G \cdot (\alpha([f]) \cdot \tilde{g}(t)) = G \cdot \tilde{g}(t) = (p \circ \tilde{g})(t) = g(t)$$

для кожного t . Друга рівність тут випливає з того, що $\{a \alpha([f]) \mid a \in G\} = G$ (аналогічно до дослідження властивостей відображення p у доведенні твердження 7.1). Крім того, шлях $\alpha([f]) \cdot \tilde{g}$ починається в $\alpha([f]) \cdot \tilde{g}(0) =$

$\alpha([f]) \cdot x = \tilde{f}(1)$. Тому визначений шлях $\tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})$ з початком у $\tilde{f}(0) = x$, що накриває $f * g$, тобто $\widetilde{f * g} = \tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})$. Отже за означеннями

$$\begin{aligned}\alpha([f][g]) \cdot x &= \alpha([f * g]) \cdot x = \widetilde{f * g}(1) = \tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})(1) = \\ &= \alpha([f]) \cdot \tilde{g}(1) = \alpha([f]) \cdot (\alpha([g]) \cdot x) = \alpha([f]) \alpha([g]) \cdot x,\end{aligned}$$

звідки маємо $\alpha([f][g]) = \alpha([f]) \alpha([g])$, що й означає гомоморфність α .

Зауважимо, що ядро α має вигляд $\text{Ker } \alpha = H = p_*(\pi_1(X, x))$. Дійсно, з доведення пункту 1. випливає, що $\alpha([f]) = e = \alpha([e_{G \cdot x}])$ тоді й тільки тоді, коли $H[f] = H[e_{G \cdot x}] = H$, тобто $[f] \in H$. Тому, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ за пунктом 1. твердження А.2, і, оскільки гомоморфізм α сюр'єктивний, за пунктом 3. того ж твердження маємо ізоморфізм

$$\pi_1(X/G, G \cdot x) / p_*(\pi_1(X, x)) = \pi_1(X/G, G \cdot x) / \text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha = G,$$

причому ізоморфізм отримуємо факторизацією $\alpha: H[f] \mapsto \alpha([f])$, тобто це та ж сама бієкція, що й у доведенні пункту 1. Це, у свою чергу, завершує доведення пункту 2.

■

Наслідок 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою універсального накриття). *Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття.*

1. *Для будь-якої $y \in Y$ існує бієкція між фундаментальною групою $\pi_1(Y, y)$ і шаром $p^{-1}(y)$.*
2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де G – група, що діє на просторі X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проекція, то для будь-якої $x \in X$ бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/G, G \cdot x) \simeq G.$$

Доведення. Якщо накриття універсальне, то простір X однозв'язний. Тобто X (а отже й Y) лінійно зв'язний, і $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\}$ для $x \in p^{-1}(y)$. Тому твердження пунктів 1. і 2. випливають з відповідних пунктів попередньої теореми разом з прикладом А.13.

■

Зауваження. Результат пункту 2. цього наслідку можна записати у спрощених позначеннях (див. зауваження після наслідку 4.1) в силу лінійної зв'язності X : $\pi_1(X/G) \simeq G$.

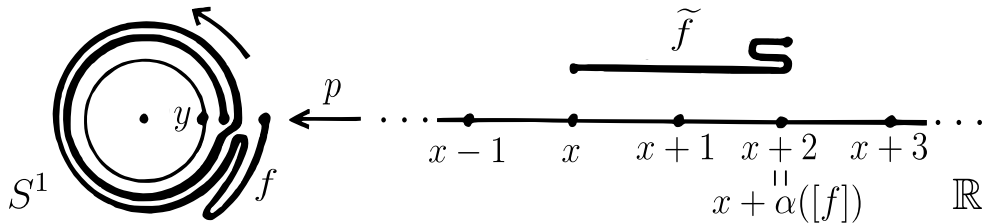
Твердження 9.2. Якщо (X, Y, p) – накриття, простір X є лінійно зв’язним, а Y – однозв’язним, то p – гомеоморфізм.

Доведення. З пункту 1. твердження 9.1 і зауваження після його формулювання випливає, що для будь-якої $x \in X$ і $y = p(x)$ група $\pi_1(X, x)$ ізоморфна підгрупі $p_*(\pi_1(X, x))$ групи $\pi_1(Y, y)$. Але у нас простір Y однозв’язний, тобто $\pi_1(Y, y) = \{[e_y]\}$ тривіальна. Тому $\pi_1(X, x)$ теж тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$. Це означає, що X однозв’язний, тому накриття універсальне. Тоді за пунктом 1. наслідку 9.1 кожний шар $p^{-1}(y)$ складається з однієї точки, отже сюр’єкція p є бієкцією. Вона неперервна за означенням та відкрита в силу вправи 7.1. Отже p – дійсно гомеоморфізм, а накриття тривіальне, як у прикладі 7.1. ■

9.2 Приклади обчислення фундаментальних груп

Приклад 9.1. Накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ з прикладу 7.4 побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}^n$ і є універсальним. Тому з пункту 2. наслідку 9.1 отримуємо, що для будь-якої $y \in T^n$ фундаментальна група n -вимірного тора T^n у точці y ізоморфна $\mathbb{Z}^n$: $\pi_1(T^n, y) \simeq \mathbb{Z}^n$ (або просто $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, див. зауваження після згаданого наслідку). Зокрема, для $n = 1$ маємо $\pi_1(S^1, y) = \pi_1(T^1, y) \simeq \mathbb{Z}$.

За побудовою у доведенні теореми 9.1, щоб знайти образ при цьому ізоморфізмі гомотопічного класу петлі f у точці $y \in S^1$, потрібно побудувати підняття $\tilde{f}$ у накриваючий простір, тобто пряму $\mathbb{R}$, з початком у деякій $x \in p^{-1}(y)$ (тобто $y = e^{2\pi i x}$). Це підняття закінчиться у точці $x + k$, де $k \in \mathbb{Z}$ й буде образом класу $[f]$. Неформально кажучи, k – це кількість повних обертів (з урахуванням орієнтації) петлі f навколо центру кола (див. ілюстрацію знизу). Аналогічно будуються образи класів петель і для довільного n .



Зауважимо також, що цей результат узгоджений з твердженням 5.3: згідно з його очевидним узагальненням, для кожної точки тора маємо

$$\pi_1(T^n, y) = \pi_1\left(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n, (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})\right) \simeq$$

$$\simeq \pi_1(S^1, e^{2\pi i x^1}) \times \dots \times \pi_1(S^1, e^{2\pi i x^n}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}^n.$$

У літературі ця група також позначається $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$ (див. приклад А.9).

Зауваження. Ізоморфність $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ має ключове значення, зокрема, для гомотопічних доведень класичної теореми Жордана (теорема 28.1 курсу топології при $n = 1$), що наведене у [17, с. 376-394], та т. зв. *основної теореми алгебри* – твердження про те, що будь-який непостійний поліном з комплексними коефіцієнтами має корінь (див. [3, с. 218-219] або [17, с. 353-356]). Інші застосування цього факту будуть наведені у розділі 15.

Приклад 9.2. Аналогічним чином, дволистоє накриття $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ з прикладу 7.5, що побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}_2$, є універсальним при $n \geq 2$. Тому для кожної $y \in \mathbb{R}P^n$ фундаментальна група $\pi_1(\mathbb{R}P^n, y) \simeq \mathbb{Z}_2$ (або просто $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$) згідно з пунктом 2. наслідку 9.1. Зауважимо, що при $n = 1$ проєктивна пряма $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна колу S^1 (див. приклад 18.5 курсу топології), тому $\pi_1(\mathbb{R}P^1, y) \simeq \mathbb{Z}$ для будь-якої y за гомотопічною інваріантністю та попереднім прикладом.

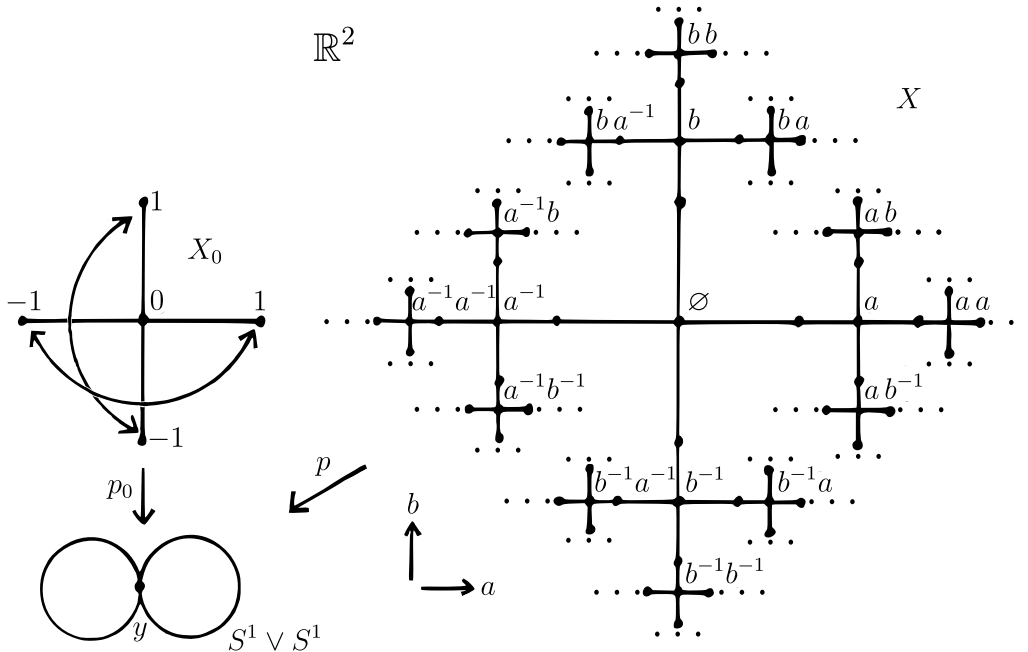
Приклад 9.3. Розглянемо n -листоє накриття (S^1, S^1, p) з прикладу 7.6, де $p: S^1 \rightarrow S^1: e^{it} \mapsto e^{int}$ відповідає дії групи $G = \mathbb{Z}_n$. Тоді для кожної $x \in S^1$ факторгрупа $\pi_1(S^1, p(x))/p_*(\pi_1(S^1, x))$ повинна бути ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ за пунктом 2. теореми 9.1. Перевіримо це безпосередньо. У прикладі 9.1 було встановлено, що $\pi_1(S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, p(x)) \simeq \mathbb{Z}$ – група, що складається з елементів вигляду $[f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$, де $[f]$ – гомотопічний клас будь-якої петлі f , яка робить один оберт навколо центру кола у додатному напрямку й відповідає таким чином $1 \in \mathbb{Z}$ при ізоморфізмі (чому?). Іншими словами, це твірна цієї групи у термінології прикладу А.6. Якщо $x = e^{2\pi i t_0}$, то в якості такої петлі можна взяти $f: t \mapsto e^{2\pi i (t_0+t)}$. Тоді $p(f(t)) = e^{2\pi i n(t_0+t)}$ для кожного $t \in I$, тому $p \circ f$ робить n обертів навколо центру кола у додатному напрямку й піднімається у відрізок в універсальному накриваючому просторі $\mathbb{R}$ кола (див. приклад 9.1), що сполучає точки nt_0 і nt_0+n , а отже елемент $p_*([f]) = [p \circ f]$ фундаментальної групи $\pi_1(S^1, p(x))$ відповідає числу $n \in \mathbb{Z}$. Тоді в силу гомоморфності p_* підгрупа $p_*(\pi_1(S^1, x)) \subset \pi_1(S^1, p(x))$, у свою чергу, складається зі степенів $[p \circ f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$ і таким чином відповідає підгрупі $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n (див. приклад А.14). Отже, наш ізоморфізм приймає вигляд $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. Більш того, це той самий ізоморфізм, що описаний у прикладі А.14 (перевірте це).

Приклад 9.4. Оскільки n -листо́ве накриття $(S^3, L(n, m), p)$ лінзового простору $L(n, m)$, що побудоване у прикладі 7.7 для будь-яких взаємно простих натуральних чисел $m < n$ за допомогою дії групи $\mathbb{Z}_n$, є універсальним, за пунктом 2. наслідку 9.1 фундаментальна група цього простору $\pi_1(L(n, m), y)$ ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ у будь-якій $y \in L(n, m)$ (або просто $\pi_1(L(n, m)) \simeq \mathbb{Z}_n$; зауважимо, що лінзові простори лінійно зв'язні в силу лінійної зв'язності S^3).

Приклад 9.5. Нехай $Y = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою y (див. вправу 17.2 курсу топології). Побудуємо його універсальне накриття. Для цього почнемо з підмножини

$$X_0 := [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

площини $\mathbb{R}^2$ (тобто "хреста", що зображений на рисунку нижче зліва). На цій множині можна ввести відношення еквівалентності $\sim$ умовами $(1, 0) \sim (-1, 0)$ і $(0, 1) \sim (0, -1)$ (інші точки еквівалентні лише собі), склеївши кінці відрізків. Тоді $X_0/\sim \cong S^1 \vee S^1$ аналогічно до прикладу 16.5 курсу топології, причому канонічна проєкція відповідає відображенню $p_0: X_0 \rightarrow S^1 \vee S^1$, що, зокрема, переводить точку $(0, 0)$ в y . Але $(X_0, S^1 \vee S^1, p_0)$ не буде накриттям (чому?). Втім, на основі цієї ідеї дійсно можна побудувати накриття (детальніше цей процес описаний у [3, с. 208-212]).



Покладемо $X := (\langle a, b \rangle \times X_0)/\sim$, де вільна група з 2 твірними $\langle a, b \rangle$ (див. приклад A.6) наділена дискретною топологією, а відношення еквівалентності $\sim$ визначене умовами $(W, (1, 0)) \sim (Wa, (-1, 0))$ і $(W, (0, 1)) \sim$

$(Wb, (0, -1))$ для будь-якого слова $W \in \langle a, b \rangle$ (інші точки еквівалентні лише собі). Таким чином, простір X утворюється склеюванням копій X_0 , що індексовані елементами $\langle a, b \rangle$. Його можна вкласти в $\mathbb{R}^2$, як показано вище справа (зображені лише копії X_0 , що відповідають словам довжини не більшої за 2; самі ці слова позначають центри відповідних "хрестів"; при цьому при збільшенні слова на один символ ми зменшуємо "хрест" удвічі і приклеюємо до існуючої конструкції відповідно до відношення еквівалентності). Визначимо дію групи $\langle a, b \rangle$ на просторі X умовою $W_1 \cdot [(W_2, (x, y))] := [(W_1 W_2, (x, y))]$ для будь-яких слів $W_1, W_2 \in \langle a, b \rangle$ і будь-якої $(x, y) \in X_0$, де квадратні дужки позначають, як завжди, клас еквівалентності відносно $\sim$.

Вправа 9.1. Показати, що простір X є однозв'язним (більш того, стяжним), дія $\langle a, b \rangle$ на ньому – коректно визначеною, неперервною та цілком розривною, і що відображення $\langle a, b \rangle \cdot [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ коректно задає гомеоморфізм між простором орбіт $X/\langle a, b \rangle$ і $S^1 \vee S^1$.

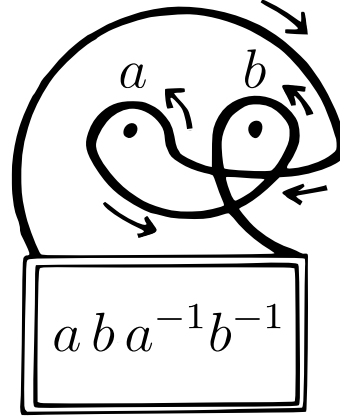
Ототожнимо $X/\langle a, b \rangle$ і $S^1 \vee S^1$ за допомогою цього гомеоморфізма. Тоді відображення $p: X \rightarrow S^1 \vee S^1: [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ відповідатиме канонічній проєкції. Воно, зокрема, переводить центри усіх "хрестів" у точку y . Таким чином, $(X, S^1 \vee S^1, p)$ – універсальне накриття за попередньою вправою і твердженням 7.1. З пункту 2. наслідку 9.1 тоді випливає, що $\pi_1(S^1 \vee S^1, y) \simeq \langle a, b \rangle$ (або просто $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a, b \rangle$ в силу лінійної зв'язності $S^1 \vee S^1$). Таким чином, отримали перший приклад неабелевої фундаментальної групи. Різні (не тільки універсальне) накриття цього простору також описані у [11, с. 57-60, с. 78-81 перекладу].

Вправа 9.2. Аналогічним чином показати, що фундаментальна група букета довільного натурального числа n кіл $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ ізоморфна вільній групі з n твірними $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, що описана у прикладі А.6 (при $n = 1$ це випливає з прикладу 9.1).

Вправа 9.3. Нехай $x_1, \dots, x_n$ – попарно різні точки $\mathbb{R}^2$. Показати, що простір $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ гомотопічно еквівалентний $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ (при $n = 1$ це встановлено у прикладі 2.6), а отже його фундаментальні групи ізоморфні вільній групі з n твірними в силу гомотопічної інваріантності та попередньої вправи.

Зауваження. Фундаментальна група простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ (або $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$) використовується, зокрема, у т. зв. задачах про картини.

Найпростіша з них формулюється наступним чином. У стіну вбито два цвяхи. Треба закрутити навколо них мотузку, на якій висить картина, таким чином, щоб вона висіла, але падала, якщо вийняти зі стіни будь-який з цвяхів. З попередньої вправи, гомотопічної інваріантності фундаментальної групи і прикладу 9.5 випливає, що фундаментальна група площини без двох різних точок (цвяхів) ізоморфна $\langle a, b \rangle$, де твірні a і b відповідають (аналогічно до прикладу 9.1) обертанню навколо цвяхів. Тоді для розв'язку задачі нам достатньо знайти нетривіальний елемент фундаментальної групи (слово), що перетворюється на тривіальний (порожнє слово) після викреслювання з нього усіх символів a і a^{-1} або b і b^{-1} , і задає гомотопічний клас потрібного розташування мотузки. Найпростішим таким словом є т. зв. *комутатор* $a b a^{-1} b^{-1}$ елементів a і b (див. означення А.11). Відповідне йому закручування мотузки зображено на ілюстрації вище. Як бачимо, воно дійсно задовольняє умові задачі. Огляд задач такого типу та потрібної для їх розв'язання математичної техніки див. у [9].



Виявляється, що будь-яка група G є фундаментальною групою деякого топологічного простору. Більш того, завжди можна побудувати неперервну та цілком розривну дію G на деякому стягнутому просторі, а отже G є фундаментальною групою простору орбіт цієї дії в силу твердження 7.1 та пункту 2. наслідку 9.1. Такі простори орбіт, що визначаються групою G з точністю до гомотопічної еквівалентності, зветься *просторами Ейленберга – Маклейна* групи G і позначаються через $K(G, 1)$. Їх конструкції, приклади та застосування описані у [11, с. 87-96, с. 115-126 перекладу]. Однозначна визначеність гомотопічного типу простору $K(G, 1)$ групою G дозволяє використання інших гомотопічних інваріантів (таких як *групи гомологій* та *когомологій*, що виникнуть у цьому курсі далі) для дослідження груп та мотивує знаходити чисто алгебраїчні описи цих інваріантів (див., наприклад, [10, с. 776-838]).

Зокрема, з прикладу 9.1 випливає, що простором Ейленберга – Маклейна $K(\mathbb{Z}^n, 1) \in T^n$, а з розв'язку вправи 9.2 можна вивести, що такий простір вільної групи з n твірними $K(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, 1)$ – це $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ (або ж $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ в силу вправи 9.3, бо цей простір визначений

з точністю до гомотопічної еквівалентності). З іншого боку, $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$ і $L(n, m)$ з прикладів 9.2 і 9.4 не є просторами $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ і $K(\mathbb{Z}_n, 1)$ відповідно, бо їхні універсальні накриваючі простори (що визначені однозначно з точністю до гомеоморфізма, див. наслідок 10.2 далі) – сфери – не є стяжними, як буде встановлено у прикладі 14.6.

Іншим простором, фундаментальна група якого ізоморфна довільній групі G , є факторпростір т. зв. *комплексу Келі*, що будується за допомогою *графа Келі* цієї групи. Ця конструкція описана у [11, с. 77-78, с. 103-105 перекладу]. Комплекс Келі є однозв'язним, але не обов'язково стяжним простором, і на ньому G також діє неперервно та цілком розривно, тому G є фундаментальною групою відповідного простору орбіт. Наприклад, для вільної групи з двома твірними комплексом (і графом) Келі буде простір X з прикладу 9.5. Те ж буде справедливим і для узагальнення цього накриваючого простору, яке потрібно побудувати у розв'язку вправи 9.2. Слово "комплекс" тут використовується у сенсі, що буде пояснений у розділі 19.

10 Підняття у накриваючий простір. Морфізми накрить

У зв'язку з теоремою 9.1 та наслідком 9.1 виникають природні питання застосовності цього метода обчислення фундаментальної групи: за яких умов для даного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p) , чи є воно єдиним (принаймні з точністю до якого-небудь відношення еквівалентності) й коли його можна представити у вигляді $(X, X/G, p)$ для неперервної та цілком розривної дії деякої групи G ? У цьому і двох наступних розділах будуть наведені результати, що відповідають на ці питання, але спочатку розглянемо кілька важливих допоміжних тверджень та конструкцій, що стосуються накрить.

10.1 Підняття відображень у накриваючий простір

Наступна теорема узагальнює леми 8.1 і 8.2 про підняття шляхів та відображень кубів відповідно. Вона дозволить нам, зокрема, вірно сформулювати та довести твердження про єдиність накрить над даним простором. Почнемо з корисної загальної леми.

Лема 10.1. *Нехай $p: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а шлях $f: I \rightarrow X$ з'єднує точки x та x' простору X . Позначимо $g := p \circ f$, $y := p(x)$, $y' := p(x')$ (тоді шлях $g: I \rightarrow Y$ з'єднує точки y*

та y'). Нехай $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x')$ і $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y')$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f і g відповідно, а $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $p'_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ – гомоморфізми фундаментальних груп, що індуковані відображенням p у точках x та x' відповідно. Тоді

$$p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*,$$

тобто діаграма фундаментальних груп та їх гомоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x') \\ p_* \downarrow & & \downarrow p'_* \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') \end{array}$$

комутативна.

Доведення. За умовою $f \in C(I, X)$, $f(0) = x$ і $f(1) = x'$, тому $g = p \circ f \in C(I, Y)$ як композиція неперервних, тобто дійсно є шляхом, $g(0) = p(f(0)) = y$ і $g(1) = p(f(1)) = y'$. Тоді для будь-якого гомотопічного класу $[h] \in \pi_1(X, x)$ петлі h у x за конструкцією ізоморфізма у твердженні 4.1 та означенням індукованого гомоморфізма маємо

$$\begin{aligned} p'_*(\alpha([h])) &= p'_*([\bar{f} * h * f]) = [p \circ (\bar{f} * h * f)] = [(p \circ \bar{f}) * (p \circ h) * (p \circ f)] = \\ &= [\bar{g} * (p \circ h) * g] = \beta([p \circ h]) = \beta(p_*([h])), \end{aligned}$$

звідки й маємо потрібну комутативність. ■

Теорема 10.1 (Існування та єдиність підняття). *Нехай (X, Y, p) – накривття, Z – лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний топологічний простір, $\varphi: Z \rightarrow Y$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(z) = p(x)$. У φ існує єдине підняття в X , тобто неперервне відображення $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow X$ таке, що $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ та $\tilde{\varphi}(z) = x$, тоді й тільки тоді, коли*

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)).$$

Доведення. Позначимо $y := \varphi(z) = p(x) \in Y$. Тоді індуковані гомоморфізми зі включення у формулюванні теореми діють наступним чином: $\varphi_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, отже це включення підгруп $\pi_1(Y, y)$. Зображення умови $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ у вигляді комутативної діаграми можна побачити на рисунках нижче.

$\Rightarrow$ За умовою і пунктом 2. твердження 5.1 маємо

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = p_* \circ \tilde{\varphi}_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)),$$

де гомоморфізм $\tilde{\varphi}_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(X, x)$ індукований підняттям. Таким чином, отримали потрібне включення. Зауважимо, що аналогічне включення матиме місце й для фундаментальних груп в будь-яких інших точках $z' \in Z$ та $x' := \tilde{\varphi}(z')$.

$\Leftarrow$ Спочатку покажемо єдиність $\tilde{\varphi}$, що використовує лише лінійну зв'язність простору Z . Дійсно, нехай неперервні $\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}: Z \rightarrow X$ такі, що $p \circ \tilde{\varphi} = p \circ \tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$ і $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\tilde{\varphi}}(z) = x$. Для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z' . Тоді шляхи $\tilde{f} := \tilde{\varphi} \circ h \in C(I, X)$ і $\tilde{\tilde{f}} := \tilde{\tilde{\varphi}} \circ h \in C(I, X)$ з'єднують x з $\tilde{\varphi}(z')$ і з $\tilde{\tilde{\varphi}}(z')$ відповідно. Оскільки $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\varphi} \circ h = \varphi \circ h$, і аналогічно $p \circ \tilde{\tilde{f}} = \varphi \circ h$, шляхи $\tilde{f}$ і $\tilde{\tilde{f}}$ є підняттями шляху $\varphi \circ h \in C(I, Y)$ зі спільним початком x . Тоді $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$ за єдиністю у лемі 8.1, зокрема, $\tilde{\varphi}(z') = \tilde{f}(1) = \tilde{\tilde{f}}(1) = \tilde{\tilde{\varphi}}(z')$. Таким чином, $\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}}$, що й означає єдиність.

Нехай тепер відомо, що $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$. Побудуємо підняття $\tilde{\varphi}$, використовуючи шляхи наступним чином. Нехай $z' \in Z$ – довільна точка, а $h \in C(I, Z)$ – шлях, що з'єднує z і z' , який існує в силу лінійної зв'язності Z . Тоді шлях $g := \varphi \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує y з $y' := \varphi(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття з лемі 8.1 з початком у x та кінцем у $x' := f(1)$. Зокрема, $p \circ f = g$, і тому $p(x') = y'$. Покажемо тепер, що x' не залежить від h , для чого виконаємо деяку допоміжну роботу.

Фіксуємо шляхи f, g, h і точку x' . Побудуємо як у твердженні 4.1 ізоморфізми фундаментальних груп $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x')$, $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y')$ і $\gamma: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Z, z')$ за шляхами f, g і h відповідно. Тоді з лемі 10.1 маємо рівності

$$\varphi'_* \circ \gamma = \beta \circ \varphi_*, \quad p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$$

для індукованих гомоморфізмів $\varphi_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $\varphi'_*: \pi_1(Z, z') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ відображення φ та $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $p'_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ відображення p , тобто діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z, z) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(Z, z') \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi'_* \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x') \\ p_* \downarrow & & \downarrow p'_* \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') \end{array}$$

комутативні. З цих комутативностей, бієктивності α і γ та умови теореми випливає, що

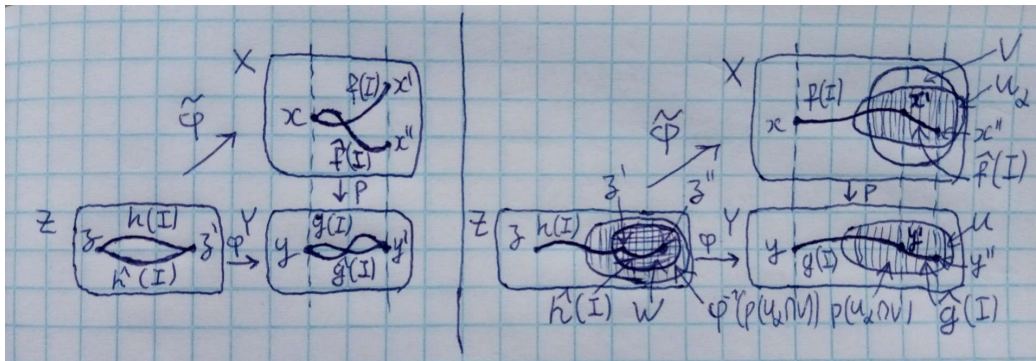
$$\begin{aligned}\varphi'_*(\pi_1(Z, z')) &= \varphi'_*(\gamma(\pi_1(Z, z))) = \beta(\varphi_*(\pi_1(Z, z))) \subset \\ &\subset \beta(p_*(\pi_1(X, x))) = p'_*(\alpha(\pi_1(X, x))) = p'_*(\pi_1(X, x')), \end{aligned}$$

тобто маємо включення $\varphi'_*(\pi_1(Z, z')) \subset p'_*(\pi_1(X, x'))$ підгруп $\pi_1(Y, y')$, що аналогічне до включення з умови, але для іншої пари точок.

Тепер нехай $\hat{h} \in C(I, Z)$ також з'єднує z і z' , тоді шлях $\hat{g} := \varphi \circ \hat{h} \in C(I, Y)$ з'єднує y та y' , і нехай його підняття $\hat{f} \in C(I, X)$ з початком у x має кінець у $x'' := \hat{f}(1) \in p^{-1}(y')$ (зокрема, $p \circ \hat{f} = \hat{g}$). Див. ілюстрацію нижче зліва. Тоді $\bar{h} * \hat{h}$ є петлею у z' , а $\varphi \circ (\bar{h} * \hat{h}) = \bar{g} * \hat{g}$ – петлею в y' з гомотопічним класом у $\pi_1(Y, y')$, що дорівнює

$$[\bar{g} * \hat{g}] = [\varphi \circ (\bar{h} * \hat{h})] = \varphi'_*([\bar{h} * \hat{h}]) \in \varphi'_*(\pi_1(Z, z')) \subset p'_*(\pi_1(X, x'))$$

за доведеним вище. З іншого боку, шлях $\bar{f} * \hat{f}$ є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\bar{f} * \hat{f}) = \bar{g} * \hat{g}$ з початком у $\bar{f} * \hat{f}(0) = \bar{f}(0) = x'$. Оскільки $[\bar{g} * \hat{g}] \in p'_*(\pi_1(X, x'))$, він повинен закінчуватися у тій же точці згідно з пунктом 2. твердження 9.1, тобто $x'' = \hat{f}(1) = \bar{f} * \hat{f}(1) = x'$. Це й доводить незалежність x' від h . Таким чином, можна коректно визначити відображення $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow X$, поставивши кожній $z' \in Z$ у відповідність $\tilde{\varphi}(z') := x'$ з описаної нами побудови. При цьому $p(\tilde{\varphi}(z')) = p(x') = y' = \varphi(z')$, для будь-якої $z' \in Z$, тобто $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. Для $z' = z$ у якості h можна взяти e_z , тоді $g = \varphi \circ e_z = e_y$, і його підняттям буде $f = e_x$, тому $\tilde{\varphi}(z) = f(1) = x$.



Залишилося перевірити, що $\tilde{\varphi}$ неперервне. Лише тут буде потрібна локальна лінійна зв'язність простору Z . Цей останній етап доведення проілюстрований вище справа. Для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $z' \in \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ маємо $x' := \tilde{\varphi}(z') \in V$. Нехай U – правильно накритий

відкритий окіл точки $y' := \varphi(z') = p(x') \in Y$ з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, а індекс $\alpha \in A$ такий, що $x' \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околom x' , отже, оскільки обмеження p на U_α – гомеоморфізм на U , $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ є відкритим околom y' (в індукованій топології відкритої U , а отже в Y), а $\varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$ – відкритим околom z' за неперервністю φ . Оскільки простір Z локально лінійно зв'язний, тоді існує лінійно зв'язна відкрита множина W така, що $z' \in W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$. Для будь-якої $z'' \in W$ існує шлях $\hat{h} \in C(I, W)$, що з'єднує z' і z'' . Якщо $h \in C(I, Z)$ – якийсь шлях, що з'єднує z і z' , то шлях $h * \hat{h} \in C(I, Z)$ з'єднує z і z'' . Під дією відображення φ він переходить у шлях $\varphi \circ (h * \hat{h}) = g * \hat{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y та $y'' := \varphi(z'')$, де шляхи $g := \varphi \circ h$ і $\hat{g} := \varphi \circ \hat{h}$ з'єднують y з y' і y' з y'' відповідно. Якщо $f \in C(I, X)$ і $\hat{f} \in C(I, X)$ – підняття g і $\hat{g}$ з початками у точках x та x' відповідно, то f закінчується у $\tilde{\varphi}(z') = x'$ за побудовою $\tilde{\varphi}$, тому визначений шлях $f * \hat{f}$, й він є підняттям $p \circ (f * \hat{f}) = g * \hat{g}$ з початком у x . Отже, $x'' := \tilde{\varphi}(z'') = f * \hat{f}(1) = \hat{f}(1)$ за побудовою $\tilde{\varphi}$. Оскільки $\hat{h}(I) \subset W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$, $\hat{g}(I) \subset p(U_\alpha \cap V)$, й тому $\hat{f}(I) \subset p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) \subset p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, бо $\hat{f}$ є підняттям $\hat{g}$. При цьому $\hat{f}(0) = x' \in U_\alpha$. Перетин зв'язної $\hat{f}(I)$ з U_α , що є відкритозамкненою в топології $p^{-1}(U)$ (див. зауваження після вправи 7.3) є таким чином відкритозамкненим і непорожнім, отже збігається зі всією цією множиною: $\hat{f}(I) \subset U_\alpha$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Оскільки обмеження p на U_α є, зокрема, ін'єктивним, $U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V$, отже $\hat{f}(I) \subset U_\alpha \cap V \subset V$. Зокрема, $\tilde{\varphi}(z'') = x'' = \hat{f}(1) \in V$. Таким чином, ми показали, що у кожній $z' \in \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ існує відкритий окіл $W \subset \tilde{\varphi}^{-1}(V)$, тобто $\tilde{\varphi}^{-1}(V)$ відкрита. Отже, підняття $\tilde{\varphi}$ дійсно неперервне, що завершує доведення теореми.

■

Зауваження. В умовах попередньої теореми відображення $\tilde{\varphi}$ називають *підняттям* відображення φ у накриваючий простір X . Трохи інший спосіб обґрунтування коректності визначення $\tilde{\varphi}$ у її доведенні, що безпосередньо використовує лему 8.3, можна знайти у [13, с. 163-164, с. 187-188 перекладу]. Також у [13, с. 164-165, с. 189-190 перекладу] наведено приклад (т. зв. *польське*, або *варшавське коло*, яке утворюється "замиканням в коло" графіка топологічного синуса з прикладу 27.3 курсу топології), що демонструє суттєвість локальної лінійної зв'язності для використаної у попередньому доведенні конструкції, а отже для існування неперервного підняття $\tilde{\varphi}$ взагалі, бо якщо воно існує, то ця конструкція повинна до нього приводити (виведіть це з доведення єдиності у теоремі).

Приклад 10.1. Якщо простір Z однозв'язний (зокрема лінійно зв'язний) та локально лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то для будь-якого неперервного $\varphi: Z \rightarrow Y$ маємо $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = \varphi_*([e_z]) = [e_{\varphi(z)}]$ для кожної $z \in Z$, отже φ задовольняє умові попередньої теореми та має підняття. Наприклад, це вірно для куба I^n , що є опуклою підмножиною $\mathbb{R}^n$, а отже однозв'язним простором (точніше, стяжним, див. приклад 6.1). Перевірте, що він локально лінійно зв'язний. Таким чином, ця теорема дійсно узагальнює леми 8.1 (при $n = 1$) і 8.2. Зауважимо, що при цьому ми використовували лему 8.1 у доведенні теореми, а також посилялися на пункт 2. твердження 9.1, що спирається на лему 8.3 про накриваючу гомотопію, у доведенні якої, у свою чергу, використана лема 8.2 для випадку $n = 2$.

Вправа 10.1. Узагальнити попередню теорему наступним чином. Нехай X та Y – лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні топологічні простори, (X, Y, p) і (Z, W, q) – накриття, $\varphi: Y \rightarrow W$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(p(x)) = q(z)$. У φ існує єдине підняття, тобто неперервне відображення $\tilde{\varphi}: X \rightarrow Z$ таке, що $\varphi \circ p = q \circ \tilde{\varphi}$ та $\tilde{\varphi}(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$\varphi_*(p_*(\pi_1(X, x))) \subset q_*(\pi_1(Z, z))$$

для індукованих гомоморфізмів у відповідних точках. Іншими словами, ці відображення пов'язані комутативною діаграмою

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Z \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Зауважимо, що це твердження перетворюється на теорему 10.1 при $X = Y$ і тотожному $p = id_X$ (з точністю до заміни позначень).

Вправа 10.2. Узагальнити лему 8.3 про накриваючу гомотопію за аналогією з узагальненнями лем 8.1 і 8.2 у теоремі 10.1. Для цього можна спробувати послідовно відповісти на наступні питання. За яких умов існує та єдине підняття гомотопії $F: Z \times I \rightarrow Y$ у накриваючий простір накриття (X, Y, p) , тобто неперервне відображення $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow X$ таке, що $p \circ \tilde{F} = F$ і $\tilde{F}(z, 0) = x$ для деяких $x \in X$ і $z \in Z$ таких, що $F(z, 0) = p(x)$? Чи є необхідними та достатніми для цього умови існування підняття відображення $F(\cdot, 0): Z \rightarrow Y$ з теореми 10.1? Гомотопією яких відображень буде тоді $\tilde{F}$? Що буде у випадку зв'язаної гомотопії (як гомотопія шляхів у лемі 8.3)? Див. [11, с. 60, с. 82-83 перекладу].

Зауваження. У цьому та двох подальших розділах нам часто будуть зустрічатися накриття (X, Y, p) , де, як у вправі 10.1, простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні. При цьому, оскільки $Y = p(X)$ і p неперервне, з лінійної зв'язності X випливає лінійна зв'язність Y , тому насправді її достатньо вимагати лише від X (ми вже зауважували це після формулювання теореми 9.1). Також достатньо буде локальної лінійної зв'язності будь-якого з просторів X або Y в силу наступного твердження. Але ми й надалі у означеннях і формулюваннях тверджень записуватимемо обидві ці умови для обох просторів з міркувань симетрії.

Твердження 10.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття. Простір X є локально лінійно зв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y .*

Доведення. Ця еквівалентність вірна для будь-якого відкритого неперервного відображення топологічних просторів $p: X \rightarrow Y$ (перевірте це), тому випливає з відкритості p (вправа 7.1) та його неперервності. Але ми дамо безпосереднє доведення.

$\Rightarrow$ Нехай X локально лінійно зв'язний. Для будь-якої $y \in Y$ нехай $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл y з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Для будь-якої відкритої $V \ni y$ її прообраз $p^{-1}(V)$ відкритий за неперервністю та містить $p^{-1}(y)$. Оберемо якусь $x \in p^{-1}(y)$ та відповідний індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α – відкритий окіл x , тому перетин $U_\alpha \cap p^{-1}(V)$ теж є відкритим околom x . За означенням локальної лінійної зв'язності X тоді існує лінійно зв'язна відкрита W така, що $x \in W \subset U_\alpha \cap p^{-1}(V)$. Оскільки обмеження $p: U_\alpha \rightarrow U$ є гомеоморфізмом, $p(W) \subset U \cap V \subset U$ відкрита та лінійно зв'язна в індукованій топології відкритої U , а отже в Y . Оскільки $y = p(x) \in p(W) \subset U \cap V \subset V$, існування такої $p(W)$ для будь-яких y і V й означає локальну лінійну зв'язність простору Y .

$\Leftarrow$ Достатність перевіряється схожим чином до необхідності. Нехай Y локально лінійно зв'язний. Для будь-яких $x \in X$ й відкритої $V \ni x$ нехай знову $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл $y := p(x)$: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, і $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околom x , і з гомеоморфності $p: U_\alpha \rightarrow U$ випливає, що $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ – відкритий окіл y . З локальної лінійної зв'язності Y тоді маємо існування лінійно зв'язної відкритої W такої, що $y \in W \subset p(U_\alpha \cap V)$. Отже, $x \in U_\alpha \cap p^{-1}(W) \subset U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V \subset V$ (бо обмеження p на U_α ін'єктивне), де $U_\alpha \cap p^{-1}(W) = (p|_{U_\alpha})^{-1}(W)$ відкрита та лінійно зв'язна за гомеоморфністю $p: U_\alpha \rightarrow U$. Звідси й випливає локальна

лінійна зв'язність простору X .

■

10.2 Морфізми накрить. Ізоморфні накриття.

Накриття з відміченими точками

Нехай тепер (X, Y, p) та (Z, Y, q) – деякі накриття, що мають спільну базу Y , причому простір X лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний (отже й Y є таким, а Z , у свою чергу, локально лінійно зв'язний в силу попередніх зауваження та твердження). Нехай точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Застосуємо теорему 10.1 до відображення $p: X \rightarrow Y$ та накриття (Z, Y, q) . Згідно з твердженням цієї теореми, існує єдине неперервне відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ та $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

Нагадаємо також, що для єдиності φ тут потрібні лише лінійна зв'язність простору X та умова на точку. Умова $q \circ \varphi = p$ представляється у вигляді комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow p \quad \swarrow q & \\ & Y & \end{array}$$

топологічних просторів та непервних відображень. Дамо відображенням з такою властивістю спеціальну назву:

Означення 10.1. *Морфізмом накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) зі спільною базою Y зветься неперервне відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$. Якщо крім цього φ – бієкція та $\varphi^{-1}: Z \rightarrow X$ – морфізм накрить (Z, Y, q) та (X, Y, p) , то φ називають *ізоморфізмом накрить*. Якщо існує ізоморфізм накрить $\varphi: X \rightarrow Z$, то говорять, що (X, Y, p) *ізоморфне* (Z, Y, q) (або що вони *ізоморфні*).*

Зауваження. Умова на φ^{-1} з означення ізоморфізма накрить означає, що це відображення неперервне, тобто φ є гомеоморфізмом, і $p \circ \varphi^{-1} = q$. Втім, ця друга рівність й так вірна в силу умови $q \circ \varphi = p$ та бієктивності φ . І навпаки, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – такий гомеоморфізм, що $q \circ \varphi = p$, то φ та φ^{-1} є морфізмами накрить за означенням.

Наслідок 10.1. *Відображення накриваючих просторів $\varphi: X \rightarrow Z$ є ізоморфізмом накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) тоді й тільки тоді, коли φ – гомеоморфізм і $q \circ \varphi = p$.*

Запишемо тепер кілька властивостей морфізмів разом з переформулюванням обговореного вище часткового випадку теореми 10.1:

Твердження 10.2. 1. Композиція будь-яких двох морфізмів накрить є морфізмом накрить.

2. Ізоморфність є відношенням еквівалентності накрить зі спільною базою Y .

3. Якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – морфізм накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , де простори Y і Z лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, то (X, Z, φ) – накриття.

4. Якщо $\varphi, \psi: X \rightarrow Z$ – морфізми накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , де простори X та Y лінійно зв'язні, і існує точка $x \in X$ така, що $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$.

5. Нехай (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття, де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, а точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Тоді існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накрить такий, що $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

6. Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття, де простори X та Y локально лінійно зв'язні. Тоді для будь-якого накриття (Z, Y, q) існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накрить.

7. Нехай (Z, Y, q) – тривіальне накриття. Тоді для будь-якого накриття (X, Y, p) , де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накрить.

Доведення.

1. Дійсно, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$, $\psi: Z \rightarrow W$ – морфізми накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то $\psi \circ \varphi: X \rightarrow W$ неперервне як композиція неперервних, і $r \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$, як добре видно з наступної комутативної діаграми:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z & \xrightarrow{\psi} & W \\ & \searrow p & \downarrow q & \swarrow r & \\ & & Y & & \end{array}$$

Тому $\psi \circ \varphi$ – дійсно морфізм накрить (X, Y, p) і (W, Y, r) .

2. Тотожне відображення $id_X: X \rightarrow X$ є гомеоморфізмом і задовольняє умові $p \circ id_X = p$, тому будь-яке накриття (X, Y, p) ізоморфне самому собі. Якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (Z, Y, q) , то за означенням φ^{-1} – ізоморфізм (Z, Y, q) та (X, Y, p) . Нарешті, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$, $\psi: Z \rightarrow W$ – ізоморфізми (X, Y, p) і (Z, Y, q) , (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то за означенням φ^{-1} , ψ^{-1} – ізоморфізми (Z, Y, q) та (X, Y, p) , (W, Y, r) та (Z, Y, q) відповідно, тому за попереднім пунктом бієкція $\psi \circ \varphi$ є морфізмом (X, Y, p) і (W, Y, r) , а $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ – морфізмом (W, Y, r) та (X, Y, p) (знову див. діаграму вище). Таким чином, $\psi \circ \varphi$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (W, Y, r) за означенням.

3. Відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ неперервне за означенням. Перевіримо його сюр'єктивність. Оберемо якусь $x \in X$ і нехай $z := \varphi(x) \in Z$. Оскільки Z лінійно зв'язний, для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z' . Тоді шлях $g := q \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує $q(z)$ і $q(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття в X з початком у x для накриття (X, Y, p) . Тоді $g = p \circ f = q \circ \varphi \circ f$, оскільки φ – морфізм, тому шляхи $\varphi \circ f$ і h є підняттями g у Z зі спільним початком $\varphi(f(0)) = \varphi(x) = z = h(0)$. За єдиністю у лемі 8.1, $\varphi \circ f = h$, зокрема, $z' = h(1) = \varphi(f(1)) \in \varphi(X)$. Таким чином, φ дійсно є сюр'єктивним.

Нехай тепер z – довільна точка Z . Покладемо $y := q(z) \in Y$. За означеннями накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , у точки y існують правильно накриті околиці для них обох. Тоді перетин цих околиць теж буде відкритою правильно накритою для накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) множиною за зауваженням після означення 7.1. Оскільки простір Y локально лінійно зв'язний, цей перетин у свою чергу включає відкритий лінійно зв'язний окіл $U \ni y$, що є правильно накритим для обох накрить за тими ж міркуваннями. Нехай $V \subset Z$ – відкрита множина, що правильно накриває U для накриття (Z, Y, q) й містить точку z . Зокрема, тоді $q|_V: V \rightarrow U$ – гомеоморфізм. З іншого боку, нехай $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ – об'єднання правильно на-

криваючих околиць для накриття (X, Y, p) . За означенням морфізма φ , $p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(q^{-1}(U)) \supset \varphi^{-1}(V)$. Позначимо $B := \{\beta \in A \mid U_\beta \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset\}$ (зауважимо, що ця підмножина індексів непорожня, бо $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ за доведеною раніше сюр'єктивністю φ). Таким чином, $\varphi^{-1}(V) \subset \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$, і це диз'юнктне об'єднання відкритих під-

множин X . При цьому для будь-якого $\beta \in B$ обмеження $p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow U$ – гомеоморфізм, зокрема, U_β лінійно зв'язна. Тоді й $\varphi(U_\beta) \subset \varphi(p^{-1}(U)) = \varphi(\varphi^{-1}(q^{-1}(U))) = q^{-1}(U)$ лінійно зв'язна за неперерв-

ністю φ . Оскільки правильно накриваюча V є відкритозамкнутою у $q^{-1}(U)$ та $\varphi(U_\beta) \cap V \neq \emptyset$ за означенням B , $\varphi(U_\beta) \subset V$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Зокрема, тому $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \subset \varphi^{-1}(V)$, а отже $\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$. Крім того, тоді з означення морфізма випливає, що $p|_{U_\beta} = q|_V \circ \varphi|_{U_\beta}$, тобто $\varphi|_{U_\beta} = (q|_V)^{-1} \circ p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow V$ – гомеоморфізм як композиція гомеоморфізмів. Все це означає, що V – правильно накритий окіл точки z , а (X, Z, φ) – дійсно накриття.

4. Це твердження про єдиність у теоремі 10.1, що застосоване до накриття (Z, Y, q) та відображення $p: X \rightarrow Y$.
5. Це критерій існування у теоремі 10.1, що застосований до накриття (Z, Y, q) та відображення $p: X \rightarrow Y$.
6. Застосуємо попередній пункт до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , взявши якусь точку $x \in X$, поклавши $y := p(x)$ і обравши $z \in q^{-1}(y)$. З однозв'язності X випливає, що $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\} \subset q_*(\pi_1(Z, z))$, тому дійсно існує морфізм накрить $\varphi: X \rightarrow Z$ (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$, в силу двох попередніх пунктів).
7. Нагадаємо, що тривіальне накриття – це трійка (Z, Y, q) , де q – гомеоморфізм (див. приклад 7.1). Застосуємо пункт 5. до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) : знову оберемо $x \in X$, покладемо $y := p(x)$ і оберемо $z \in q^{-1}(y)$. Оскільки q – гомеоморфізм, $q_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – ізоморфізм за твердженням 5.2. Зокрема, він сюр'єктивний, і тому $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y) = q_*(\pi_1(Z, z))$. Отже, існує (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$) морфізм накрить $\varphi: X \rightarrow Z$.

■

Вправа 10.3. Чи є суттєвою для пункту 3. попереднього твердження умова локальної лінійної зв'язності простору Y ?

Вправа 10.4. Показати, що саме умова лінійної зв'язності X суттєва для пункту 4. попереднього твердження, і, скажімо, слабшої умови лінійної зв'язності лише Y недостатньо. Щоб побудувати контрприклад, можна скористатися прикладом 7.2. Аналогічним чином можна показати важливість цієї умови для інших результатів цього та наступних розділів.

Вправа 10.5. Показати, що, втім, пункт 4. попереднього твердження залишиться вірним, якщо замість лінійної зв'язності X та Y вимагати,

щоб X був зв'язним і локально зв'язним. Перша з цих умов означає, що Y також зв'язний в силу неперервності та сюр'єктивності p , а друга еквівалентна локальній зв'язності Y (це доводиться дослівно так само, як твердження 10.1, якщо замінити там всюди локальну лінійну зв'язність на локальну зв'язність). Пор. з теоремою 27.1 курсу топології. Спробуйте також визначити, які з наступних тверджень будуть вірними за такої заміни умов.

Наслідок 10.2. *Будь-які два універсальні накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q) локально лінійно зв'язного простору Y ізоморфні. Зокрема, їхні накриваючі простори X і Z гомеоморфні.*

Доведення. Зауважимо, що в умовах цього наслідку X та Z локально лінійно зв'язні за твердженням 10.1, а Y лінійно зв'язний, бо таким є X (і Z). Тоді за пунктом 6. попереднього твердження існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ даних накрить. В силу пункту 3. того ж твердження, (X, Z, φ) є накриттям. Оскільки це накриття однозв'язного простору Z лінійно зв'язним X , відображення φ є гомеоморфізмом в силу твердження 9.2, тобто ізоморфізмом накрить за наслідком 10.1.

■

Зауваження. Інший спосіб показати, що $\varphi: X \rightarrow Z$ з доведення попереднього наслідку є ізоморфізмом, – побудувати його для двох точок $x \in X$, $z \in Z$ так, що $\varphi(x) = z$, разом з морфізмом $\psi: Z \rightarrow X$ таким, що $\psi(z) = x$, і показати їх взаємну оберненість аналогічно до доведення пункту 2. наслідку 10.3 нижче.

З пункту 1. твердження 10.2 випливає, зокрема, що накриття деякого фіксованого топологічного простору Y та їхні морфізми з операцією композиції утворюють *категорію*. При цьому ізоморфізми накрить є ізоморфізмами даної категорії, а пункт 2. згаданого твердження є окремим випадком загальнокатегорного факта: ізоморфізми задають відношення еквівалентності між об'єктами (та повторює його доведення; знову ж, див. [11, с. 162-165, с. 209-213 перекладу] та інші посилання із зауваження після наслідку 5.1 для знайомства з цими поняттями).

Розглянемо тепер підкатегорію накрить лінійно зв'язного та локально лінійно зв'язного простору Y з лінійно зв'язними накриваючими просторами (що є також локально лінійно зв'язними в силу твердження 10.1), морфізми якої визначені так само. Пункт 6. твердження 10.2 означає тоді, що у цій категорії універсальні накриття є *універсальними відштовхуючими об'єктами* (і саме за цією властивістю універсальності ці накриття так називаються), а пункт 7. того ж твердження – що тривіальні накриття є *універсальними притягуючими об'єктами*.

Також можна говорити про категорію накриттів з відміченими точками простору Y з відміченою точкою $y \in Y$:

Означення 10.2. *Накриттям з відміченою точкою* топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ будемо називати накриття (X, Y, p) разом з точкою $x \in X$ такою, що $p(x) = y$. *Морфізмом* (відповідно, *ізоморфізмом*) *накриттів* (X, Y, p) і (Z, Y, q) з відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ зветься неперервне відображення (відповідно, гомеоморфізм) $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ і $\varphi(x) = z$. Якщо існує ізоморфізм накриттів з відміченими точками, то говорять, що вони *ізоморфні*.

Зауваження. Таким чином, морфізм (відповідно, ізоморфізм) накриттів з відміченими точками є, зокрема, морфізмом (ізоморфізмом) накриттів у звичайному сенсі. Аналогічно до загального випадку, з пункту 1. твердження 10.2 випливає, що попереднє означення дійсно описує об'єкти та морфізми деякої категорії.

Вправа 10.6. Перевірити, що ізоморфізми накриттів з відміченими точками також є ізоморфізмами у загальнокатегорному сенсі, тобто бієктивними морфізмами, обернені до яких теж є морфізмами. Вивести звідси, що ізоморфність таких накриттів теж є відношенням еквівалентності.

Зауваження. Нарешті, можна також розглядати категорію $\mathcal{C}(Y, y)$ накриттів з відміченими точками та лінійно зв'язними (і локально лінійно зв'язними) накриваючими просторами лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$. З доведень пунктів 6. і 7. твердження 10.2 випливає, що універсальні та тривіальні накриття будуть універсальними об'єктами також і в цій категорії (тільки тепер з однозначно визначеними морфізмами). У розділі 12 ми отримаємо класифікацію усіх таких накриттів з точністю до ізоморфізма (теорема 12.1). Для цього нам будуть корисні наступні уточнені властивості морфізмів накриттів з відміченими точками:

Наслідок 10.3. *Нехай (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття з відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ (тобто $p(x) = q(z) = y$).*

1. *Якщо простори X та Y лінійно зв'язні, то будь-які два морфізми даних накриттів з відміченими точками $\varphi, \psi: X \rightarrow Z$ рівні.*
2. *Якщо простори X , Y і Z лінійно зв'язні та існують морфізми $\varphi: X \rightarrow Z$ і $\psi: Z \rightarrow X$ даних накриттів з відміченими точками, то це взаємно обернені ізоморфізми.*

3. Нехай простори X та Y лінійно зв'язні й локально лінійно зв'язні. Морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ даних накрыть з відміченими точками існує тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

Доведення.

1. Це просто переформулювання пункту 4. твердження 10.2.
2. Згідно з означенням, $\varphi: X \rightarrow Z$ та $\psi: Z \rightarrow X$ неперервні, $q \circ \varphi = p$, $p \circ \psi = q$, $\varphi(x) = z$ і $\psi(z) = x$. Тоді $p \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$ і $\psi \circ \varphi(x) = \psi(z) = x$, тобто неперервне $\psi \circ \varphi: X \rightarrow X$ є морфізмом у себе (ендоморфізмом) накрыття (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$. Оскільки ще одним таким ендоморфізмом є тотожне відображення $id_X: X \rightarrow X$, а X лінійно зв'язний, $\psi \circ \varphi = id_X$ за попереднім пунктом. Аналогічно перевіряється, що $\varphi \circ \psi = id_Z$. Таким чином, φ та ψ є взаємно оберненими неперервними відображеннями, отже кожне з них – гомеоморфізм та ізоморфізм даних накрыть з відміченими точками.
3. Це, у свою чергу, переформулювання пункту 5. твердження 10.2.

■

Зауваження. З іншого боку, сукупність класів ізоморфних накрыть з $\mathcal{C}(Y, y)$ можна розглядати і як множину з відношенням (часткового) порядку. Тут позначатимемо (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$ через (X, Y, p, x) . Інколи кажуть, що накрыття $(Z, Y, q, z) \in \mathcal{C}(Y, y)$ *підпорядковане* накрыттю $(X, Y, p, x) \in \mathcal{C}(Y, y)$, якщо між ними існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$. Тоді він існує й для будь-яких накрыть, що ізоморфні даним (чому?), отже підпорядкованість можна перенести як відношення на сукупність класів ізоморфності. Тоді з пункту 1. твердження 10.2 випливає транзитивність такого відношення, а з пункту 2. попереднього твердження – його антисиметричність (якщо (Z, Y, q, z) підпорядковане (X, Y, p, x) , а $(X, Y, p, x) - (Z, Y, q, z)$, то вони ізоморфні). Разом з очевидною рефлексивністю це демонструє, що підпорядкованість дійсно є відношенням порядку (перевірте це детально за необхідності). Згідно з пунктами 6. і 7. твердження 10.2, клас, що складається з тривіальних накрыть (чому вони всі ізоморфні?), є найменшим елементом цієї множини, а клас, що складається з універсальних (що ізоморфні за наслідком 10.2) – найбільшим. Звичайно, ми поки що не знаємо, чи ці універсальні накрыття існують. Критерії цього будуть встановлені у розділі 12 (наслідок 12.2).

11 Автоморфізми накриття та регулярні накриття

У цьому розділі ми дамо відповідь на одне з питань, що були поставлені на початку попереднього, а саме з'ясуємо за яких умов довільне накриття є накриттям над простором орбіт деякої неперервної та цілком розривної дії (принаймні, з точністю до якогось відношення еквівалентності). Виявляється, що для цього потрібно розглянути множину ізоморфізмів цього накриття на себе:

Означення 11.1. *Автоморфізмом* накриття (X, Y, p) зветься його ізоморфізм на себе.

Зауваження. Таким чином, за наслідком 10.1, автоморфізм накриття (X, Y, p) – це такий гомеоморфізм $\varphi: X \rightarrow X$, що $p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить будь-який шар $p^{-1}(y)$ цього накриття на себе, переставляючи його елементи. Зокрема, англійською автоморфізм накриття зветься з цієї причини *deck transformation* – ”перетворенням колоди” (карт). Множину усіх автоморфізмів накриття (X, Y, p) позначатимемо через $\text{Aut}(X, Y, p)$. Наступне твердження демонструє, що за додаткової умови лінійної зв’язності X та Y це якраз і буде потрібна нам група, що діє на X неперервно та цілком розривно.

Зауважимо, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з лінійно зв’язними X та Y однозначно визначений образом довільної точки $x \in X$ за пунктом 4. твердження 10.2, тобто якщо $\varphi, \psi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ та $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$. Як обговорювалося у вправах 10.4 та 10.5, для цієї однозначної визначеності є суттєвою лінійна зв’язність X , яку, однак, можна тут замінити умовою зв’язності та локальної зв’язності цього простору.

Твердження 11.1. *Для будь-якого накриття (X, Y, p) множина його автоморфізмів $\text{Aut}(X, Y, p)$ з операцією композиції є групою. Умова $\varphi \cdot x := \varphi(x)$ для $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ та $x \in X$ визначає неперервну дію цієї групи на X . Якщо до того ж топологічні простори X та Y лінійно зв’язні, то ця дія цілком розривна.*

Доведення. Розглянемо довільні $\varphi, \psi \in \text{Aut}(X, Y, p)$. Тоді, наприклад, з доведення пункту 2. твердження 10.2 випливає, що композиція $\varphi \circ \psi$, тотожне відображення id_X і обернене φ^{-1} належать до $\text{Aut}(X, Y, p)$. Таким чином, на $\text{Aut}(X, Y, p)$ коректно визначена асоціативна операція композиції, для якої одиницею (нейтральним елементом) є id_X (бо

$\varphi \circ id_X = id_X \circ \varphi = \varphi$ для будь-якого φ), а оберненим елементом до φ є φ^{-1} (бо $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id_X$). Тому це група.

В умові дійсно описана дія $Aut(X, Y, p)$ на X , бо $\varphi \cdot (\psi \cdot x) = \varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi) \cdot x$ та $id_X \cdot x = id_X(x) = x$ для будь-яких $\varphi, \psi \in Aut(X, Y, p)$, $x \in X$. Для цієї дії λ і будь-якого $\varphi \in Aut(X, Y, p)$ за побудовою $\lambda_\varphi = \varphi$, що є гомеоморфізмом, тому λ неперервна.

Нехай тепер X та Y лінійно зв'язні, $x \in X$, $y := p(x) \in Y$, а відкрита $U \ni y$ – правильно накритий окіл y , прообраз якого має вигляд $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ з означення накриття. Оберемо $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α є відкритим околом x . Нехай U_α і $\lambda_\varphi(U_\alpha) = \varphi(U_\alpha)$ перетинаються для деякого $\varphi \in Aut(X, Y, p)$, тобто існує точка $z \in U_\alpha$ така, що $z = \varphi(w)$ для деякого $w \in U_\alpha$. Тоді за означенням автоморфізма $p(z) = p(\varphi(w)) = p(w)$. Обмеження p на U_α є гомеоморфізмом, зокрема ін'єктивним, тому $w = z = \varphi(w)$. Тоді $\varphi = id_X$ в силу однозначної визначеності автоморфізмів. Таким чином, $U_\alpha \cap \lambda_\varphi(U_\alpha) = \emptyset$ при $\varphi \neq id_X$, тобто U_α – окіл x , існування якого вимагається в означенні цілком розривної дії.

■

Вправа 11.1. Показати, що ізоморфні накриття мають ізоморфні групи автоморфізмів. Чи вірно це також для відношень еквівалентності накрить, що описані далі у вправах 11.2 та 11.3?

Зауваження. У подальшому ми будемо мати на увазі саме ту дію групи автоморфізмів $Aut(X, Y, p)$ на X , що описана у попередньому твердженні. З іншого боку, у випадку накриття простору орбіт $(X, X/G, p)$ з твердження 7.1 у нас вже є група G , що діє неперервно та цілком розривно на X . Виявляється, що для лінійно зв'язного X можна побудувати канонічний ізоморфізм між групами G і $Aut(X, X/G, p)$, що пов'язує ці дві дії:

Твердження 11.2. *Якщо група G діє на лінійно зв'язному топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, то відображення $G \rightarrow Aut(X, X/G, p)$, що ставить у відповідність елементу групи $a \in G$ гомеоморфізм $\lambda_a: X \rightarrow X$, є ізоморфізмом груп.*

Доведення. Відображення λ_a для $a \in G$ дійсно є гомеоморфізмами за означенням неперервної дії (точніше, за наслідком 7.1). Крім того, $p(\lambda_a(x)) = G \cdot (a \cdot x) = G \cdot x = p(x)$ для будь-яких $a \in G$, $x \in X$ (як у доведенні твердження 7.1). Таким чином, $p \circ \lambda_a = p$, отже $\lambda_a \in Aut(X, X/G, p)$, й ми дійсно коректно визначили відображення в групу автоморфізмів. Оскільки $\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b$ для будь-яких $a, b \in G$ згідно з зауваженням після

означення 7.2, це гомоморфізм груп. Його ядром є $\{a \in G \mid \lambda_a = id_X\} = \{e\}$, бо дія вільна. Тому цей гомоморфізм ін'єктивний за пунктом 1. твердження А.2.

Щоб показати, що побудоване відображення дійсно є ізоморфізмом, залишилося перевірити його сюр'єктивність. Нехай $\varphi \in \text{Aut}(X, X/G, p)$. Оберемо якусь $x \in X$. Згідно з означенням автоморфізма накриття, $G \cdot x = p(x) = p(\varphi(x)) = G \cdot \varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = a \cdot x = \lambda_a(x)$ для деякого $a \in G$ (причому a визначений однозначно, бо дія вільна: $a \cdot x \neq b \cdot x$ при $a \neq b$). Тоді $\varphi = \lambda_a$ за однозначною визначеністю автоморфізмів. Це й означає сюр'єктивність. Зауважимо, що лише тут ми використали лінійну зв'язність X .

■

Зауваження. Хоча ми й знаємо тепер, що група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на лінійно зв'язному накриваючому просторі X неперервно та цілком розривно, залишається питання, коли база Y є простором орбіт. Сформулюємо тепер необхідні і достатні умови того, що це так, тобто (X, Y, p) має вигляд накриття простору орбіт з попереднього твердження (точніше, еквівалентне йому в деякому сенсі, див. наступні зауваження і вправи). Тут $X/\text{Aut}(X, Y, p)$ позначає простір орбіт дії з твердження 11.1.

Твердження 11.3. *Нехай (X, Y, p) – накриття, де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. *Існує гомеоморфізм $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що*

$$\psi(p(x)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$$

для будь-якої точки $x \in X$.

2. *Група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.*

3. *Існує точка $y \in Y$ така, що група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно.*

Зауваження. Умова на ψ з пункту 1. даного твердження повністю визначає це відображення (бо p – сюр'єкція) і еквівалентна рівності $\psi \circ p = q$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проекція на простір орбіт, тобто комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ Y & \xrightarrow{\psi} & X/\text{Aut}(X, Y, p) \end{array}$$

просторів та непервних відображень. Пор. з наведеною перед означенням 10.1 діаграмою, що ілюструє поняття морфізма, зокрема ізоморфізма, накрить.

Вправа 11.2. За аналогією з означенням 10.1 визначити відношення еквівалентності накрить зі спільним накриваючим простором X , відносно якого (X, Y, p) в умовах твердження 11.3 еквівалентне накриттю $(X, X/\text{Aut}(X, Y, p), q)$.

Вправа 11.3. За допомогою комутативної діаграми з вправи 10.1 визначити відношення еквівалентності (ізоморфності) двох довільних накрить (X, Y, p) і (Z, W, q) , узагальнивши означення 10.1 і попередню вправу.

Доведення. 1. $\Leftarrow$ 2. Отже, нехай група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на усіх шарах накриття. Тоді умова $\psi(p(x)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$, $x \in X$ коректно визначає відображення $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$. Дійсно, нехай $y = p(x) = p(z) \in Y$. Оскільки x і z належать до одного шару $p^{-1}(y)$, за умовою транзитивності існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x) = \varphi \cdot x$. Це й означає, що $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, тобто орбіта $\psi(y)$ визначена однозначно. І навпаки, якщо $\psi(p(x)) = \psi(p(z))$, тобто $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, то існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x)$. Тоді з означення автоморфізма випливає, що $p(x) = p(\varphi(x)) = p(z)$. Це означає, що ψ ін'єктивне. Воно сюр'єктивне, бо будь-яка орбіта $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$ є образом $p(x)$ для її довільної точки x . Прообраз будь-якої відкритої підмножини $U \subset X/\text{Aut}(X, Y, p)$ згідно з побудовою ψ та сюр'єктивністю p дорівнює $\psi^{-1}(U) = p(p^{-1}(\psi^{-1}(U))) = p(q^{-1}(U))$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт (див. комутативну діаграму вище). Оскільки відображення q неперервне, а p – відкрите за вправою 7.1, $\psi^{-1}(U)$ відкрита. Отже, ψ неперервне. Нарешті, для будь-якої відкритої $U \subset Y$ знову ж за побудовою та бієктивністю ψ маємо $q^{-1}(\psi(U)) = p^{-1}(\psi^{-1}(\psi(U))) = p^{-1}(U)$. Це відкрита множина, бо p неперервне, отже $\psi(U)$ відкрита за означенням фактортопології. Звідси маємо, що ψ відкрите і таким чином дійсно є гомеоморфізмом. Він задовольняє умову пункту 1. за побудовою.

1. $\Rightarrow$ 2. Нехай ψ – гомеоморфізм з пункту 1. Для будь-яких $y \in Y$, $x, z \in p^{-1}(y)$ тоді за умовою цього пункту маємо

$$\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \psi(p(x)) = \psi(y) = \psi(p(z)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z,$$

що й означає існування $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такого, що $z = \varphi(x)$, тобто транзитивність дії.

2. $\Leftarrow$ 3. Нехай $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y)$ для деякої $y \in Y$. Оскільки Y лінійно зв'язний, для будь-якої $y' \in Y$ існує шлях $g \in C(I, Y)$,

що з'єднує її з y : $g(0) = y'$, $g(1) = y$. Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ тоді за лемою 8.1 існують і єдині підняття $f, h \in C(I, X)$ цього шляху з початками в x', z' відповідно: $p \circ f = p \circ h = g$, $f(0) = x'$, $h(0) = z'$. Їхні кінці $x := f(1)$ і $z := h(1)$ повинні належати до $p^{-1}(y)$. З транзитивності дії на цьому шарі маємо, що існує такий $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$, що $\varphi(x) = z$. З означення автоморфізма тоді випливає, що

$$p \circ \varphi \circ f(1 - t) = p \circ f(1 - t) = g(1 - t) = p \circ h(1 - t)$$

для будь-якого $t \in I$, тобто шляхи $\varphi \circ \bar{f}$ і $\bar{h}$ є підняттями $\bar{g}$ зі спільним початком $\varphi(\bar{f}(0)) = \varphi(x) = z = \bar{h}(0)$. Тоді за єдиністю у лемі 8.1 маємо $\varphi \circ \bar{f} = \bar{h}$, зокрема, $\varphi(x') = \varphi(\bar{f}(1)) = \bar{h}(1) = z'$. Таким чином, ми показали, що $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y')$.

Нарешті, імплікація 2. $\Rightarrow$ 3. тривіальна. ■

Зауваження. Імплікація 2. $\Leftarrow$ 3. – єдина у цьому доведенні, де явно використовувалася лінійна зв'язність (причому лише Y). Але насправді лінійна зв'язність X та Y суттєва для формулювання попереднього твердження, бо забезпечує розривність дії за твердженням 11.1, а отже те, що $(X, X/\text{Aut}(X, Y, p), q)$ є накриттям за твердженням 7.1. Накриття з властивістю, що описана у твердженні 11.3, мають спеціальну назву:

Означення 11.2. Накриття (X, Y, p) , де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, зветься *регулярним* (або *накриттям Галуа*), якщо група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.

Зауваження. З твердження 11.3 випливає, що "для будь-якої точки $y \in Y$ " у цьому означенні можна замінити на "для деякої точки $y \in Y$ ". Оскільки цілком розривна (за твердженням 11.1) дія групи $\text{Aut}(X, Y, p)$ на X є вільною, у випадку регулярного накриття ця група діє на кожному шарі $p^{-1}(y)$ накриття вільно і транзитивно: для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує єдиний автоморфізм $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $\varphi(x) = z$. Фіксуючи точку x , ми таким чином отримуємо бієкцію між $p^{-1}(y)$ та $\text{Aut}(X, Y, p)$.

Приклад 11.1. Накриття $(X, X/G, p)$, де група G неперервно та цілком розривно діє на лінійно зв'язному і локально лінійно зв'язному просторі X , є регулярним. Дійсно, шарами цього накриття є орбіти $G \cdot x$, і для будь-яких двох точок $a \cdot x, b \cdot x \in G \cdot x$ автоморфізм $\lambda_{ba^{-1}} \in \text{Aut}(X, X/G, p)$ (див. твердження 11.2) переводить першу в другу. Також воно задовольняє пункту 1. твердження 11.3 для тотожного ψ , бо простори орбіт за

діями груп G і $\text{Aut}(X, X/G, p)$ збігаються в силу твердження 11.2. Цей приклад є базовим, бо будь-яке регулярне накриття у певному сенсі зводиться до такого, як описано у твердженні 11.3.

Зауваження. Повернемося до фундаментальних груп. У випадку накриття $(X, X/G, p)$ з попереднього прикладу у доведенні пункту 2. теореми 9.1 було показано, що для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(X/G, G \cdot x)$ є ядром деякого гомоморфізма $\pi_1(X/G, G \cdot x) \rightarrow G$ і тому нормальна (нагадаємо також, що $p_*(\pi_1(X, x))$ ізоморфна групі $\pi_1(X, x)$ за пунктом 1. твердження 9.1 і зауваженням після його формулювання). Виявляється, що нормальність цієї підгрупи є зручним алгебраїчним критерієм регулярності накриття. Почнемо його доведення з двох корисних загальних лем.

Лема 11.1. *Нехай $p: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, $x, z \in X$, $p(x) = p(z)$, шлях $h: I \rightarrow X$ з'єднує x і z . Тоді*

$$p_*(\pi_1(X, z)) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X, x)) [p \circ h]$$

тобто підгрупи $p_(\pi_1(X, x))$ і $p_*(\pi_1(X, z))$ спряжені в $\pi_1(Y, y)$, де $y = p(x) = p(z)$, у сенсі прикладу A.12.*

Доведення. Отже, $h \in C(I, X)$, $h(0) = x$, $h(1) = z$, тому $p \circ h \in C(I, Y)$ як композиція неперервних, $p \circ h(0) = p \circ h(1) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y , отже визначений її гомотопічний клас $[p \circ h] \in \pi_1(Y, y)$. Нехай $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, z)$ і $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами h і $p \circ h$ відповідно. Тоді для будь-якого $[g] \in \pi_1(Y, y)$ з побудови ізоморфізма β , означення множення і вигляду обернених елементів фундаментальної групи (див. теорему 4.1) випливає, що

$$\beta([g]) = [\overline{(p \circ h)} * g * (p \circ h)] = [\overline{p \circ h}][g][p \circ h] = [p \circ h]^{-1}[g][p \circ h] = C_{[p \circ h]^{-1}}([g])$$

у позначеннях прикладу A.12, тобто β є спряженням у $\pi_1(Y, y)$ з елементом $[p \circ h]^{-1}$. Крім того, за лемою 10.1 маємо комутативність $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$. Зауважимо, що p_* у формулюванні та цій комутативності насправді позначає два, взагалі кажучи, різні індуковані гомоморфізми: $p_*: \pi_1(X, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ справа. Тоді, оскільки α – бієкція,

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(X, z)) &= p_*(\alpha(\pi_1(X, x))) = \beta(p_*(\pi_1(X, x))) = \\ &= C_{[p \circ h]^{-1}}(p_*(\pi_1(X, x))) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X, x)) [p \circ h]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали потрібну рівність підгруп. ■

Означення 11.3. Відображення топологічних просторів $\varphi: X \rightarrow Y$ зветься *локальним гомеоморфізмом*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $\varphi(U)$ відкрита і обмеження $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ – гомеоморфізм (відносно індукованих топологій).

Приклад 11.2. Для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p є локальним гомеоморфізмом: для довільної $x \in X$ в якості U з попереднього означення візьмемо правильно накриваючий окіл U_α точки x . Тоді $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow p(U_\alpha)$ – гомеоморфізм за означенням накриття (де $p(U_\alpha)$ – правильно накритий окіл $p(x)$).

Лема 11.2. 1. *Будь-який локальний гомеоморфізм є неперервним відкритим відображенням.*

2. *Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли це бієкція і локальний гомеоморфізм.*

Доведення.

1. Отже, нехай відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ просторів X та Y є локальним гомеоморфізмом. Для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in \varphi^{-1}(V)$ нехай $U \ni x$ – окіл з означення локальної гомеоморфності. Оскільки $\varphi|_U$ неперервне, а перетин $\varphi(U) \cap V$ є відкритим околom $\varphi(x)$ у індукованій топології $\varphi(U)$, його прообраз $(\varphi|_U)^{-1}(\varphi(U) \cap V) = U \cap \varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(V)$ є відкритим околom x у індукованій топології відкритої U , а отже у X . Оскільки це так для усіх точок $\varphi^{-1}(V)$, ця множина відкрита. Таким чином, φ неперервне. Аналогічним чином перевіряється його відкритість: для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $x \in V$ візьмемо окіл $U \ni x$ як вище. Тоді $U \cap V$ – відкритий окіл x у індукованій топології U , і, оскільки $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ бієктивне та відкрите, $\varphi|_U(U \cap V) = \varphi(U) \cap \varphi(V) \subset \varphi(V)$ є відкритим околom $\varphi(x)$ у індукованій топології відкритої $\varphi(U)$, а отже у Y . Оскільки це так для кожної точки $\varphi(x) \in \varphi(V)$, ця множина відкрита.

2. $\Rightarrow$ Дійсно, будь-який гомеоморфізм бієктивний, а щоб перевірити його локальну гомеоморфність, достатньо у попередньому означенні покласти $U = X$.

$\Leftarrow$ Достатність тут випливає з пункту 1.: бієктивний локальний гомеоморфізм є неперервним відкритим відображенням, а отже гомеоморфізмом.

■

Теорема 11.1 (Критерії регулярності накриття). *Нехай (X, Y, p) – накриття, де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. *Накриття (X, Y, p) є регулярним.*
2. *Підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$ для будь-якої точки $x \in X$.*
3. *$p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких точок $x, z \in X$ таких, що $p(x) = p(z)$.*
4. *Існує точка $x \in X$ така, що підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$.*
5. *Існує точка $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких точок $x, z \in p^{-1}(y)$.*

Доведення. Ми будемо доводити імплікації між цими твердженнями згідно зі схемою, що зображена нижче.

1. $\Rightarrow$ 2. Якщо (X, Y, p) регулярне, то з твердження 11.3 випливає існування гомеоморфізма $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ такого, що $\psi \circ p = q$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт. Тоді для кожної $x \in X$ маємо $\psi(p(x)) = q(x) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$, а індукований гомоморфізм $\psi_*: \pi_1(Y, p(x)) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ є ізоморфізмом в силу твердження 5.2. Оскільки $\psi_* \circ p_* = (\psi \circ p)_* = q_*$ за пунктом 2. твердження 5.1, $\psi_*(p_*(\pi_1(X, x))) = q_*(\pi_1(X, x))$, де $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, p(x))$ і $q_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ – відповідні індуковані гомоморфізми. При цьому $q_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ за пунктом 2. теореми 9.1. Звідси випливає, що $p_*(\pi_1(X, x))$ – нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$, бо ψ_* – ізоморфізм (перевірте, що при ізоморфізмі нормальна підгрупа переходить у нормальну).

2. $\Rightarrow$ 3. випливає з леми 11.1 та міркувань прикладу А.12: для будь-якої $x \in X$ усі $p_*(\pi_1(X, z))$ для $z \in X$ таких, що $p(z) = p(x)$, спряжені з $p_*(\pi_1(X, x))$, а отже збігаються з нею, оскільки $p_*(\pi_1(X, x))$ нормальна. Зауважимо, що для цього було б достатньо нормальності $p_*(\pi_1(X, x))$ лише для однієї точки x з кожного шару $p^{-1}(y)$, $y \in Y$.

2. $\Rightarrow$ 4. тривіальним чином.

4. $\Rightarrow$ 5. доводиться дослівно так само, як 2. $\Rightarrow$ 3., тільки тепер лише для точок $p^{-1}(y)$, де $y := p(x)$, а x – точка з твердження 4. При цьому за цим твердженням нормальною є лише $p_*(\pi_1(X, x))$, але цього достатньо в силу зауваження наприкінці доведення 2. $\Rightarrow$ 3.

5. $\Rightarrow$ 3. Почнемо діяти аналогічно до доведення імплікації 2. $\Leftarrow$ 3. у твердженні 11.3. Нехай $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$. З лінійної зв'язності Y випливає існування для будь-якої точки $y' \in Y$ шляху $g \in C(I, Y)$, що з'єднує її з y . Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ нехай $f, h \in C(I, X)$ – (єдині) підняття шляху g з початками в x', z' відповідно. Зокрема, $p \circ f = p \circ h = g$. Покладемо $x := f(1)$, $z := h(1)$, тоді $x, z \in p^{-1}(y)$. Нехай $\alpha: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(X, x)$, $\beta: \pi_1(Y, y') \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $\gamma: \pi_1(X, z') \rightarrow \pi_1(X, z)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f , g і h відповідно. За лемою 10.1, тоді $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$, де p_* позначає два різні індуковані гомоморфізми: $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ справа. З цієї ж леми випливає, що $p_* \circ \gamma = \beta \circ p_*$, де тепер p_* позначає $p_*: \pi_1(X, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, z') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ справа. Таким чином, діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x') & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y') & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X, z') & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(X, z) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y') & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y) \end{array}$$

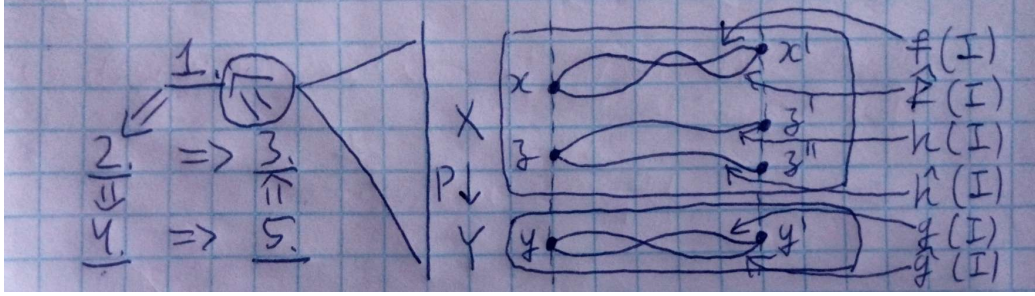
комутативні. Тоді з цих комутативностей, того, що α і γ – бієкції, та властивості точки y випливає, що

$$\begin{aligned} \beta(p_*(\pi_1(X, x'))) &= p_*(\alpha(\pi_1(X, x'))) = p_*(\pi_1(X, x)) = \\ &= p_*(\pi_1(X, z)) = p_*(\gamma(\pi_1(X, z'))) = \beta(p_*(\pi_1(X, z'))), \end{aligned}$$

тому, оскільки β – бієкція, $p_*(\pi_1(X, x')) = p_*(\pi_1(X, z'))$, що й потрібно було показати (це міркування, у свою чергу, нагадує один з кроків у доведенні теореми 10.1).

3. $\Rightarrow$ 1. Це основний етап доведення теореми. Отже, нам відомо, що усі підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ для точок x , що належать одному й тому ж шару, збігаються. Нехай $y \in Y$. Треба показати, що $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на $p^{-1}(y)$ транзитивно, тобто що для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $\varphi(x) = z$.

Побудуємо відображення φ , використовуючи шляхи аналогічно до конструкції підняття $\tilde{\varphi}$ у доведенні теореми 10.1. Цю побудову проілюстровано знизу. Для будь-якої $x' \in X$ в силу лінійної зв'язності X існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує x з x' : $f(0) = x$, $f(1) = x'$. Тоді його проєкція $g := p \circ f \in C(I, Y)$ є шляхом, що з'єднує $y = p(x) = p(f(0))$ з $y' := p(x') = p(f(1))$. За лемою 8.1 у нього існує єдине підняття $h \in C(I, X)$ з початком у z , тобто $p \circ h = g$ і $h(0) = z$. Позначимо через $z' := h(1)$ кінець цього шляху. Зокрема, $p(z') = p \circ h(1) = g(1) = y'$.



Аналогічно до доведення теореми 10.1, нам тепер потрібно показати, що z' насправді не залежить від шляху f , тобто однозначно визначена точками x, z та x' . Дійсно, нехай $\hat{f} \in C(I, X)$ також з'єднає x з x' . Тоді $\hat{g} := p \circ \hat{f} \in C(I, Y)$ так само з'єднає y з y' . Нехай тепер $\hat{h} \in C(I, X)$ – (єдине) підняття $\hat{g}$ з початком у z , і $z'' := \hat{h}(1) \in p^{-1}(y')$ – його кінець. Тоді добуток $\bar{f} * \hat{f}$ є петлею в x' , що проєктується у петлю $p \circ (\bar{f} * \hat{f}) = \bar{g} * \hat{g}$ в y' . Її гомотопічним класом у $\pi_1(Y, y')$ є

$$[\bar{g} * \hat{g}] = [p \circ (\bar{f} * \hat{f})] = p_*([\bar{f} * \hat{f}]) \in p_*(\pi_1(X, x')) = p_*(\pi_1(X, z')),$$

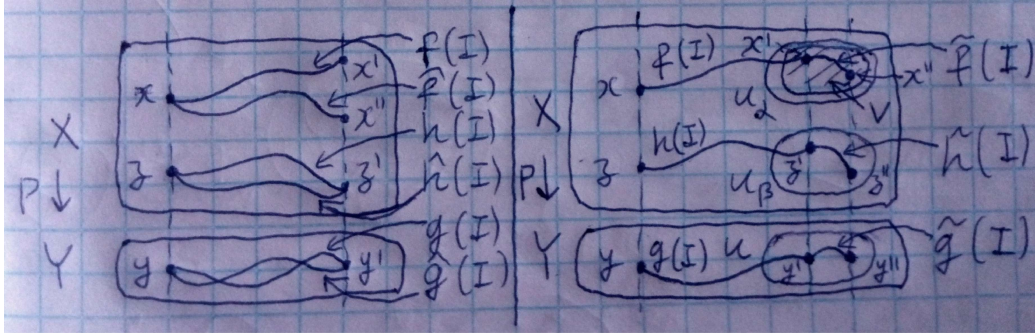
де остання рівність випливає з умови 3., бо $x', z' \in p^{-1}(y')$. Крім того, шлях $\bar{h} * \hat{h}$ починається в z' і є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\bar{h} * \hat{h}) = \bar{g} * \hat{g}$. Оскільки $[\bar{g} * \hat{g}] \in p_*(\pi_1(X, z'))$, (єдине) підняття $\bar{g} * \hat{g}$ з початком у z' повинне бути петлею за пунктом 2. твердження 9.1, тобто $z'' = \hat{h}(1) = \bar{h} * \hat{h}(1) = \bar{h} * \hat{h}(0) = \bar{h}(0) = z'$. Це й доводить незалежність z' від f . Тому (для фіксованих x і z) коректно визначене відображення $\varphi: X \rightarrow X$, що ставить у відповідність кожній $x' \in X$ точку $\varphi(x') := z'$ описаним вище чином. При цьому за його побудовою маємо у наших позначеннях $p(\varphi(x')) = p(z') = y' = p(x')$ для усіх x' , тобто $p \circ \varphi = p$. Для $x' = x$ можна взяти $f = e_x$, тоді $g = e_y$ і $h = e_z$, звідки $\varphi(x) = z' = h(1) = z$. Таким чином, щоб показати, що φ – потрібний нам елемент групи $\text{Aut}(X, Y, p)$, залишилися перевірити його гомеоморфність. Згідно з пунктом 2. леми 11.2, для цього достатньо буде показати, що це бієкція і локальний гомеоморфізм.

Перевірка ін'єктивності φ схожа на раніше зроблену перевірку коректності. Вона зображена на рисунку нижче. Нехай $x', x'' \in X$ такі, що $\varphi(x') = \varphi(x'') = z'$. За побудовою φ це означає, що для шляхів $f, \hat{f} \in C(I, X)$, що з'єднують x з x' та x'' відповідно, їхніх проєкцій $g = p \circ f, \hat{g} = p \circ \hat{f} \in C(I, Y)$ та піднятів $h, \hat{h} \in C(I, X)$ шляхів g і $\hat{g}$ відповідно з початками у z маємо $h(1) = \hat{h}(1) = z'$. Тоді визначена петля $\bar{h} * \hat{h}$ у z' , що накриває петлю $p \circ (\bar{h} * \hat{h}) = \bar{g} * \hat{g}$ в $y' = p(z') = p(x') = p(x'')$.

Оскільки тепер для відповідного гомотопічного класу в $\pi_1(Y, y')$ маємо

$$[\bar{g} * \hat{g}] = [p \circ (\bar{h} * \hat{h})] = p_*([\bar{h} * \hat{h}]) \in p_*(\pi_1(X, z')) = p_*(\pi_1(X, x'))$$

знову ж за умовою 3., підняття $\bar{f} * \hat{f}$ петлі $\bar{g} * \hat{g}$ з початком у $\bar{f} * \hat{f}(0) = \bar{f}(0) = x'$ повинне бути петлею, тобто $x'' = \hat{f}(1) = \bar{f} * \hat{f}(1) = \bar{f} * \hat{f}(0) = x'$.



Отже, φ ін'єктивне. Щоб показати його сюр'єктивність, спочатку побудуємо для довільної $z' \in X$ шлях $h \in C(I, X)$, що з'єднує z і z' та є підняттям $g := p \circ h \in C(I, Y)$, а потім побудуємо підняття $f \in C(I, X)$ шляху g з початком у x (зокрема, $g = p \circ f$). Якщо покласти $x' := f(1)$, то $\varphi(x') = h(1) = z'$ за побудовою φ . Це завершує доведення бієктивності цього відображення.

Як було анонсовано раніше, завершимо доведення імплікації 3. $\Rightarrow$ 1. демонстрацією локальної гомеоморфності φ , що проілюстрована вище. Саме тут єдине місце у доведенні теореми, де знадобиться локальна лінійна зв'язність. Будемо діємо аналогічно до доведення неперервності $\tilde{\varphi}$ у теоремі 10.1. Отже, нехай $x' \in X$. У точки $y' := p(x') \in Y$ за означенням покриття існує правильно накрытий відкритий окіл $U \ni y': p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тоді існують індекси $\alpha, \beta \in A$ такі, що $x' \in U_\alpha, z' := \varphi(x') \in U_\beta$ (бо $x', z' \in p^{-1}(y')$). В силу локальної лінійної зв'язності X , існує лінійно зв'язна відкрита V така, що $x' \in V \subset U_\alpha$. Лінійна зв'язність означає, що для будь-якої $x'' \in V$ існує шлях $\tilde{f} \in C(I, V)$, що з'єднує x' з x'' . Якщо тепер $f \in C(I, X)$ – якийсь шлях, що з'єднує x з x' , то шлях $f * \tilde{f} \in C(I, X)$ з'єднує x з x'' . Спроектуємо його у шлях $p \circ (f * \tilde{f}) = g * \tilde{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y з $y'' := p(x'')$, де шляхи $g := p \circ f$ та $\tilde{g} := p \circ \tilde{f}$ з'єднують y з y' та y' з y'' відповідно. Тепер зауважимо, що якщо $h, \tilde{h} \in C(I, X)$ – (єдині) підняття g і $\tilde{g}$ з початками у точках z і z' відповідно, то за побудовою φ шлях h повинен закінчуватися у $\varphi(x') = z'$, тому визначений $h * \tilde{h}$, що є підняттям $p \circ (h * \tilde{h}) = g * \tilde{g}$ з початком у z . Тоді $z'' := \varphi(x'') = h * \tilde{h}(1) = \tilde{h}(1)$

за побудовою φ , тобто це кінець шляху $\tilde{h}$. Оскільки $\tilde{f}(I) \subset V \subset U_\alpha$, $\tilde{g}(I) = p(\tilde{f}(I)) \subset p(V) \subset U$, і тому $\tilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$, бо $\tilde{h}$ є підняттям $\tilde{g}$. При цьому $\tilde{h}(0) = z' \in U_\beta$. Тоді з $\tilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$ та зі зв'язності $\tilde{h}(I)$ аналогічно до доведення теореми 10.1 (або до доведення єдиності у лемі 8.1) випливає, що $\tilde{h}(I) \subset U_\beta$. Зокрема, $z'' = \tilde{h}(1) \in U_\beta$. З іншого боку, $p(z'') = p(x'') = y''$, а обмеження $p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow U$ є гомеоморфізмом за означенням накриття. Таким чином,

$$\varphi(x'') = z'' = (p|_{U_\beta})^{-1}(y'') = (p|_{U_\beta})^{-1}(p(x'')) = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}(x'')$$

для будь-якої $x'' \in V$, тобто $\varphi|_V = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}$, де $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ також є гомеоморфізмом. Тому обмеження $\varphi|_V: V \rightarrow \varphi(V)$ – теж гомеоморфізм, де $\varphi(V)$ відкрита у індукованій топології відкритої U_β , а отже в X , як образ V під дією гомеоморфізма. Це завершує доведення локальної гомеоморфності φ , імплікації та теореми в цілому. Також ми показали, що локально φ дійсно виглядає як тасування колоди карт, переводячи відкриту підмножину U_α у відкриту підмножину U_β композицією обмежень відображення p .

Вправа 11.4. Показати, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з локально лінійно зв'язними X та Y локально виглядає так само.

Зауважимо також, що згідно зі схемою вище імплікація 2. $\Rightarrow$ 3. нам сама по собі насправді не була потрібна.

■

Вправа 11.5. Спробуйте показати суттєвість умови локальної лінійної зв'язності простору X для цієї теореми (аналогічно до зауваження після доведення теореми 10.1).

Наслідок 11.1. Універсальне накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору є регулярним.

Доведення. Тобто маємо накриття (X, Y, p) , де накриваючий простір X однозв'язний (зокрема, лінійно зв'язний, а отже й Y лінійно зв'язний), а Y локально лінійно зв'язний (отже й X локально лінійно зв'язний за твердженням 10.1). Тоді $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для кожної $x \in X$, тому підгрупа $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_{p(x)}]\}$ тривіальна, а отже нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$. Тому накриття регулярне за теоремою 11.1.

■

Приклад 11.3. Оскільки будь-який многовид M є локально лінійно зв'язним за пунктом 5. твердження 29.2 курсу топології, будь-яке універсальне накриття простору M є регулярним. Зокрема, простори $\mathbb{R}^n$,

сфери S^n , тори T^n та дійсні проєктивні простори $\mathbb{R}P^n$ є n -вимірними лінійно зв'язними многовидами для усіх натуральних n (див. розділ 29 курсу топології), тому універсальні накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ і $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ (при $n \geq 2$), що розглядалися у прикладах 7.4 і 7.5 відповідно, регулярні за попереднім наслідком. Крім того, тривимірними лінійно зв'язними многовидами є лінзові простори $L(n, m)$, що були описані у прикладі 7.7 (перевірте це; також тут можна використати твердження 12.4 наступного розділу), тому описані у тому ж прикладі їх універсальні накриття $(S^3, L(n, m), p)$ теж регулярні. Звичайно, регулярність перелічених накриттів впливає також з того, що це накриття над просторами орбіт груп, що діють на однозв'язних і локально лінійно зв'язних накриваючих просторах (що теж є многовидами) неперервно та цілком розривно, згідно з прикладом 11.1. Зауважимо також, що суттєвою для цих міркувань є лише властивість локальної евклідовості многовида. Ми повернемося до обговорення накриттів многовидів у наступному розділі.

Приклад 11.4. Хоча букет двох кіл $S^1 \vee S^1$, а також накриваючий простір його універсального накриття, що було побудоване у прикладі 9.4, і не є многовидами (чому?), $S^1 \vee S^1$ є локально лінійно зв'язним (перевірте це), тому це універсальне накриття теж задовольняє умові наслідку 11.1 і є регулярним. Знову ж, це впливає і з того, що це накриття над простором орбіт (приклад 11.1). Все сказане тут вірне й для узагальнення на букет n кіл у вправі 9.2 (при $n \geq 2$).

Наслідок 11.2. *Накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору, фундаментальна група якого абелева, з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.*

Доведення. Як і в доведенні наслідку 11.1, це накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними X та Y . При цьому в силу лінійної зв'язності Y усі його фундаментальні групи ізоморфні за наслідком 4.1, тому можемо говорити просто про "абелеву фундаментальну групу", маючи на увазі, що $\pi_1(Y, y)$ абелева для будь-якої $y \in Y$. Але тоді всі її підгрупи нормальні, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$, отже накриття регулярне за теоремою 11.1. ■

Приклад 11.5. Усі фундаментальні групи, що поки що були обчислені у цьому курсі, крім фундаментальних груп букетів кіл з прикладу 9.4 і вправи 9.2 (вони ж фундаментальні групи площини з виколотими точками з вправи 9.3), були абелевими, тому накриття відповідних просторів задовольняють попередньому наслідку при виконанні додаткових

умов зв'язності та є таким чином регулярними. Зокрема, неуніверсальні n -листові накриття (S^1, S^1, p) , що визначені дією $\mathbb{Z}_n$ і досліджувалися у прикладах 7.6 та 9.3, є регулярними, бо $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ абелева, а коло S^1 лінійно зв'язне і локально лінійно зв'язне як многовид. Згадаємо, що при отождоженні $\pi_1(S^1, y)$ з $\mathbb{Z}$ для деякої $y \in S^1$ усі $p_*(\pi_1(S^1, x))$ при $x \in p^{-1}(y)$ дійсно збігалися, як це й повинно бути за теоремою 11.1: це була підгрупа $n\mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n . Звичайно, регулярність також впливає з прикладу 11.1, бо це накриття над простором орбіт.

Приклад 11.6. Оскільки топологічні групи мають абелеві фундаментальні групи згідно з вправою 4.3, будь-яке лінійно зв'язне накриття локально лінійно зв'язної топологічної групи регулярне за наслідком 11.2. До таких топологічних груп відносяться $\mathbb{R}^n$, тори T^n (зокрема коло S^1) та матричні групи $SO(n)$, $U(n)$ і $SU(n)$ (див. приклад 4.3). Перевірте, що всі ці топологічні групи дійсно є лінійно зв'язними (для багатьох з них це встановлювалося в курсі топології) та локально лінійно зв'язними. Зокрема, локальну лінійну зв'язність можна вивести з того, що усі дані групи є многовидами, але для матричних груп це не так просто довести.

Вправа 11.6. Показати, що будь-яке дволистоє накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.

Вправа 11.7. Побудувати приклад трилистового накриття простору $S^1 \vee S^1$ з лінійно зв'язним накриваючим простором, що не має нетотожних автоморфізмів, а отже не є регулярним (підказку можна знайти на [11, с. 58, с. 80 перекладу]).

Наслідок 11.3. *Якщо накриття (X, Y, p) регулярне, то його групи монодромії ізоморфні його групі автоморфізмів:*

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq \text{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $x \in X$. Зокрема, якщо це регулярне накриття є універсальним, то

$$\pi_1(Y, y) \simeq \text{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $y \in Y$.

Доведення. Нехай $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – гомеоморфізм з твердження 11.3. У доведенні імплікації $1. \Rightarrow 2.$ теореми 11.1 було показано, що тоді для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ переходить у $q_*(\pi_1(X, x))$ під дією ізоморфізма $\psi_*: \pi_1(Y, p(x)) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$. Тут $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт, $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow$

$\pi_1(Y, p(x))$ і $q_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ – індуковані гомоморфізми. Тоді факторгрупи ізоморфних фундаментальних груп за ізоморфними нормальними підгрупами $p_*(\pi_1(X, x))$ та $q_*(\pi_1(X, x))$ теж ізоморфні (перевірте це):

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq$$

$$\simeq \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)/q_*(\pi_1(X, x)) \simeq \text{Aut}(X, Y, p),$$

де друга ізоморфність є твердженням пункту 2. теорема 9.1.

Оскільки у випадку універсального накриття $\pi_1(X, x)$ (а отже й образи $p_*(\pi_1(X, x))$) тривіальні для усіх $x \in X$, друга ізоморфність в умові даного наслідку випливає з першої (або аналогічним чином виводиться з пункту 2. наслідку 9.1).

■

12 Існування та єдиність накрить

Тут ми розглянемо останнє з питань початку розділу 10, що залишається без відповіді, а саме про умови існування універсального накриття (його єдиність вже було встановлено у розділі 10, тут ми лише узагальнимо відповідне твердження). Насправді наша відповідь буде стосуватися набагато ширшого класу накрить.

12.1 Напівлокальна і локальна однозв'язність

Для того, щоб сформулювати умови існування накрить, нам потрібно буде ввести локальний аналог поняття однозв'язності. Виявляється, що це можна зробити принаймні двома різними змістовними способами:

Означення 12.1. Топологічний простір X зветься

- *напівлокально однозв'язним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що будь-яка петля в x підпростору U гомотопна постійній у X ;
- *локально однозв'язним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якої відкритої $U \ni x$ існує відкрита V така, що $x \in V \subset U$ і будь-яка петля в x підпростору V гомотопна постійній в U .

Зауваження. Умова на U в означенні напівлокальної однозв'язності означає, що для будь-якої петлі $f \in C(I, U) \subset C(I, X)$ (де на U розглядається індукована топологія) у точці x (тобто $f(0) = f(1) = x$) існує

гомотопія $F \in C(I \times I, X)$ петель f (точніше, $i \circ f$, де $i: U \rightarrow X: y \mapsto y$ – відображення включення, що, нагадаємо, є неперервним у індукованій топології) та e_x . Це, у свою чергу, означає рівність гомотопічних класів $i_*([f]) = [i \circ f] = [e_x]$ у групі $\pi_1(X, x)$, де $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ – гомоморфізм, що індукований включенням. Іншими словами, ця умова еквівалентна тому, що $i_*(\pi_1(U, x)) = \{[e_x]\}$, тобто гомоморфізм i_* тривіальний (див. приклад А.7). Аналогічним чином можна переформулювати умову на V в означенні локальної однозв'язності (зробіть це). З цих означень випливає, що будь-який локально однозв'язний простір є напівлокально однозв'язним: якщо покласти $U = X$ в означенні локальної однозв'язності, ми отримаємо умову напівлокальної однозв'язності X . Обернене, взагалі кажучи, невірне, як демонструє приклад 12.4 нижче.

Приклад 12.1. Будь-який однозв'язний (зокрема стяжний, див. приклад 6.1) простір є напівлокально однозв'язним: достатньо взяти $U = X$.

Приклад 12.2. Будь-який многовид є локально однозв'язним, а отже напівлокально однозв'язним. Дійсно, нехай x – довільна точка n -вимірного многовида M , і $U \ni x$ відкрита. Існує карта (W, φ) в околі x , тобто відкрита $W \ni x$ та гомеоморфізм $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тоді $U \cap W$ – теж відкритий окіл x , отже $\varphi(U \cap W)$ – відкритий окіл $\varphi(x)$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки топологія $\mathbb{R}^n$ породжена евклідовою метрикою, існує $\varepsilon > 0$ таке, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset \varphi(U \cap W)$. Покладемо $V := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x))) \subset U \cap W \subset U$. Це теж відкритий окіл x , бо φ – гомеоморфізм. Нехай $f \in C(I, V)$ – петля в x , тоді $\varphi \circ f \in C(I, B_\varepsilon(\varphi(x)))$ – петля у $\varphi(x)$. Куля $B_\varepsilon(\varphi(x))$ стяжна як опукла підмножина $\mathbb{R}^n$, отже однозв'язна, тому існує гомотопія $F \in C(I \times I, B_\varepsilon(\varphi(x)))$ петель $\varphi \circ f$ і $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F \in C(I \times I, V)$ (неперервне як композиція неперервних) буде за означенням гомотопією петель f і e_x у $V \subset U$ аналогічно, наприклад, до першої частини доведення однозв'язності у прикладі 6.2. Таким чином, M локально однозв'язний. Зауважимо, що для цього, як і для локальної лінійної зв'язності, потрібна лише локальна евклідовість M .

Отже, будь який неоднорозв'язний многовид буде прикладом локально однозв'язного (зокрема напівлокально однозв'язного) локально лінійно зв'язного простору, що не є однозв'язним, скажімо, тор T^n (зокрема коло S^1) згідно з прикладом 9.1 або дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ згідно з прикладом 9.2. Ці многовиди до того ж лінійно зв'язні.

Приклад 12.3 (Гавайська серезка). Розглянемо підмножину $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ площини $\mathbb{R}^2$, де S_n – коло радіуса $\frac{1}{n}$ з центром у $(\frac{1}{n}, 0)$ (див. ілюстрацію нижче). У індукованій з площини топології цього простору будь-який

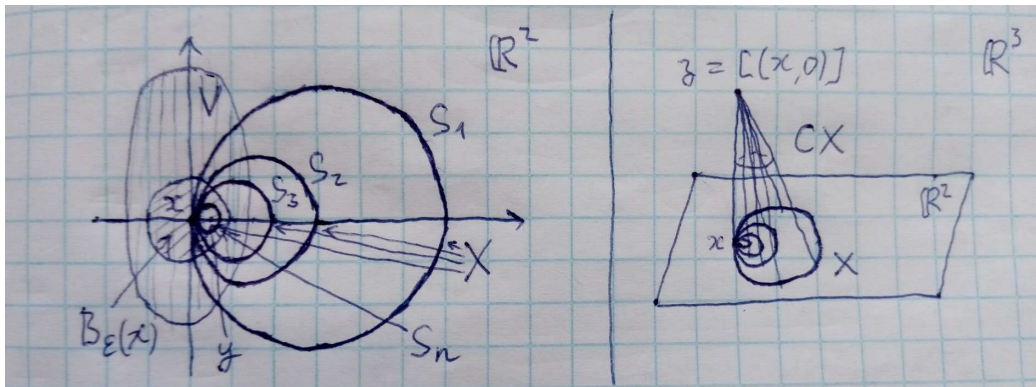
відкритий окіл U точки $x = (0, 0)$ має вигляд $X \cap V$, де V – відкритий окіл x у $\mathbb{R}^2$, тому міститиме перетин $X \cap B_\varepsilon(x)$ множини X з відкритим евклідовим кругом деякого радіуса $\varepsilon > 0$, а отже міститиме й коло S_n для будь-якого n такого, що $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Це коло S_n є носієм петлі

$$f: I \rightarrow X: t \mapsto \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos 2\pi t, \frac{1}{n} \sin 2\pi t \right)$$

у x . Покажемо, що f негомотопна e_x у X . Дійсно, якщо б це було не так та між ними існувала б гомотопія $F \in C(I \times I, X)$, то $i \circ F \in C(I \times I, \mathbb{R}^2 \setminus \{y\})$, де y – якась точка всередині кола S_n , що не належить X (наприклад, $y = (q, 0)$, де $0 < q < \frac{2}{n}$ ірраціональне), а $i: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ – включення, була б гомотопією $f = i \circ f$ і e_x у проколотій площині $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ (знову ж за означенням гомотопії). Цей простір гомотопічно еквівалентний S^1 . А саме, відображення

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{y\} \rightarrow S_y: z \mapsto \frac{z - y}{|z - y|} + y$$

є його (строгою) деформаційною ретракцією на коло $S_y \cong S^1$ з центром в y радіуса 1 аналогічно до прикладу 2.6. Оскільки тоді φ разом з включенням S_y у $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ утворюють пару гомотопічно обернених відображень за доведенням твердження 2.2, індукований гомоморфізм $\varphi_*: \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}, x) \rightarrow \pi_1(S_y, \varphi(x))$ є ізоморфізмом за твердженням 5.2. Він переводить $[f]$ у $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. Але у першій з цих груп $[f] = [e_x]$ за нашим припущенням, а в другій $\varphi \circ f$ має гомотопічний клас $[\varphi \circ f] \neq [e_{\varphi(x)}]$ в силу міркувань прикладу 9.1, тобто ізоморфізм φ_* переводить тривіальний елемент у нетривіальний. Це протиріччя (для якого вистачило б і гомоморфності φ_*) демонструє, що f дійсно негомотопна постійній петлі у X . Таким чином, простір X не є напівлокально однозв'язним (а отже й не є однозв'язним в силу прикладу 12.1 або локально однозв'язним в силу зауваження після означення 12.1). При цьому він лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний (покажіть це).



Означення 12.2. Конусом над топологічним простором X зветься факторпростір $CX := X \times I /_{X \times \{0\}}$.

Зауваження. Нагадаємо, що факторизація за підмножиною означає факторизацію за відношенням еквівалентності, що отожднює усі точки цієї підмножини, не чіпаючи інші. Елементи CX , тобто класи еквівалентності точок $X \times I$, будемо позначати через $[(x, t)]$, де $x \in X$ і $t \in I$. Таким чином, $[(x, 0)]$ складається з усіх точок $X \times \{0\}$, а решта класів $[(x, t)]$ для $t \in (0, 1]$ – кожен з однієї точки (x, t) .

Твердження 12.1. Для будь-якого топологічного простору X конус CX стяжний.

Доведення. Відображення $F: (X \times I) \times I \rightarrow CX: ((x, t), s) \mapsto [(x, st)]$ є неперервним як композиція неперервного (чому?) відображення у $X \times I$ та канонічної проєкції на факторпростір. При цьому $F((x, 0), s) = [(x, 0)]$ для будь-яких $x \in X$ і $s \in I$, тобто еквівалентні точки переходять у рівні, тому F факторизується у неперервне $\hat{F}: CX \times I \rightarrow CX: ([x, t], s) \mapsto [(x, st)]$ (аналогічно до факторизації відображень у твердженні 16.2 курсу топології; відновіть деталі самостійно). Оскільки $F([(x, t)], 0) = [(x, 0)]$ і $F([(x, t)], 1) = [(x, t)]$ для будь-якої $[(x, t)] \in CX$, це гомотопія між постійним відображенням у точку $[(x, 0)]$ і тотожним відображенням CX . Отже, CX стяжний за твердженням 2.3.

■

Приклад 12.4. Тепер розглянемо конус CX над простором X з прикладу 12.3. Його можна вкласти у $\mathbb{R}^3$, як показано на рисунку вище. Для цього достатньо побудувати "звичайний" конус над $X \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ з будь-якою вершиною $z \notin \mathbb{R}^2$, тобто об'єднання усіх відрізків, що з'єднують z з точками X , і ця підмножина $\mathbb{R}^3$ буде гомеоморфною CX (покажіть це). Вершина z при цьому відповідатиме $[(x, 0)] \in CX$. Простір CX стяжний в силу попереднього твердження, отже однозв'язний (зокрема лінійно зв'язний), і тому напівлокально однозв'язний за прикладом 12.1. Крім того, він локально лінійно зв'язний (виведіть це з локальної лінійної зв'язності X). При цьому відкрита підмножина $U := \{[(y, t)] \mid t \in (0, 1]\} \subset CX$ гомотопічно еквівалентна X (перевірте, що це так для будь-якого простору X). Повторюючи міркування прикладу 12.3 для цієї підмножини (або див. далі вправу 12.2), можна показати, що у точки $[(x, 1)] \in U$, де $x = (0, 0)$, не існує відкритого околу V такого, що $[(x, 1)] \in V \subset U$ і будь-яка петля в $[(x, 1)]$, що лежить у V , гомотопна постійній в U (зробіть це). Тому CX не є локально однозв'язним.

Вправа 12.1. Сформулювати локальний аналог поняття стяжності так, щоб з цієї локальної стяжності випливала локальна однозв'язність (а отже й напівлокальна однозв'язність). Див. відповідь у [3, с. 230]. Показати, що будь-який многовид локально стяжний.

Твердження 12.2. *Локальна та напівлокальна однозв'язності є топологічними інваріантами.*

Доведення. Дійсно, гомеоморфізми зберігають відкриті околи і переводять гомотопні петлі у гомотопні (як у прикладі 12.2), тому якщо топологічні простори X та Y гомеоморфні, то X є локально (відповідно, напівлокально) однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y . ■

Вправа 12.2. Чи є локальна та напівлокальна однозв'язності гомотопічними інваріантами (тобто чи вірно, що якщо $X \sim Y$, то X є (напів)локально однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y)?

Твердження 12.3. *Нехай (X, Y, p) – накриття. Простір X є локально (відповідно, напівлокально) однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y .*

Доведення. Доведемо цю еквівалентність у випадку напівлокальної однозв'язності, адже саме вона нам знадобиться у подальшому. Доведення для локальної однозв'язності аналогічне (виконайте його). Див. також доведення твердження 10.1.

⇒ Отже, нехай X напівлокально однозв'язний. Для довільної точки $y \in Y$ нехай $U \ni y$ – її правильно накритий відкритий окіл з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Оберемо якусь $x \in p^{-1}(y)$ і нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. З напівлокальної однозв'язності X випливає існування відкритої $V \ni x$ такої, що будь-яка петля в x , що лежить у V , гомотопна постійній в X . Тоді $U_\alpha \cap V$ – відкритий окіл x , а отже $W := p(U_\alpha \cap V) \subset U$ – відкритий окіл y , бо обмеження p на U_α – гомеоморфізм. Тепер розглянемо будь-яку петлю $g \in C(I, W)$ в y і підніmemo її у шлях $f \in C(I, X)$ з початком у x , використавши лему 8.1: $p \circ f = g$ і $f(0) = x$. Тоді з $f(I) \subset p^{-1}(U)$ та зі зв'язності $f(I)$ випливає, що $f(I) \subset U_\alpha$ (як у доведенні єдиності підняття в лемі 8.1). Оскільки таким чином $f(1) \in U_\alpha \cap p^{-1}(y) = \{x\}$ (бо гомеоморфізм $p|_{U_\alpha}$ є, зокрема, ін'єкцією), f є петлею у x . Крім того, оскільки $g(I) \subset W = p(U_\alpha \cap V)$, $f(I) \subset U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V \subset V$ знову ж за ін'єктивністю $p|_{U_\alpha}$. Тоді з властивості V випливає, що f гомотопна e_x у X . Якщо $F \in C(I \times I, X)$ – відповідна гомотопія, то за означенням $p \circ F \in C(I \times I, Y)$ є гомотопією g

і e_y . Отже, W задовольняє умові означення 12.1, тому Y є напівлокально однозв'язним.

$\Leftarrow$ Достатність доводимо аналогічним чином. Тепер Y напівлокально однозв'язний, а ми розглядаємо довільну точку $x \in X$. Покладемо $y := p(x)$ і розглянемо правильно накритий відкритий окіл $U \ni y$ з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Нехай також $V \ni y$ – відкритий окіл

з означення напівлокальної однозв'язності: будь-яка петля в y , що лежить у V , гомотопна постійній в Y . Якщо $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$, то $W := U_\alpha \cap p^{-1}(V)$ є відкритим околom x за неперервністю p . Для будь-якої петлі $f \in C(I, W)$ в x шлях $g := p \circ f \in C(I, p(W))$ є петлею в y , де $p(W) \subset U \cap V \subset V$. Тоді за властивістю V петля g гомотопна e_y в Y . Оскільки f накриває g , а $e_x = e_y$, і це петлі в x , звідси випливає, що f гомотопна e_x у X за лемою 8.3 про накриваючу гомотопію. Тому W є околom x , що потрібний для демонстрації напівлокальної однозв'язності X . ■

Вправа 12.3. Чи вірні еквівалентності з попереднього твердження для будь-якого відкритого неперервного відображення топологічних просторів $p: X \rightarrow Y$?

Наслідок 12.1. *Якщо у топологічного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p) , то Y напівлокально однозв'язний.*

Доведення. Оскільки простір X однозв'язний, а отже напівлокально однозв'язний за прикладом 12.1, Y напівлокально однозв'язний в силу попереднього твердження. ■

Зауваження. Попередній наслідок обґрунтовує вибір з двох умов означення 12.1 слабшої умови напівлокальної однозв'язності для подальшого дослідження, адже нас цікавлять перш за все саме універсальні накриття. З цього наслідку випливає, зокрема, що у просторі з прикладу 12.3 не існує універсального накриття, а отже його фундаментальну групу в принципі не вдасться обчислити за допомогою техніки накриттів. Ми наведемо спосіб її опису у розділі 13, див. зауваження після вправи 13.2 і посилання там.

12.2 Теорема про існування та єдиність накриттів

Таким чином, з існування у просторі Y універсального накриття випливає не лише лінійна зв'язність Y , а й напівлокальна однозв'язність за попереднім наслідком. Виявляється, що разом з локальною лінійною

зв'язністю ці умови є також достатніми. Це демонструється в основній теоремі цього розділу, яку ми вже нарешті можемо сформулювати та довести:

Теорема 12.1 (Існування та єдиність накрить). *Нехай топологічний простір Y лінійно зв'язний, локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний, а $y \in Y$ – деяка його точка. Тоді для будь-якої підгрупи $H \subset \pi_1(Y, y)$ існує накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язним X та відміченою точкою $x \in X$ таке, що $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = H$. Це накриття є єдиним з точністю до ізоморфізма накрить з відміченими точками: якщо (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття з лінійно зв'язними X і Z та відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно такі, що $p(x) = q(z) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = q_*(\pi_1(Z, z)) = H$, то існує єдиний гомеоморфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ такий, що $\varphi(x) = z$ і $q \circ \varphi = p$.*

Доведення. Спочатку покажемо єдиність накрить з точністю до ізоморфізма. Зауважимо, що простори X і Z лінійно зв'язні за умовою та локально лінійно зв'язні за твердженням 10.1, бо існують накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q) з локально лінійно зв'язним Y . Тоді з пункту 3. наслідку 10.3 і умови $p_*(\pi_1(X, x)) = q_*(\pi_1(Z, z))$ випливає існування морфізмів даних накрить з відміченими точками $\varphi: X \rightarrow Z$ та $\psi: Z \rightarrow X$. Пункт 2. того ж наслідку означає, що ці морфізми є взаємно оберненими ізоморфізмами, зокрема, φ – потрібний нам ізоморфізм (єдиний за пунктом 1. того ж наслідку). Як бачимо, для єдиності накрить достатньо лінійної зв'язності та локальної лінійної зв'язності Y разом з умовою на образ фундаментальної групи X у точці x .

Тепер почнемо доводити існування. Нам дані лінійно зв'язний, локально лінійно зв'язний і напівлокально однозв'язний простір Y , точка $y \in Y$ і підгрупа $H \subset \pi_1(Y, y)$. Якщо б накриття (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$ з умови теореми (тобто таке, що X лінійно зв'язний, $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = H$) існувало, то для будь-якої точки $v \in X$ і будь-яких двох шляхів $\tilde{f}, \tilde{g} \in C(I, X)$, що з'єднували б x і v (й існували б у силу лінійної зв'язності X), гомотопічний клас $[\tilde{f} * \tilde{g}]$ петлі $\tilde{f} * \tilde{g}$ належав би до $\pi_1(X, x)$, а отже

$$[f * \bar{g}] = [p \circ (\tilde{f} * \tilde{g})] = p_*([\tilde{f} * \tilde{g}]) \in p_*(\pi_1(X, x)) = H,$$

де $f := p \circ \tilde{f} \in C(I, Y)$, $g := p \circ \tilde{g} \in C(I, Y)$ – шляхи з початком в y та кінцем в $z := p(v)$. І навпаки, нехай $f, g \in C(I, Y)$ – будь-які шляхи зі спільними початком y та кінцем z такі, що $[f * \bar{g}] \in H = p_*(\pi_1(X, x))$, тобто $[f * \bar{g}] = [h]$ для деякої h такої, що $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$. Домножуючи

тепер гомотопні петлі h і $f * \bar{g}$ в y на шляху g з початком у точці y , маємо в силу лем 3.1–3.4 наступні гомотопності шляхів:

$$h * g \sim (f * \bar{g}) * g \sim f * (\bar{g} * g) \sim f * e_z \sim f.$$

Нехай тепер $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in C(I, X)$ – (єдині) підняття шляхів f, g і h відповідно у накриваючий простір X з початком у x , що існують за лемою 8.1. Оскільки $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$, $\tilde{h}$ є петлею у x за пунктом 2. твердження 9.1, тому визначений шлях $\tilde{h} * \tilde{g}$. Оскільки $p \circ (\tilde{h} * \tilde{g}) = h * g$, цей шлях – це (єдине) підняття шляху $h * g$ з початком у x . Тоді зі встановленої вище гомотопності $h * g \sim f$ і леми 8.3 про накриваючу гомотопію випливає, що $\tilde{h} * \tilde{g} \sim \tilde{f}$, зокрема, $\tilde{g}(1) = \tilde{h} * \tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$, тобто підняття $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ закінчуються у спільній точці X . Таким чином, побудована бієкція між X та класами еквівалентності шляхів з початком у точці y та спільними кінцями, що задовольняють умові вигляду $[f * \bar{g}] \in H$. Мотивуючись цим, для доведення існування у нашій теоремі побудуємо X як множину класів еквівалентності шляхів у Y з початком у точці y , що визначена такою умовою.

Отже, будемо говорити, що два шляхи $f, g \in C(I, Y)$ зі спільним початком у точці y та спільним кінцем еквівалентні, якщо гомотопічний клас $[f * \bar{g}] \in \pi_1(Y, y)$ петлі $f * \bar{g}$ у точці y належить до H . Зокрема, ця умова виконана для гомотопних f і g , бо для них $[f * \bar{g}] = [g * \bar{g}] = [e_y] \in H$ за лемами 3.1 і 3.4. Позначимо це відношення через $\sim$: $f \sim g$. Перевіримо, що воно є еквівалентністю. Дійсно, $f \sim f$ для будь-якого f , бо знову ж $[f * \bar{f}] = [e_y] \in H$. Якщо $f \sim g$, тобто $[f * \bar{g}] \in H$, то $[g * \bar{f}] = [\overline{f * \bar{g}}] = [f * \bar{g}]^{-1} \in H$ за означеннями добутку і оберненого шляху, виглядом обернених елементів у фундаментальній групі (теорема 4.1) і тим, що H – підгрупа. Отже, $g \sim f$. Нарешті, якщо $f \sim g$ і $g \sim h$, тобто $[f * \bar{g}], [g * \bar{h}] \in H$, то

$$[f * \bar{h}] = [f * e_z * \bar{h}] = [f * \bar{g} * g * \bar{h}] = [f * \bar{g}][g * \bar{h}] \in H,$$

де z – спільний кінець f, g і h , за лемами 3.1–3.4, означенням фундаментальної групи й тим, що H – підгрупа. Таким чином, $f \sim h$, і це завершує перевірку означення відношення еквівалентності. Далі у цьому доведенні позначатимемо квадратними дужками класи еквівалентності саме цього відношення, що, взагалі кажучи, ширші за гомотопічні. Позначимо множину таких класів (фактормножину множини шляхів з початком в y) через X і визначимо відображення p з X у Y наступним чином:

$$p: (X := \{[f] \mid f \in C(I, Y): f(0) = y\}) \rightarrow Y: [f] \mapsto f(1).$$

Отже, кожному класу еквівалентності шляхів ставиться у відповідність кінець будь-якого шляху з цього класу. Оскільки вони всі мають спільний кінець за означенням нашої еквівалентності, це відображення коректно визначене. Позначимо $x := [e_y] \in X$, для нього $p(x) = e_y(1) = y$. Для кожної $z \in Y$ в силу лінійної зв'язності Y існує шлях $f \in C(I, Y)$, що з'єднує y і z , отже $p([f]) = f(1) = z$. Таким чином, p – сюр'єкція.

Введемо тепер топологію на X . Для будь-якої відкритої підмножини $U \subset Y$ і класу $[f] \in X$ такого, що $p([f]) = f(1) \in U$ (тобто шляхи з $[f]$ закінчуються у деякій точці U) позначимо

$$U_{[f]} := \{[f * h] \mid h \in C(I, U): h(0) = f(1)\} \subset X,$$

тобто це множина класів еквівалентностей добутків шляхів з $[f]$ на шляхи, що лежать в U і починаються у спільному кінці шляхів з $[f]$ (зауважимо, що не кожний шлях з $[f * h]$ повинен мати такий вигляд). Також відмітимо, що неважливо, який саме шлях з $[f]$ обрати: якщо $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$, то петля $f * \bar{g}$ гомотопна якійсь петлі k в y , гомотопічний клас якої належить до H , тому шлях f гомотопний $k * g$ (як у міркуваннях на початку доведення існування), а отже $f * h$ гомотопний $k * (g * h)$ для будь-якого $h \in C(I, U)$ з початком у $f(1) = g(1)$, звідки аналогічним чином випливає, що $[f * h] = [g * h]$. При цьому $[f] \in U_{[f]}$ (достатньо взяти $h = e_{f(1)}$). Такі множини утворюють покриття X хоча б тому, що за побудовою $X = Y_x$ (де, нагадаємо, $x = [e_y]$). Зауважимо також, що для будь-якої відкритої $V \subset U$ і класу $[f] \in p^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ маємо включення

$$V_{[f]} = \{[f * h] \mid h \in C(I, V): h(0) = f(1)\} \subset U_{[f]},$$

бо $C(I, V) \subset C(I, U)$. Нехай $[g] \in U_{[f]}$, тобто $[g] = [f * h]$ для деяких $f \in [f]$ і $h \in C(I, U)$ таких, що $h(0) = f(1)$. Це, у свою чергу, означає, що гомотопічний клас петлі $(f * h) * \bar{g}$ належить до H . Знову ж, оскільки H – підгрупа, звідси й з вигляду обернених елементів у фундаментальній групі випливає, що обернений гомотопічний клас, що є гомотопічним класом петлі $(g * \bar{h}) * \bar{f}$, теж належить до H (зауважимо, що ця петля, взагалі кажучи, не є оберненою до попередньої – тут ми працюємо саме з гомотопічними класами, неявно використовуючи лему 3.2 про асоціативність). Отже, $[g * \bar{h}] = [f]$, де $\bar{h} \in C(I, U)$ і $\bar{h}(0) = h(1) = g(1)$. Таким чином, $[f] \in U_{[g]}$. Крім того,

$$\begin{aligned} U_{[g]} &= \{[g * k] \mid k \in C(I, U): k(0) = g(1)\} = \\ &= \{[f * (h * k)] \mid k \in C(I, U): k(0) = g(1)\} \subset U_{[f]}, \end{aligned}$$

де рівність $[g * k] = [(f * h) * k] = [f * (h * k)]$ випливає з того, що $g \sim f * h$, леми 3.2 і зауваженої вище еквівалентності гомотопних шляхів (як саме?), а включення – з того, що для кожного такого шляху k добуток $h * k \in C(I, U)$ і $h * k(0) = h(0) = f(1)$. Оскільки $[f] \in U_{[g]}$, так само маємо $U_{[f]} \subset U_{[g]}$. Таким чином, $U_{[f]} = U_{[g]}$. Це означає, що для фіксованої U будь-які дві множини $U_{[f]}$ і $U_{[g]}$ або не перетинаються, або збігаються. Дійсно, якщо вони мають якусь спільну точку $[l]$, то за доведеним маємо $U_{[f]} = U_{[l]} = U_{[g]}$. Якщо ж $[l]$ є спільною точкою $U_{[f]}$ і $V_{[g]}$ для деяких відкритих $U, V \subset Y$, $[f] \in p^{-1}(U)$ та $[g] \in p^{-1}(V)$, то за побудовою цих множин $p([l]) = l(1) \in U \cap V$ (чому?), тому за показаним вище

$$[l] \in (U \cap V)_{[l]} \subset U_{[l]} \cap V_{[l]} = U_{[f]} \cap V_{[g]}.$$

Це разом зі сказаним вище про покриття означає, що сукупність $\mathcal{B}$ підмножин $U_{[f]} \subset X$ для усіх відкритих $U \subset Y$ та $[f] \in p^{-1}(U)$ задовольняє критерію бази, отже на X існує єдина топологія з базою $\mathcal{B}$. Нагадаємо, що відкритими підмножинами у цій топології є усі можливі об'єднання елементів $\mathcal{B}$. Зокрема, для кожного класу $[f] \in p^{-1}(U)$ множина $U_{[f]}$ є відкритим околom $[f]$. Для будь-якої відкритої $U \subset Y$ таким чином $p^{-1}(U) \subset \bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]}$. І навпаки, для будь-якої $[g] \in \bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]}$ існує $[f] \in p^{-1}(U)$ такий, що $[g] \in U_{[f]}$, тобто, як бачили вище, $g \sim f * h$, де $h \in C(I, U)$. Тоді $p([g]) = g(1) = f * h(1) = h(1) \in U$. Це означає, що $\bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]} \subset p^{-1}(U)$, отже $p^{-1}(U) = \bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]}$. Оскільки ця множина відкрита за побудовою топології, звідси випливає, що відображення p неперервне.

Тепер покажемо, що (X, Y, p) є накриттям. Для довільної точки $z \in Y$ нехай $U \ni z$ – відкритий окіл з означення напівлокальної однозв'язності простору Y . Оскільки цей простір також локально лінійно зв'язний, існує відкрита лінійно зв'язна множина V така, що $z \in V \subset U$. Як було встановлено вище, $p^{-1}(V) = \bigcup_{[f] \in p^{-1}(V)} V_{[f]}$, де відкриті множини $V_{[f]}$ або не перетинаються, або збігаються. Об'єднаємо ті з них, що збігаються, представивши цей прообраз у вигляді $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} V_{[f_\alpha]}$ для деякої підмножини класів $\{[f_\alpha]\}_{\alpha \in A} \subset p^{-1}(V)$ так, що $V_{[f_\alpha]} \cap V_{[f_\beta]} = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$. Таким чином, це диз'юнктне об'єднання відкритих множин, і щоб показати, що V є правильно накритим околom, а $V_{[f_\alpha]}$ – правильно його накриваючими, залишилось показати, що обмеження p на кожну з цих множин є гомеоморфізмом на V .

Отже, розглянемо довільний індекс $\alpha \in A$ і обмеження $p: V_{[f_\alpha]} \rightarrow V$. Для кожної точки $w \in V$ в силу лінійної зв'язності цього околу існує

шлях $h \in C(I, V)$, що з'єднує z і w . Оскільки $f_\alpha(1) = p([f_\alpha]) = z$, визначений шлях $f_\alpha * h$, його клас еквівалентності $[f_\alpha * h]$ належить до $V_{[f_\alpha]}$ за означенням цієї множини, і $p([f_\alpha * h]) = f_\alpha * h(1) = h(1) = w$. Отже, обмеження p є сюр'єкцією. Нехай тепер образи двох елементів $V_{[f_\alpha]}$, що за означенням мають вигляд $[f_\alpha * h]$ і $[f_\alpha * k]$, де $h, k \in C(I, V)$ такі, що $h(0) = k(0) = f_\alpha(1) = z$, рівні:

$$h(1) = f_\alpha * h(1) = p([f_\alpha * h]) = p([f_\alpha * k]) = f_\alpha * k(1) = k(1).$$

Це означає, що визначена петля $h * \bar{k} \in C(I, V) \subset C(I, U)$ у точці z . За властивістю U , ця петля гомотопна e_z в Y , тоді за лемами 3.1–3.4 маємо

$$(f_\alpha * h) * \overline{(f_\alpha * k)} = (f_\alpha * h) * (\bar{k} * \bar{f}_\alpha) \sim f_\alpha * (h * \bar{k}) * \bar{f}_\alpha \sim f_\alpha * e_z * \bar{f}_\alpha \sim f_\alpha * \bar{f}_\alpha \sim e_y,$$

де $\sim$ знову позначає гомотопність петель. Оскільки гомотопічний клас постійної петлі e_y належить до H , це означає, що $[f_\alpha * h] = [f_\alpha * k]$, що демонструє ін'єктивність обмеження $p: V_{[f_\alpha]} \rightarrow V$. Його неперервність випливає з неперервності p , але можна перевірити її й безпосередньо. Дійсно, прообраз будь-якої відкритої підмножини $W \subset V$ має вигляд $p^{-1}(W) = \bigcup_{[g] \in p^{-1}(W)} W_{[g]}$, причому $W_{[g]} \subset V_{[g]}$ для кожного $[g] \in p^{-1}(W) \subset p^{-1}(V)$, як було показано вище. Тому в силу диз'юнктності об'єднання $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} V_{[f_\alpha]}$ перетин $p^{-1}(W) \cap V_{[f_\alpha]} = W_{[g]} \subset V_{[g]} = V_{[f_\alpha]}$ для деякого $[g] \in p^{-1}(W) \cap V_{[f_\alpha]}$ (де остання рівність випливає з $[g] \in V_{[f_\alpha]}$ за доведеним вище). Оскільки $W_{[g]}$ є відкритою підмножиною у топології X , а отже й у індукованій топології $V_{[f_\alpha]}$, це доводить неперервність обмеження p . Нарешті, розглянемо довільну відкриту підмножину $V_{[f_\alpha]}$ (в індукованій топології відкритої $V_{[f_\alpha]}$, а отже й у X), що є за побудовою топології об'єднанням елементів бази $\mathcal{B}$, тобто множин вигляду $W_{[g]} \subset V_{[f_\alpha]}$ для деяких відкритих $W \subset Y$ та класів $[g] \in p^{-1}(W)$. Щоб показати відкритість образу такого об'єднання під дією p (а отже й відкритість $p: V_{[f_\alpha]} \rightarrow V$), достатньо показати, що образ будь-якої такої підмножини $p(W_{[g]}) \subset V$ відкритий. За нашими означеннями,

$$\begin{aligned} p(W_{[g]}) &= \{p([g * h]) = g * h(1) \mid h \in C(I, W): h(0) = g(1)\} = \\ &= \{h(1) \mid h \in C(I, W): h(0) = g(1)\} \subset W. \end{aligned}$$

Для будь-якої точки $w \in p(W_{[g]})$ в силу локальної лінійної зв'язності Y існує відкрита лінійно зв'язна $\widehat{W}$ така, що $w \in \widehat{W} \subset W$. Згідно з описом вище, w є кінцем деякого шляху $h \in C(I, W)$ з початком у $g(1)$. У свою чергу, w можна з'єднати з будь-якою точкою $\widehat{W}$ шляхом, що лежить

у $\widehat{W} \subset W$ за лінійною зв'язністю цієї множини. Множачи ці шляхи, ми отримуємо шлях, що з'єднує $g(1)$ та довільну точку $\widehat{W}$ і лежить у W . Це означає, що $\widehat{W} \subset p(W_{[g]})$. Оскільки кожна точка входить у $p(W_{[g]})$ з деяким відкритим околom, ця множина відкрита. Це завершує доведення відкритості $p: V_{[f_\alpha]} \rightarrow V$. Зауважимо, що ми ніде не використали включення $W_{[g]} \subset V_{[f_\alpha]}$ і довели насправді відкритість відображення $p: X \rightarrow Y$, з якої, звичайно, випливає відкритість обмеження. Таким чином, доведена гомеоморфність $p: V_{[f_\alpha]} \rightarrow V$, а отже й те, що (X, Y, p) – накриття.

Щоб показати лінійну зв'язність простору X , нам потрібно навчитися будувати шляхи в ньому, зокрема підняття шляхів простору Y . Нехай $f \in C(I, Y)$ – шлях з початком в y . Для кожного $s \in I$ покладемо $f_s: I \rightarrow Y: t \mapsto f(st)$, тобто f_s – проміжний шлях (вільної) гомотопії $(t, s) \mapsto f(st)$ між e_y і f . Зокрема, $f_s \in C(I, Y)$ – шлях, що з'єднує $f(0) = y$ і $f(s)$. Тоді визначимо $\tilde{f}: I \rightarrow X: s \mapsto [f_s]$. Це відображення неперервне, тобто є шляхом у просторі X . Дійсно, щоб це показати, достатньо перевірити його неперервність у довільній точці $s_0 \in I$, розглядаючи в якості відкритих околів $\tilde{f}(s_0)$ елементи бази $\mathcal{B}$. Якщо $U_{[g]}$ – такий окіл, тобто $[f_{s_0}] = \tilde{f}(s_0) \in U_{[g]}$, то за показаним вище $U_{[g]} = U_{[f_{s_0}]}$. При цьому, зокрема, $f(s_0) = f_{s_0}(1) \in U$. Тоді, оскільки f неперервне, а U відкрита, існує $\delta > 0$ таке, що $f(s) \in U$ для усіх $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Оскільки для будь-якого такого s образ відрізка $[s_0, s]$ (або $[s, s_0]$) під дією f лежить в U , визначений шлях $h: I \rightarrow U: t \mapsto f((1-t)s_0 + ts)$ в U , що з'єднує точки $f(s_0)$ і $f(s)$. При цьому шлях f_s гомотопний добутку $f_{s_0} * h$ (покажіть це), тому $\tilde{f}(s) = [f_s] = [f_{s_0} * h] \in U_{[f_{s_0}]}$. Отже, $\tilde{f}((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \subset U_{[f_{s_0}]} = U_{[g]}$, що й дає потрібну неперервність. Побудований таким чином шлях $\tilde{f}$ має початок у $\tilde{f}(0) = [f_0] = [e_y] = x$ та кінець у $\tilde{f}(1) = [f_1] = [f]$. Крім того, $p(\tilde{f}(s)) = p([f_s]) = f_s(1) = f(s)$ для кожного $s \in I$, тобто $p \circ \tilde{f} = f$. Це означає, що $\tilde{f}$ – підняття шляху f у накриваючий простір X з початком у x (єдине за лемою 8.1). З цієї конструкції відразу випливає лінійна зв'язність X : для будь-якого $[f] \in X$ (і будь-якого $f \in [f]$) шлях $\tilde{f}$ з'єднує x і $[f]$, а отже й будь-які два класи з X можна поєднати шляхом. Зауважимо також, що цей опис підняття узгоджується з міркуваннями на початку доведення існування: підняття шляху f з початком у x закінчується у точці X , що відповідає класу еквівалентності $[f]$.

Залишилося перевірити умову на образ фундаментальної групи X у точці x . Будь-яка петля f у x є підняттям петлі $f := p \circ \tilde{f}$ простору Y у $p(x) = y$ з початком у x , а отже повинна мати описаний вище вигляд, зокрема, закінчуватися у $[f]$. З іншого боку, оскільки це петля,

вона закінчується в $x = [e_y]$. Отже, $[f] = [e_y]$, що означає належність гомотопічного класу петлі $f * \overline{e_y}$, тобто гомотопічного класу f , підгрупі H . Але цей клас є образом гомотопічного класу $\tilde{f}$ під дією p_* , бо $p \circ \tilde{f} = f$. Таким чином, $p_*(\pi_1(X, x)) \subset H$. І навпаки, якщо гомотопічний клас петлі f у точці y належить до H , то, як пояснено вище, $[f] = [e_y] = x$. Тоді підняття $\tilde{f}$ петлі f у простір X з початком у x має описаний вище вигляд і тому закінчується у $[f] = x$, тобто є петлею у x . Згідно з пунктом 2. твердження 9.1, це означає, що гомотопічний клас f належить до $p_*(\pi_1(X, x))$. Тобто ми показали, що $H \subset p_*(\pi_1(X, x))$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = H$. Це закінчує доведення теореми. ■

Зауваження. В умовах теореми накриваючий простір X є локально лінійно зв'язним за твердженням 10.1 і напівлокально однозв'язним за твердженням 12.3. Тому, якщо підгрупа $H = p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y)$ нормальна, то накриття (X, Y, p) регулярне за теоремою 11.1, а отже факторгрупа $\pi_1(Y, y)/H$ ізоморфна групі автоморфізмів (X, Y, p) за наслідком 11.3. Відмітимо також, що H ізоморфна $\pi_1(X, x)$ за пунктом 1. твердження 9.1 і зауваженням після його формулювання. При цьому тривіальній підгрупі H відповідають універсальні накриття (див. також наслідок 12.2 нижче). Зауважимо, що для цього випадку простір X у доведенні попередньої теореми будується з гомотопічних класів шляхів Y з початком у точці y (чому?). Підгрупу $p_*(\pi_1(X, x))$ інколи називають *групою накриття з відміченою точкою*, бо, як демонструє попередня теорема, такі підгрупи знаходяться у бієктивній відповідності з класами ізоморфності накрить з відміченою точкою. Якщо ж розглядати накриття без відміченої точки та "звичайну" ізоморфність із означення 10.1, то замість підгруп треба розглядати класи спряженості підгруп, як демонструє наступна вправа (див. також [13, с. 167, 174, с. 191-192, 200 перекладу] і [11, с. 67-68, с. 91-92 перекладу]). Втім, для нормальних підгруп (зокрема тривіальної), а отже для регулярних накрить, цей клас представлений однією підгрупою.

Вправа 12.4. Два накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q) , де простори X , Y і Z лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, ізоморфні тоді й тільки тоді, коли існують такі точки $x \in X$ та $z \in Z$, що $p(x) = q(z) = y \in Y$ та підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ і $q_*(\pi_1(Z, z))$ спряжені у $\pi_1(Y, y)$ (пор. з лемою 11.1).

Вправа 12.5. Використавши теорему 12.1 (а також попередні зауваження і вправу), описати з точністю до ізоморфізма всі накриття кола S^1 з лінійно зв'язними накриваючими просторами. Для цього буде потрі-

бно описати усі підгрупи її фундаментальної групи, що, втім, не дуже складно; див. обговорення у прикладі 11.5.

Наслідок 12.2. *У лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного топологічного простору існує універсальне накриття тоді й тільки тоді, коли він напівлокально однозв'язний. Якщо таке накриття існує, то воно єдине з точністю до ізоморфізма і регулярне, а фундаментальна група простору в кожній точці ізоморфна групі автоморфізмів цього накриття.*

Доведення. Нехай Y – даний топологічний простір. Необхідність випливає з наслідку 12.1, а достатність – з теореми 12.1, якщо її застосувати до тривіальної підгрупи $H = \{[e_y]\}$ (взявши будь-яку $y \in Y$). Оскільки для накриття (X, Y, p) , що існує за цією теоремою, X лінійно зв'язний, а група $\pi_1(X, x) \simeq p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\}$ тривіальна для деякої точки $x \in p^{-1}(y)$, X однозв'язний, а отже накриття універсальне. Для будь-яких двох таких накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , обравши довільним чином $x \in p^{-1}(y)$ і $z \in q^{-1}(y)$, маємо $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\} = q_*(\pi_1(Z, z))$, отже за теоремою 12.1 існує ізоморфізм цих накрить, що однозначно визначений точками x і z (або просто використаємо наслідок 10.2). Нарешті, регулярність цього накриття випливає з теореми 11.1, а твердження про фундаментальну групу – з наслідку 11.3.

■

Зауваження. Теорема 12.1 разом з пунктом 1. твердження 9.1 дозволяє, зокрема, використовувати техніку накрить для дослідження підгруп. Наприклад, накриття букета двох кіл $S^1 \vee S^1$, що зображені на [11, с. 58, с. 80 перекладу] та аналогічні до них демонструють, що вільна група з двома твірними $\langle a, b \rangle$, що є (з точністю до ізоморфізма) фундаментальною групою цього простору згідно з прикладом 9.5, містить підгрупи, що ізоморфні вільним групам з довільною скінченною кількістю твірних та навіть вільній групі зліченного рангу, тобто зі зліченною множиною твірних (див. узагальнене означення вільної групи наприкінці прикладу А.6), бо саме такі групи є фундаментальними для перелічених там накриваючих просторів.

Той факт, що усі ці простори мають саме вільні фундаментальні групи, теж не є випадковим. Справа у тому, що букети кіл є *графами*, тобто *одновимірними клітинними просторами*, що утворюються склеюванням деякої множини відрізків (*ребер графа*) кінцями, класи еквівалентності яких перетворюються на *вершини графа* (див. точні означення у розділі 19), а будь-який накриваючий простір графа теж є графом, як показано у [11, с. 85, с. 112-113 перекладу]. У свою чергу, фундаментальні групи

графа є вільними, що доводиться у [11, с. 83-85, с. 110-112 перекладу]. Це випливає з того, що будь-який (лінійно) зв'язний граф містить стяжну підмножину (*максимальне дерево*), що включає усі його вершини, а факторизація за такою підмножиною (тобто "стягування" усіх вершин в одну) дає гомотопічно еквівалентний простір, що гомеоморфний букету кіл. Фундаментальна ж група такого простору є вільною за вправою 9.2 та її узагальненням на нескінченні букети кіл (див. також вправу 13.3 далі). Таким чином, кожна підгрупа $H \subset \langle a, b \rangle$ згідно з теоремою 12.1 ізоморфна фундаментальній групі лінійно зв'язного накриваючого простору деякого накриття $S^1 \vee S^1$, що є графом, отже H ізоморфна вільній групі. Ці міркування залишаються вірними для вільних груп з довільною (зокрема нескінченною) множиною твірних та дають відносно нескладне топологічне доведення наступної класичної теореми з теорії груп (див. також детальні викладення у [15, с. 189-210, с. 206-227 перекладу] та [17, с. 501-515]):

Теорема 12.2 (Нільсен – Шрайєр). *Будь-яка підгрупа вільної групи ізоморфна вільній групі.*

12.3 Накриття і фундаментальні групи многовидів

Будь-який многовид M (насправді будь-який локально евклідовий простір) є локально лінійно зв'язним за пунктом 5. твердження 29.2 курсу топології та напівлокально однозв'язним, як показано у прикладі 12.2 (нагадаємо, що обидві ці властивості доводяться практично однаково: за допомогою бази M , що складається з прообразів відкритих евклідових куль $\mathbb{R}^n$ під дією відображень карт). Тому лінійно зв'язні многовиди задовольняють умові теореми 12.1 і мають єдині з точністю до ізоморфізма накриття з відміченими точками для кожної $y \in M$ і $H \subset \pi_1(M, y)$, зокрема універсальні, як у наслідку 12.2. Такі накриття ми бачили, зокрема, у прикладах 7.4, 7.5 і 7.7 (див. також обговорення у прикладі 11.3). Помітимо, що у цих прикладах, як і у накриттях, які ви повинні отримати, розв'язавши вправу 12.5, накриваючі простори теж є многовидами. Виявляється, що це завжди так: лінійно зв'язний накриваючий простір будь-якого многовида – це многовид тієї ж вимірності (аналогічно, наприклад, до графів з обговорення вище). Продемонструємо це, почавши з наступного аналога тверджень 10.1 і 12.3:

Твердження 12.4. *Накриваючий простір X накриття (X, Y, p) є локально евклідовим тоді й тільки тоді, коли такою є база Y . Таким чином, якщо $(\tilde{M}, M, p)$ – накриття, база M (відповідно, накриваючий*

простір $\widetilde{M}$) є многовидом, а простір $\widetilde{M}$ (відповідно, M) хаусдорфовий та задовольняє другій аксіомі зліченності, то він теж є многовидом. При цьому $\dim \widetilde{M} = \dim M$ і для кожної точки $x \in \widetilde{M}$ існують карти (U, φ) і (V, ψ) многовидів $\widetilde{M}$ і M відповідно такі, що $x \in U$, $p(U) = V$ і $\psi \circ p \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, тобто відображення накриття p локально в околі кожної точки задається рівністю координат.

Доведення. У першому з цих тверджень перевіримо достатність, яка нам знадобиться далі. Необхідність перевіряється аналогічним чином (зробіть це). Ідея полягає в тому, що, оскільки відображення p є локальним гомеоморфізмом (див. приклад 11.2), воно зберігає локальні властивості, зокрема локальну евклідовість (це відноситься також до доведень тверджень 10.1 і 12.3).

Дійсно, нехай Y локально евклідовий, а $x \in X$ – довільна точка. У точки $y := p(x)$ існує правильно накритий відкритий окіл $U \ni y$: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де U_α правильно накривають U . Нехай $W \ni y$ – відкритий окіл з означення локальної евклідовості, тобто існує гомеоморфізм (відносно індукованої топології W) $\chi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ для деякого (фіксованого для Y) $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $U \cap W$ є відкритим оком y в Y і в індукованій топології W , тому $\chi(U \cap W)$ – відкритий окіл $\chi(y)$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки топологія $\mathbb{R}^n$ метрична, існує таке $\varepsilon > 0$, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(\chi(y))$ міститься у $\chi(U \cap W)$. Покладемо $V := \chi^{-1}(B_\varepsilon(\chi(y))) \ni y$. За побудовою $V \subset U \cap W$, і, оскільки χ – гомеоморфізм, це відкритий окіл y у індукованій топології відкритої W , а отже й у Y та в індукованій топології U . Нехай $\omega: B_\varepsilon(\chi(y)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – який-небудь гомеоморфізм (наведіть приклад; див. вправу 14.2 курсу топології). Тоді й $\psi := \omega \circ \chi|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм як композиція гомеоморфізмів. Тут ми фактично показали, що U є локально евклідовим простором, як і кожна відкрита підмножина локально евклідового простору.

Тепер нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Тоді в силу гомеоморфності $p|_{U_\alpha}$ прообраз $(p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ є відкритим оком x у індукованій топології відкритої U_α , а отже й у X , а $\varphi := \psi \circ p|_{(p|_{U_\alpha})^{-1}(V)}: (p|_{U_\alpha})^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ є гомеоморфізмом як композиція гомеоморфізмів. Це доводить локальну евклідовість X , а також демонструє справедливість решти тверджень з умови для цього випадку: якщо $Y = M$ – многовид, тобто локально евклідовий, хаусдорфовий і задовольняє другій аксіомі зліченності, а $X = \widetilde{M}$ задовольняє двом останнім з цих трьох властивостей, то й $\widetilde{M}$ – многовид, n – спільна вимірність M і $\widetilde{M}$, а $((p|_{U_\alpha})^{-1}(V), \varphi)$ та (V, ψ) – карти цих многовидів, що задовольняють умові.

■

Зауваження. Спостереження щодо локального задання p рівністю координат у цьому твердженні корисне, зокрема, якщо побудувати з таких карт, як у доведенні, атласи M і $\widetilde{M}$, що задають на них структури *гладких многовидів* (див., наприклад, [12, с. 11-15, с. 20-25 перекладу]). Тоді p буде *локальним дифеоморфізмом* у околі кожної точки $\widetilde{M}$.

Твердження 12.5. *Якщо база Y накриття (X, Y, p) хаусдорфова, то таким є й накриваючий простір X .*

Доведення. Нехай $x, z \in X$ та $x \neq z$. Якщо при цьому $p(x) \neq p(z)$, то в силу хаусдорфовості Y існують $V \ni p(x)$ та $W \ni p(z)$ – відкриті й такі, що $V \cap W = \emptyset$. Тоді, оскільки p неперервне, $p^{-1}(V) \ni x$ та $p^{-1}(W) \ni z$ відкриті й $p^{-1}(V) \cap p^{-1}(W) = \emptyset$. Якщо ж $p(x) = p(z)$, то нехай $U \ni p(x)$ – правильно накритий відкритий окіл: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де відкриті U_α правильно накривають U , а індекси $\alpha, \beta \in A$ такі, що $x \in U_\alpha$, $z \in U_\beta$. Тоді $\alpha \neq \beta$, бо обмеження p на кожну з множин U_α є, зокрема, ін'єктивним, а отже $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Разом це й демонструє хаусдорфовість X . ■

Вправа 12.6. Чи вірне твердження, що обернене до попереднього, тобто чи випливає з хаусдорфовості накриваючого простору хаусдорфовість бази накриття?

Твердження 12.6. *Нехай база Y накриття (X, Y, p) локально лінійно зв'язна і задовольняє другій аксіомі зліченності. Тоді його накриваючий простір X задовольняє цій аксіомі тоді й тільки тоді, коли усі шари цього накриття не більш ніж зліченні.*

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність тут насправді не має відношення до локальної лінійної зв'язності або другої аксіомі зліченності для Y та випливає з наступного загального факту: якщо (X, Y, p) має принаймні один незліченний шар $p^{-1}(y)$ над деякою $y \in Y$, то X не задовольняє другій аксіомі зліченності. Дійсно, нехай $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ як у означенні накриття. При цьому індексна множина A рівнопотужна шару $p^{-1}(y)$, а отже незліченна (покажіть це; див. також вправу 7.2). Якщо X задовольняє другій аксіомі зліченності, то їй задовольняє й $p^{-1}(U)$ з індукованою топологією. Але в силу диз'юнктності $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – незліченне відкрите покриття $p^{-1}(U)$, у якого не існує нетривіального, зокрема не більш ніж зліченного, підпокриття. Це суперечить теоремі Ліндельофа, звідки й маємо потрібне.

⊆ Нехай тепер Y задовольняє другій аксіомі зліченності та відомо, що усі шари накриття не більш ніж зліченні. Нехай $\mathcal{C}$ – не більш ніж зліченна база Y , а $\widehat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ – підсистема усіх правильно накритих елементів цієї бази, що теж є не більш ніж зліченною базою Y . Дійсно, для будь-якої точки $y \in Y$ та відкритої $U \ni y$ існує відкритий правильно накритий окіл $\widehat{U} \ni y$. Оскільки $U \cap \widehat{U}$ теж тоді є відкритим околom y , існує $V \in \mathcal{C}$ така, що $y \in V \subset U \cap \widehat{U}$. Тоді $V \subset \widehat{U}$ правильно накрита, тобто $V \in \widehat{\mathcal{C}}$, як було зауважено після означення 7.1, і $y \in V \subset U$, тому $\widehat{\mathcal{C}}$ – база. Кожна множина $V \in \widehat{\mathcal{C}}$ задовольняє другій аксіомі зліченності як підпростір Y , а її компоненти лінійної зв'язності відкриті в силу локальної лінійної зв'язності Y (зокрема, теж правильно накриті): оскільки у кожній точці кожної такої компоненти існує лінійно зв'язний відкритий окіл у Y , він повинен повністю міститися у цій компоненті. Тому компоненти лінійної зв'язності утворюють відкрите покриття V , яке є диз'юнктним і тому не має нетривіальних підпокрить. Тоді воно не більш ніж зліченне за теоремою Ліндельофа. Сукупність $\mathcal{D}$ усіх компонентів лінійної зв'язності усіх елементів $\widehat{\mathcal{C}}$ задовольняє означенню бази (чому?) і таким чином також є не більш ніж зліченною базою X , що складається з лінійно зв'язних правильно накритих множин. Прообраз кожної $V \in \mathcal{D}$ має вигляд $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A_V} V_\alpha$, де V_α правильно накривають V і є лінійно зв'язними (бо гомеоморфні V), а індексна множина A_V не більш ніж зліченна за умовою (див. доведення необхідності). Фіксуємо таке розбиття для кожної V (до речі, чи є воно однозначно визначеним і чи є суттєвою для цього лінійна зв'язність V ?). Тоді не більш ніж зліченна за побудовою система відкритих множин

$$\mathcal{B} := \left\{ V_\alpha \mid V \in \mathcal{D}, \alpha \in A_V \right\}$$

є базою X . Дійсно, для кожної відкритої $W \subset X$ та будь-якої точки $x \in W$ існує відкрита правильно накриваюча $\widehat{W} \ni x$. Оскільки $p|_{\widehat{W}}: \widehat{W} \rightarrow p(\widehat{W})$ – гомеоморфізм (де $p(\widehat{W})$ – відкритий правильно накритий окіл точки $p(x)$), а $W \cap \widehat{W}$ – відкритий окіл x , зокрема, у індукованій топології множини $\widehat{W}$, образ $p(W \cap \widehat{W})$ є відкритим околom $p(x)$ у індукованій топології відкритої $p(\widehat{W})$, а отже в Y . Тоді за показаним вище існує $V \in \mathcal{D}$ така, що $p(x) \in V \subset p(W \cap \widehat{W}) \subset p(\widehat{W})$. Нехай $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A_V} V_\alpha$ – зафіксоване вище розбиття V на правильно накриваючі околиці й $\alpha \in A_V$ такий, що $x \in V_\alpha$. Тоді $V_\alpha \subset \widehat{W}$ в силу лінійної зв'язності (аналогічно до доведення пункту 3. твердження 10.2). Таким чином,

$$V_\alpha = (p|_{\widehat{W}})^{-1}(V) = p^{-1}(V) \cap \widehat{W} \subset p^{-1}(p(W \cap \widehat{W})) \cap \widehat{W} = W \cap \widehat{W} \subset W,$$

бо обмеження $p|_{\widehat{W}}$ є, зокрема, ін'єктивним. Отже, $x \in V_\alpha \subset W$ і $V_\alpha \in \mathcal{B}$, що й демонструє, що $\mathcal{B}$ – база, і завершує доведення достатності. ■

Вправа 12.7. Чи впливає з виконання другої аксіоми зліченності для накриваючого простору її виконання для бази накриття (можливо, теж за якихось додаткових умов)?

Твердження 12.7. *Фундаментальні групи будь-якого локально лінійно зв'язного та напівлокально однозв'язного топологічного простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності, не більш ніж зліченні.*

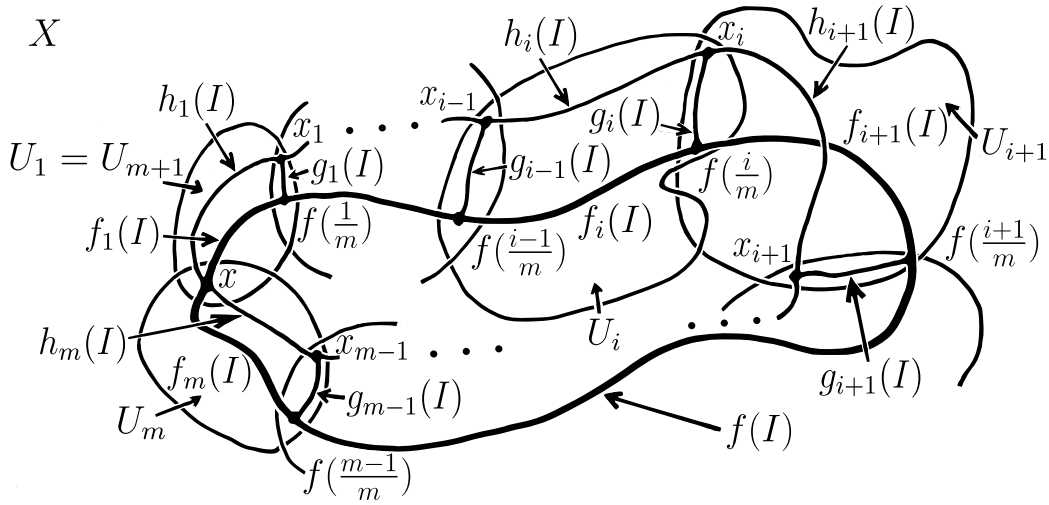
Доведення. Нехай простір X задовольняє умові. В силу його напівлокальної однозв'язності, у кожній точки $x \in X$ існує такий відкритий окіл $V \ni x$, що будь-яка петля в x підпростору V гомотопна постійній у X . Тоді в силу локальної лінійної зв'язності X існує лінійно зв'язний відкритий окіл $U \ni x$, що міститься у V . Зокрема, будь-яка петля в x підпростору $U \subset V$ гомотопна постійній у X . Оскільки U лінійно зв'язний, це ж вірно і для петель у будь-якій його точці. Щоб це показати, можна повторити конструкцію з твердження 4.1 (зробіть це). Більш того, якщо повторити доведення твердження 6.1 для шляхів у підпросторі U , допускаючи гомотопії зі значеннями у X , можна показати, що будь-які два шляхи в U зі спільними початком та кінцем гомотопні як шляхи в X (перевірте це). За побудовою, множини U з такими властивостями утворюють відкрите покриття X . У нього за другою аксіомою зліченності та теоремою Ліндельофа існує не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$. Аналогічно до попереднього доведення, з другої аксіоми зліченності та локальної лінійної зв'язності X випливає, що компоненти лінійної зв'язності перетину довільних U і V з $\mathcal{U}$ відкриті та що їх не більш ніж зліченна кількість. У кожній з цих компонент для кожної пари $U, V \in \mathcal{U}$ з $U \cap V \neq \emptyset$ (вони можуть бути й однаковими) оберемо і фіксуємо якусь точку. З міркувань вище випливає, що множина усіх таких точок $\mathcal{X}$ не більш ніж зліченна. Крім того, для будь-яких $x, y \in \mathcal{X}$, що містяться у одній і тій же $U \in \mathcal{U}$, оберемо і фіксуємо якийсь шлях $h \in C(I, U)$, що їх з'єднує. Він існує в силу лінійної зв'язності U . Множина усіх таких шляхів $\mathcal{H}$ теж не більш ніж зліченна, оскільки такою є множина $\mathcal{X}$.

Оскільки у кожній компоненті лінійної зв'язності X є принаймні одна точка з $\mathcal{X}$ (чому?), в силу твердження 4.1 достатньо перевірити, що група $\pi_1(X, x)$ не більш ніж зліченна, для випадку $x \in \mathcal{X}$. Нехай $f \in C(I, X)$ – якась петля у x , тобто $f(0) = f(1) = x$. Застосуємо до відкритого за неперервністю f покриття $f^{-1}(\mathcal{U})$ компактного метричного простору I лему Лебега, знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$ і оберемо натуральне m

таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}])$ міститься у деякому елементі $U_i \in \mathcal{U}$ для будь-якого $i = \overline{1, m}$ (вони можуть і повторюватися, тобто $U_i = U_{i+1}$), а отже $f(\frac{i}{m}) \in U_i \cap U_{i+1}$ для $i = \overline{1, m-1}$. При цьому $x = f(0) = f(1) \in U_m \cap U_1$ за побудовою, тому далі U_{m+1} позначатиме U_1 . Для кожного $i = \overline{1, m}$ існує точка $x_i \in \mathcal{X}$, що міститься у тій же компоненті лінійної зв'язності $U_i \cap U_{i+1}$, що й $f(\frac{i}{m})$ (зокрема, $x_m = x$ і позначимо також $x_0 = x$). Тоді в силу лінійної зв'язності існує шлях g_i у цій компоненті, що з'єднує $f(\frac{i}{m})$ та x_i (зокрема, $g_m = e_x$ і позначимо також $g_0 = e_x$). Крім того, оскільки $x_{i-1}, x_i \in U_i$, існує шлях $h_i \in \mathcal{H}$ в U_i , що їх з'єднує. Таким чином, добуток $(g_{i-1} * h_i) * \overline{g_i} \in C(I, U_i)$ з'єднує $f(\frac{i-1}{m})$ з $f(\frac{i}{m})$. Якщо позначити через

$$f_i: I \rightarrow U_i: t \mapsto f\left((1-t)\frac{i-1}{m} + t\frac{i}{m}\right)$$

шлях в U_i , що є перепараметризацією обмеження $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$, то він теж з'єднує $f(\frac{i-1}{m})$ з $f(\frac{i}{m})$, а отже гомотопний шляху $(g_{i-1} * h_i) * \overline{g_i}$ (в X) за властивістю U_i . Уявлення про ці шляхи дає наступна ілюстрація:



Отже, за лемами 3.1–3.4 маємо гомотопії

$$\begin{aligned} f &\sim f_1 * f_2 * \dots * f_m \sim g_0 * h_1 * \overline{g_1} * g_1 * h_2 * \overline{g_2} * g_2 * \dots * \overline{g_{m-1}} * g_{m-1} * h_m * \overline{g_m} \sim \\ &\sim e_x * h_1 * e_{x_1} * h_2 * e_{x_2} * \dots * e_{x_{m-1}} * h_m * e_x \sim h_1 * h_2 * \dots * h_m, \end{aligned}$$

тобто $[f] = [h_1 * \dots * h_m]$ у $\pi_1(X, x)$. Але добуток шляхів $h_i \in \mathcal{H}$, і тим більше їх гомотопічних класів, не більш ніж зліченна кількість, бо $\mathcal{H}$ не більш ніж зліченна. Це й демонструє потрібне.

■

Зауваження. Суттєвість умови напівлокальної однозв'язності для цього твердження демонструє гавайська сережка з прикладу 12.3: виявляється, що фундаментальні групи цього локально лінійно зв'язного простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності як підпростір $\mathbb{R}^2$, незліченні (див. обговорення після вправи 13.2).

Вправа 12.8. Чи є умови локальної лінійної зв'язності суттєвими для достатності у твердженні 12.6 і для твердження 12.7?

Наслідок 12.3. *Фундаментальні групи будь-якого многовида не більш ніж зліченні.*

Доведення. Дійсно, з обговорення перед твердженням 12.4 та означення многовида випливає, що він має усі необхідні для твердження 12.7 властивості.

■

Приклад 12.5. Хоча букети кіл $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ і не є многовидами, вони також задовольняють умовам твердження 12.7. Дійсно, вони локально лінійно зв'язні, напівлокально однозв'язні (хоча б за наслідком 12.1, оскільки мають універсальні накриття за природним узагальненням побудови з прикладу 9.5; втім, це нескладно перевірити й безпосередньо) та задовольняють другій аксіомі зліченності, оскільки вкладаються у $\mathbb{R}^2$. І справді, їх фундаментальними групами згідно з вправою 9.2 є вільні групи з n твірними, що є зліченими (чому?).

Наслідок 12.4. *Нехай (X, Y, p) – накриття, де простори X та Y лінійно зв'язні, локально лінійно зв'язні та напівлокально однозв'язні. Якщо до того ж база Y цього накриття (X, Y, p) задовольняє другій аксіомі зліченності, то і його накриваючий простір X задовольняє цій аксіомі.*

Доведення. Згідно з пунктом 1. теорему 9.1, шари (X, Y, p) (що усі рівнопотужні в силу лінійної зв'язності Y та вправи 7.3) знаходяться у бієктивній відповідності з множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, p(x))$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ для довільної $x \in X$. Потужність цієї фактормножини не більша (чому?) за потужність $\pi_1(Y, p(x))$, що не більш ніж зліченна за твердженням 12.7. Тому X задовольняє другій аксіомі зліченності в силу твердження 12.6, справедливості цієї аксіоми для Y та локальної лінійної зв'язності Y .

■

Зауваження. Тут суттєвими є локальна лінійна зв'язність та напівлокальна однозв'язність Y (і друга аксіома зліченності), а також лінійна

зв'язність X , але ми, як завжди, записали ці властивості для обох просторів з міркувань симетрії та в силу тверджень 10.1 і 12.3. Зокрема, умова лінійної зв'язності X тут потрібна для використання теореми 9.1. Приклад 7.2 для незліченного дискретного шару F демонструє, що вона дійсно є суттєвою: добуток $X = Y \times F$ не задовольняє другій аксіомі зліченності для будь-якого Y і не є зв'язним, зокрема лінійно (чому?).

Зауваження. Згадаємо також, що для многовида (і для будь-якої його відкритої підмножини) лінійна зв'язність еквівалентна зв'язності в силу його локальної лінійної зв'язності та теореми 27.1 курсу топології.

Наслідок 12.5. *Нехай M – (лінійно) зв'язний многовид. Тоді для будь-яких точки $y \in M$ та підгрупи $H \subset \pi_1(M, y)$ існує єдине з точністю до ізоморфізму накриття $(\widetilde{M}, M, p)$ таке, що $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, x)) = H$ для деякої точки $x \in \widetilde{M}$ (зокрема, універсальне для $H = \{[e_y]\}$), а $\widetilde{M}$ є (лінійно) зв'язним многовидом тієї ж вимірності.*

Доведення. Дійсно, як було зазначено у обговоренні перед твердженням 12.4, M локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний, тобто задовольняє умовам теореми 12.1. З неї випливає існування та єдиність накриття $(\widetilde{M}, M, p)$, для якого $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, x)) = H$ (де y якості x можна обрати довільну точку з $p^{-1}(y)$), а простір $\widetilde{M}$ лінійно зв'язний (і локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний за твердженнями 10.1 і 12.3). Тоді він також локально евклідовий за твердженням 12.4, хаусдорфовий за твердженням 12.5 і задовольняє другій аксіомі зліченності за наслідком 12.4, а отже є многовидом. З урахуванням рівності вимірностей з твердження 12.4 отримаємо потрібне.

■

Зауваження. Зокрема, усі накриваючі многовиди таких накрить для фіксованої підгрупи H (у т. ч. універсальних) гомеоморфні в силу ізоморфності накрить.

13 Теорема Зейферта – ван Кампена та її застосування

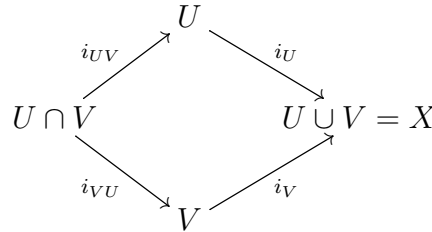
У цьому розділі ми познайомимось ще з одним технічним засобом для обчислення фундаментальних груп – теоремою Зейферта – ван Кампена, яку наведемо лише з коротким поясненням ідеї доведення. Алгебраї-

чні конструкції, що нам для цього знадобляться, наведенні у доповненні (а саме означення A.10, приклади A.15–A.18 та твердження A.3).

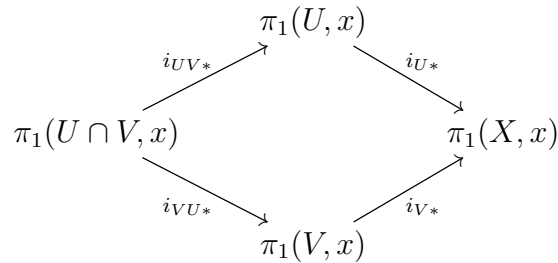
13.1 Формулювання та ідея доведення теорема Зейферта – ван Кампена

Нехай X – топологічний простір, а $\{U, V\}$ – його відкрите покриття, тобто U і V відкриті та $X = U \cup V$. Будемо до того ж вимагати, щоб U і V були лінійно зв'язними, а перетин $U \cap V$ – лінійно зв'язним і непорожнім. Згідно з твердженням 26.1 курсу топології, звідси випливає, зокрема, що X лінійно зв'язний (які з перелічених умов для цього насправді потрібні?). В алгебраїчній топології часто в такій ситуації будують інваріанти простору X за інваріантами підпросторів U , V і $U \cap V$. Теорема Зейферта – ван Кампена буде нашим першим прикладом подібної конструкції.

Оберемо якусь точку $x \in U \cap V$. Розглянемо відображення включення $i_U: U \rightarrow X$, $i_V: V \rightarrow X$, $i_{UV}: U \cap V \rightarrow U$ та $i_{VU}: U \cap V \rightarrow V$. Індукуємо ними гомоморфізми фундаментальних груп $i_{U*}: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, $i_{V*}: \pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, $i_{UV*}: \pi_1(U \cap V, x) \rightarrow \pi_1(U, x)$ та $i_{VU*}: \pi_1(U \cap V, x) \rightarrow \pi_1(V, x)$ відповідно. Оскільки $i_U \circ i_{UV} = i_V \circ i_{VU}$, бо це просто відображення включення $U \cap V$ у X , з пункту 2. твердження 5.1 випливає, що $i_{U*} \circ i_{UV*} = i_{V*} \circ i_{VU*}$, тобто діаграми з включень



та відповідних гомоморфізмів



комутативні. У формулюванні наступної теореми ми припускаємо, що фундаментальні групи $\pi_1(U, x)$, $\pi_1(V, x)$ та $\pi_1(U \cap V, x)$ мають опис у термінах твірних та співвідношень, тобто ізоморфні відповідним групам

класів еквівалентностей слів (див. означення А.10). Для спрощення позначень ми будемо їх ототожнювати та вважати i_{UV*} та i_{VU*} гомоморфізмами саме між такими групами. Тоді, скажімо, $i_{UV*}(c)$ для будь-якого $c \in \pi_1(U \cap V, x)$ має запис у термінах "алфавіта" $\pi_1(U, x)$, тобто твірних цієї групи та обернених до них, і аналогічно для i_{VU*} .

Теорема 13.1 (Зейферт – ван Кампен). *Нехай $\{U, V\}$ – відкрите покриття топологічного простору X таке, що U і V лінійно зв'язні, а перетин $U \cap V$ лінійно зв'язний та непорожній. Нехай фундаментальні групи цих підпросторів у деякій точці $x \in U \cap V$ мають наступні описи у термінах твірних та співвідношень:*

$$\begin{aligned}\pi_1(U, x) &= \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle, \\ \pi_1(V, x) &= \langle b_1, \dots, b_k \mid s_1, \dots, s_l \rangle, \\ \pi_1(U \cap V, x) &= \langle c_1, \dots, c_p \mid t_1, \dots, t_o \rangle.\end{aligned}$$

Тоді група $\pi_1(X, x)$ ізоморфна групі

$$\begin{aligned}\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l, \\ i_{UV*}(c_1)(i_{VU*}(c_1))^{-1}, \dots, i_{UV*}(c_p)(i_{VU*}(c_p))^{-1} \rangle,\end{aligned}$$

де гомоморфізми фундаментальних груп i_{UV*} та i_{VU*} індуковані вклученнями $i_{UV}: U \cap V \rightarrow U$ та $i_{VU}: U \cap V \rightarrow V$ відповідно.

Доведення. Наведемо тут лише ідею доведення теореми. Спочатку розглянемо т. зв. *вільний добуток* груп $\pi_1(U, x)$ та $\pi_1(V, x)$, визначивши його наступним описом:

$$\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x) := \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l \rangle.$$

Отже, елементами вільного добутку є класи еквівалентності слів з літер $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k$ та обернених до них, де відношення еквівалентності та групова операція описані перед означенням А.10. При цьому еквівалентність тепер використовує співвідношення з обох вихідних груп. Побудуємо тепер відображення $\alpha: \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ наступним чином: клас еквівалентності слова $W = d_1 \dots d_q$ переходить у добуток гомотопічних класів $\alpha(d_1) \dots \alpha(d_q)$, де

$$\alpha(d_i) := \begin{cases} i_{U*}(d_i), & d_i \in \pi_1(U, x); \\ i_{V*}(d_i), & d_i \in \pi_1(V, x). \end{cases}$$

для кожного $i = \overline{1, q}$. Тобто ми діємо на d_i гомоморфізмом i_{U*} , якщо це $a_j^{\pm 1}$ для деякого $j = \overline{1, n}$, і гомоморфізмом i_{V*} , якщо це $b_j^{\pm 1}$, де $j = \overline{1, k}$. Перевірте, що тоді α – коректно визначений гомоморфізм груп.

Виявляється, що α – сюр’єкція. Щоб це перевірити, достатньо показати, що будь-який гомотопічний клас петлі $[f] \in \pi_1(X, x)$ має вигляд $[f_1] \dots [f_q]$, де $[f_i] \in i_{U*}(\pi_1(U, x))$ або $[f_i] \in i_{V*}(\pi_1(V, x))$ для кожного $i = \overline{1, q}$ (чому?). Для цього, у свою чергу, достатньо довести, що будь-яка петля f простору X у точці x гомотопна добутку петель $f_1, \dots, f_q$, де носій кожної з f_i лежить в U або у V . Щоб це зробити, можна спочатку використати лему Лебега, розділивши f на відрізки, носій кожного з яких лежить в U або у V , а потім перетворити цей добуток відрізків на гомотопний добуток петель аналогічно до доведення твердження 12.7, тільки тепер потрібно використати шляхи, які з’єднують x та кожну з проміжних точок, що існують в силу лінійної зв’язності U , V і $U \cap V$, та ”спрягати” відрізки з цими шляхами, утворюючи петлі. Деталі відтворіть самостійно або див. у [11, с. 44, с. 63 перекладу] чи [13, с. 182-186, с. 209-213 перекладу].

Зауважимо, що для однозв’язних U і V (як у наслідку 13.1 далі) доведення завершиться на цьому кроці, бо група $\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$ буде тривіальною, а отже й $\pi_1(X, x)$ в силу сюр’єктивності α .

Як обговорювалося перед формулюванням теореми, $i_{U*} \circ i_{UV*}(c) = i_{V*} \circ i_{VU*}(c)$ для будь-якого $c \in \pi_1(U \cap V, x)$, тому в силу гомоморфності

$$\begin{aligned} \alpha(i_{UV*}(c)(i_{VU*}(c))^{-1}) &= \alpha(i_{UV*}(c))\alpha(i_{VU*}(c))^{-1} = \\ &= i_{U*}(i_{UV*}(c))(i_{V*}(i_{VU*}(c)))^{-1} = [e_x] \end{aligned}$$

за побудовою α , бо $i_{UV*}(c) \in \pi_1(U, x)$, а $i_{VU*}(c) \in \pi_1(V, x)$. Таким чином, ядро гомоморфізма α містить усі елементи вигляду $i_{UV*}(c)(i_{VU*}(c))^{-1}$, зокрема співвідношення $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для $j = \overline{1, p}$. Найскладнішим (але радше технічно) етапом доведення теореми є демонстрація ”оберненого включення”, точніше, того, що це ядро породжене співвідношеннями $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для усіх j , тобто є найменшою за включенням нормальною підгрупою N групи $\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$, що їх містить (див. твердження А.3 та обговорення після нього). Викладення цього етапу див. у [11, с. 44-46, с. 63-65 перекладу], див. також [13, с. 187-191, с. 214-218 перекладу], де використано трохи інші термінологію та техніку, але доводиться фактично те ж саме. Тоді з пункту 3. твердження А.2 і вже показаної сюр’єктивності α випливає, що

$$\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x) / N \simeq \alpha(\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)) = \pi_1(X, x).$$

В силу твердження А.3, факторизація за нормальною підгрупою N , що, як ми тепер знаємо, породжена елементами $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для усіх j , еквівалентна (у сенсі ізоморфності груп) дописуванню їх у список співвідношень $\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$. Звідси й отримаємо потрібне.

Якщо перетин $U \cap V$ однозв'язний, то останній етап доведення зводиться до демонстрації того, що α ін'єктивний, а отже є ізоморфізмом груп за наслідком А.1, звідки відразу отримуємо наслідок 13.2 (який впливає, звичайно, і з формулювання теореми).

■

Наслідок 13.1. *Якщо у топологічного простору X існує відкрите покриття $\{U, V\}$ таке, що U і V однозв'язні, а непорожній перетин $U \cap V$ лінійно зв'язний, то X однозв'язний.*

Вправа 13.1. Довести цей наслідок, не використовуючи попередню теорему (втім, у її доведенні міститься підказка і для даного випадку).

Наслідок 13.2. *Якщо у топологічного простору X існує відкрите покриття $\{U, V\}$ таке, що U і V лінійно зв'язні, а непорожній перетин $U \cap V$ однозв'язний, то для будь-якої $x \in U \cap V$*

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x).$$

Зауваження. Тут ми припускаємо, що $\pi_1(U, x)$ та $\pi_1(V, x)$ мають (скінченний) опис у термінах твірних та співвідношень, щоб можна було застосувати теорему Зейферта – ван Кампена та її доведення у викладеному вище вигляді. Втім, твердження цього наслідку залишається вірним і для довільних фундаментальних груп, якщо правильно визначити вільний добуток (див. посилання нижче). Зокрема, саме таким, як у наслідку, є покриття з прикладу 13.2 нижче. Якщо ж при цьому групи $\pi_1(U, x)$ та $\pi_1(V, x)$ вільні, то за побудовою їхній вільний добуток, а отже й $\pi_1(X, x)$, теж є вільними групами з відповідною кількістю твірних (як це й буде у згаданому прикладі).

Теорему Зейферта – ван Кампена можна узагальнити й на відкрите покриття з довільної скінченної кількості елементів.

Вправа 13.2. Якими саме повинні бути вимоги до елементів такого покриття? Спробуйте сформулювати таку узагальнену теорему (можливо, простіше буде спочатку сформулювати і довести узагальнення наслідку 13.1 аналогічно до вправи 13.1).

Простіше за все виконати цю вправу, коректно узагальнивши поняття вільного добутку груп, що фігурувало у нашому поясненні ідеї доведення. Зробивши це, можна переформулювати теорему взагалі без згадувань про твірні та співвідношення! Більш того, це поняття узагальнюється на довільну кількість груп, а отже теорему Зейферта – ван Кампена

можна узагальнити на покриття з довільної кількості елементів. Всі деталі цього, а також деякі цікаві приклади застосування теореми можна знайти у [11, с. 40-55, с. 57-77 перекладу].

Зокрема, у [11, с. 49-50, с. 69-70 перекладу] показано, як застосувати (узагальнену) теорему Зейферта – ван Кампена для дослідження фундаментальної групи гавайської сережки (простору з прикладу 12.3; нагадаємо, що цю групу неможливо обчислити за допомогою універсального накриття в силу наслідку 12.1), а саме, показано, що ця фундаментальна група незліченна і неабелева (там же можна знайти посилання на її повний опис). Зауважимо, що на відміну від цього простору фундаментальна група зліченного букета кіл ізоморфна вільній групі зліченного рангу (див. далі вправу 13.3), а отже зліченна. Ще кілька прикладів крім наведених нижче можна знайти у [13, с. 194-201, с. 221-230 перекладу]. У [3, с. 259-263] та [11, с. 50-52, с. 70-73 перекладу] також обговорюється застосування цієї теореми до обчислення фундаментальних груп *клітинних просторів*, з якими ми познайомимось у розділі 19.

Інші варіанти формулювання, доведення та приклади застосування теореми Зейферта – ван Кампена можна знайти у [8, с. 63-71, 156-160, с. 99-110, 225-232 перекладу], [15, с. 113-144, с. 128-159 перекладу], [14, с. 251-275] та [17, с. 407-445].

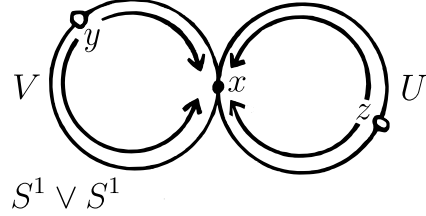
Приклад 13.1. Представимо сферу $X = S^n$ при $n \geq 2$ як об'єднання відкритих підмножин $U := S^n \setminus \{N\}$ і $V := S^n \setminus \{S\}$, де, як завжди, $N := (0, \dots, 0, 1)$ і $S := (0, \dots, 0, -1)$ позначають відповідно північний і південний полюси сфери (це носії карт її стандартного атласу з прикладу 29.3 курсу топології). Оскільки ці підмножини гомеоморфні $\mathbb{R}^n$ (гомеоморфізми встановлюються стереографічними проєкціями, див. той же приклад), вони однозв'язні. Їхній перетин $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$ лінійно зв'язний (бо при стереографічних проєкціях переходить у лінійно зв'язний $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) і непорожній, отже за наслідком 13.1 ми ще раз отримали однозв'язність S^n при $n \geq 2$, як у прикладі 6.2.

Приклад сфер також демонструє важливість деяких умов у формулюванні теореми Зейферта – ван Кампена та її наслідку: при $n = 1$ описане покриття задовольняє усім його умовам крім лінійної зв'язності $U \cap V$, але коло S^1 не є однозв'язним (приклад 9.1). Можна також побудувати покриття кола, де непорожній перетин $U \cap V$ буде лінійно зв'язним, але одна з однозв'язних множин U і V не буде відкритою (зробіть це), демонструючи важливість також і цієї умови.

Приклад 13.2. Нехай $X = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою x . Оберемо якісь точки y і z на кожному з цих кіл, що не дорівнюють x .

Покладемо $U := S^1 \vee S^1 \setminus \{y\}$ і $V := S^1 \vee S^1 \setminus \{z\}$. Це відкриті підмножини, об'єднанням яких є $S^1 \vee S^1$.

При цьому кожна з них гомотопічно еквівалентна S^1 (перевірте це, побудувавши відповідні деформаційні ретракції, як показано на ілюстрації справа, та скориставшись твердженням 2.2), а отже лінійно зв'язна за гомотопічною інваріантністю лінійної зв'язності (вправа 2.2; але лінійну зв'язність нескладно перевірити й безпосередньо). Їхній перетин $U \cap V = S^1 \vee S^1 \setminus \{y, z\}$ непорожній (містить x) і стяжний (перевірте це, побудувавши деформаційну ретракцію на $\{x\}$), зокрема лінійно зв'язний за твердженням 2.4 (що теж простіше перевірити безпосередньо). З гомотопічної інваріантності фундаментальної групи та прикладу 9.1 випливає, що $\pi_1(U, x) \simeq \pi_1(V, x) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, тобто у термінах твірних та співвідношень (див. приклад A.15):



$$\pi_1(U, x) = \langle a \rangle, \quad \pi_1(V, x) = \langle b \rangle, \quad \pi_1(U \cap V, x) = \langle \rangle.$$

Тут a і b – це, наприклад, гомотопічні класи петель, що один раз обходять у якихось напрямках кола, які містяться в U і V відповідно. Згідно з теоремою Зейферта – ван Кампена (див. також наслідок 13.2 і зауваження після нього), тоді $\pi_1(X, x)$ ізоморфна $\langle a, b \rangle$ (бо співвідношень немає), тобто вільній групі з двома твірними, як і повинно бути згідно з прикладом 9.5.

Вправа 13.3. За допомогою теореми Зейферта – ван Кампена обчислити фундаментальну групу букета n кіл $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ та переконатися у то-

му, що вона ізоморфна вільній групі з n твірними (пор. з вправою 9.2). Це можна зробити індуктивно або використати узагальнення теореми, що обговорювалося у зауваженні після вправи 13.2. Більш того, з цього узагальнення випливає, що фундаментальна група букета довільної кількості кіл ізоморфна вільній групі відповідного рангу.

Вправа 13.4. Тепер узагальнимо приклад 13.2 наступним чином. Нехай лінійно зв'язні топологічні простори X та Y з відміченими точками $x \in X$ та $y \in Y$ такі, що в них існують відкриті $U \ni x$ та $V \ni y$, які деформаційно ретрагуються (стягуються) на точки x та y відповідно. Показати, що тоді фундаментальні групи букета $(X, x) \vee (Y, y)$ (що теж є лінійно зв'язним) ізоморфні вільному добутку $\pi_1(X, x) * \pi_1(Y, y)$. Зокрема, цей

букет однозв'язний для однозв'язних X та Y . За аналогією з попередньою вправою та з використанням загального формулювання теореми Зейферта – ван Кампена узагальнити це твердження на букет довільної кількості просторів.

Приклад 13.3. Згадаємо, що, згідно з наведеними у прикладі 1.4 означеннями, (ручні) вузли, що задані регулярними вкладеннями кола у тривимірний простір $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ізотопні, якщо існує (гладка) ізотопія $F \in C^1(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$, тобто така гладка гомотопія, що $F(\cdot, s): S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$. Зокрема, це відношення еквівалентності вузлів (спробуйте це перевірити). З *теореми про продовження ізотопії* (див. [12, с. 177-180, с. 230-234 перекладу]) тоді випливає існування *дифеотопії* простору, тобто такої гладкої гомотопії $H \in C^1(\mathbb{R}^3 \times I, \mathbb{R}^3)$, що $H(\cdot, s): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – дифеоморфізм для будь-якого $s \in I$, яка продовжує F у наступному сенсі: $H(F(\cdot, 0), s) = F(\cdot, s)$ для кожного s . І навпаки, якщо H – дифеотопія, то $H \circ f$ – ізотопія вузлів f і $H(f(\cdot), 1)$ (чому?). Зокрема, $h := H(\cdot, 1)$ є дифеоморфізмом (а отже гомеоморфізмом, бо гладкі відображення неперервні) простору $\mathbb{R}^3$ на себе таким, що $h \circ f = F(\cdot, 1) = g$. Існування такого гомеоморфізма також часто використовується у якості означення еквівалентності вузлів (перевірте, що це теж відношення еквівалентності). Як бачимо, ця еквівалентність випливає з ізотопності. Обернене, взагалі кажучи, невірне. Наприклад, образ трилисника під дією симетрії відносно довільної площини у $\mathbb{R}^3$ (точніше, композиція їх як відображень) йому еквівалентний, бо симетрія є гомеоморфізмом, але, як виявляється, неізотопний.

Групою вузла $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, зветься фундаментальна група доповнення $\mathbb{R}^3 \setminus f(S^1)$. Оскільки це доповнення лінійно зв'язне (чому?), ця група визначена з точністю до ізоморфізма в силу наслідку 4.1. Гомеоморфізм $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такий, що $h \circ f = g$, індукує гомеоморфізм доповнень до образів вузлів f і g , тому з топологічної інваріантності фундаментальної групи випливає, що група вузла є його інваріантом відносно введеного у попередньому абзаці відношення еквівалентності, а отже й ізотопічним інваріантом. При цьому вона, звичайно, не "розрізняє" еквівалентні, але неізотопні вузли, наприклад, дзеркально симетричні трилисники, тут потрібні інші інваріанти.

Вправа 13.5. Показати, що доповнення до образу тривіального вузла у $\mathbb{R}^3$ (наприклад, "стандартного" кола, що задане умовами $x^2 + y^2 = 1, z = 0$) гомотопічно еквівалентне букету $S^2 \vee S^1$. Використавши вправу 13.4 (або побудувавши універсальне накриття), вивести з цього, що група тривіального вузла ізоморфна $\mathbb{Z}$.

Використавши стереографічну проєкцію $\varphi: S^3 \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ аналогічно до прикладу 6.2, можна показати, що група вузла f ізоморфна фундаментальній групі доповнення $S^3 \setminus \varphi^{-1} \circ f(S^1)$ у тривимірній сфері, тому її часто обчислюють саме у такому контексті. У [11, с. 46-49, с. 65-69 перекладу] показано, як використати теорему Зейферта – ван Кампена для обчислення деяких груп вузлів, а також *зачеплень*, тобто образів деякої скінченної кількості вузлів, що не перетинаються (їхні групи так само визначаються як фундаментальні групи доповнень у $\mathbb{R}^3$ або S^3 і теж є інваріантами відносно аналогічним чином визначеного відношення еквівалентності). Зокрема, там показано, що група трилисника ізоморфна $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$. Оскільки ця група неабелева (спробуйте показати це або див. [13, с. 219, с. 250 перекладу]), вона не може бути ізоморфна абелевій $\mathbb{Z}$, отже з інваріантності групи вузла та попередньої вправи випливає, що трилисник дійсно нееквівалентний, зокрема неізотопний, тривіальному вузлу. Див. більш детальні обговорення та приклади обчислення груп вузлів у [8] (де також міститься інформація про інші інваріанти вузлів) та [13, с. 209-238, с. 239-271 перекладу], а також елементарний опис інших інваріантів (зокрема таких, що ”розрізняють” дзеркальні трилисники) у главах 3 та 6 книги [6].

13.2 Застосування: фундаментальні групи поверхонь

У твердженні 31.2 курсу топології було встановлено, що кожна компактна зв’язна поверхня (тобто двовимірний многовид) M гомеоморфна факторпростору $X/\sim$, де X – опуклий n -кутник у $\mathbb{R}^2$, $n = 2m$ парне, а відношення еквівалентності $\sim$ ототожнює точки на межі X (внутрішні еквівалентні лише собі) за певним правилом, що склеює ребра цієї межі попарно і визначене словом W з m літер (W можна вважати елементом вільної групи $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$). Двукутники також допускаються, ними ми будемо вважати круги, межа яких розділена на дві дуги. Кожна літера слова W відповідає парі ребер на межі X , вони перелічені у W в тому ж порядку, в якому зустрічаються на межі, а їх степені відповідають правилам, за якими ці ребра ототожнюються. Ця конструкція зветься *розгорткою* поверхні M і визначена з точністю до гомеоморфізма словом W . Деталі див. у розділі 31 курсу топології. Крім того, з подальших результатів цього розділу випливає, що, якщо M не гомеоморфна S^2 , то цю розгортку можна обрати таким чином, що усі вершини багатокутника еквівалентні. Нарешті, у ході доведення теореми 30.1 було показано, що слово W завжди можна обрати одного з трьох стандартних виглядів:

- $W = aa^{-1}$ відповідає сфері $S^2 = M_0^2$;

- $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, де $g \in \mathbb{N}$, відповідає орієнтовній поверхні M_g^2 роду g , тобто зв'язній сумі g двовимірних торів T^2 ;
- $W = a_1 a_1 \dots a_g a_g$, де $g \in \mathbb{N}$, відповідає неорієнтовній поверхні N_g^2 роду g , тобто зв'язній сумі g дійсних проєктивних площин $\mathbb{R}P^2$.

Див. ілюстрації розгортки M_g^2 і N_g^2 для натуральних g нижче. Зауважимо, що у першій з цих розгортки вершини нееквівалентні, а у розгортки з двох наступних серій усі вершини еквівалентні. Виявляється, що теорема Зейферта – ван Кампена дозволяє обчислити фундаментальну групу поверхні, використовуючи розгортку:

Твердження 13.1. *Нехай компактна зв'язна поверхня M , що не гомотопічна S^2 , має розгортку, яка задана словом W з літер $a_1, \dots, a_m$ (що відповідають парам ребер) і усі вершини якої еквівалентні. Тоді для будь-якої $x \in M$*

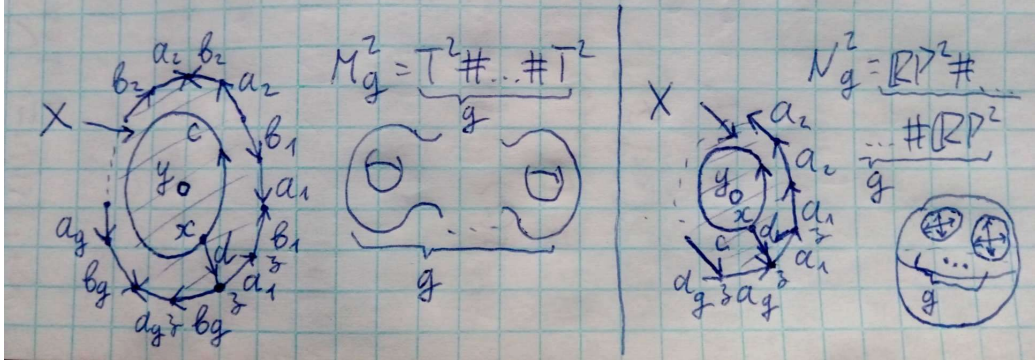
$$\pi_1(X, x) \simeq \langle a_1, \dots, a_m \mid W \rangle.$$

Доведення. Нагадаємо, що зв'язність та лінійна зв'язність для многовидів еквівалентні (див. пункт 5. твердження 29.2 курсу топології), тому в силу наслідку 4.1 достатньо обчислити $\pi_1(X, x)$ для якоїсь однієї $x \in M$. Нехай $X/\sim$ – розгортка з умови, яку ми будемо далі ототожнювати з M , а x – внутрішня точка X (точніше, клас її еквівалентності, але внутрішні точки X ми будемо ототожнювати з відповідними класами для спрощення позначень). Нехай $y \neq x$ – якась інша внутрішня точка X . Покладемо $U := \text{Int } X$ (як було пояснено, ми можемо вважати її підмножиною M) і $V := (X \setminus \{y\})/\sim$. Це відкрите покриття M за побудовою фактортопології.

Множина U стяжна як опукла в $\mathbb{R}^2$ (приклад 2.4; зокрема, лінійно зв'язна за твердженням 2.4), тому її фундаментальна група тривіальна.

Існує деформаційна ретракція простору $X \setminus \{y\}$ на ∂X (її можна побудувати за допомогою центральної проєкції, за необхідності змінивши розташування y , як у прикладах 2.6 або 12.3), яку можна факторизувати в деформаційну ретракцію $\varphi: V = (X \setminus \{y\})/\sim \rightarrow \partial X/\sim$ (як само?), отже множина V гомотопічно еквівалентна $\partial X/\sim$ за твердженням 2.2. Оскільки за умовою відношення $\sim$ ототожнює усі вершини X (далі будемо позначати відповідний клас еквівалентності через $z \in M$) і склеює ребра попарно, простір $\partial X/\sim$ гомеоморфний букету m кіл зі спільною точкою z . Зокрема, він лінійно зв'язний, а отже й V лінійно зв'язна за гомотопічною інваріантністю лінійної зв'язності (вправа 2.2). З гомотопічної інваріантності фундаментальної групи й вправи 9.2 (або 13.3) тоді випливає, що $\pi_1(V, x)$ є вільною групою з m твірними. Більш того,

кожній літері a_i для $i = \overline{1, m}$ відповідає пара ребер X (які ми будемо позначати теж через a_i) та петля у точці x з носієм у V , що будується наступним чином. Нехай шлях d з'єднує у V точки x і z . Його можна побудувати, наприклад, як факторизацію відрізка, що з'єднує x і якусь вершину X (і не проходить через y ; розташування точок можна змінити за необхідності), як проілюстровано нижче:



Оскільки вершини ребра a_i після факторизації ототожнюються, його можна параметризувати як петлю в z . Тоді $(d * a_i) * \bar{d}$ є петлею в x , тобто $[d * a_i * \bar{d}] \in \pi_1(V, x)$. Для спрощення позначень будемо цей гомотопічний клас також позначати через a_i . Можемо вважати, що ретракція φ переводить x та усі точки носія d в z : для цього можна розташувати точку x так, щоб відрізок d був напрямлений уздовж одного з променів вихідної проєкції $X \setminus \{y\} \rightarrow \partial X$. Тоді індукований гомоморфізм φ_* діє з $\pi_1(V, x)$ у $\pi_1(\partial X / \sim, z)$. Оскільки φ реалізує гомотопічну еквівалентність між цими просторами, φ_* є ізоморфізмом фундаментальних груп за твердженням 5.2. При цьому з означення індукованого гомоморфізма, того, що φ відображає усі точки носія d в z та є ретракцією, і лем розділу 3 випливає, що

$$\varphi_*([d * a_i * \bar{d}]) = [(\varphi \circ d) * (\varphi \circ a_i) * (\varphi \circ \bar{d})] = [e_z * a_i * e_z] = [a_i],$$

тобто це гомотопічний клас петлі, що утворює ребро a_i після факторизації. Але такі класи є твірними вільної групи $\pi_1(\partial X / \sim, z)$ (ми встановили це у прикладі 13.2 для $m = 2$; у загальному випадку ситуація аналогічна, у чому можна переконатися, розв'язавши вправи 9.2 або 13.3). Отже, класи $[d * a_i * \bar{d}]$, або у наших позначеннях просто a_i , для $i = \overline{1, m}$ є твірними вільної групи $\pi_1(V, x)$, бо φ_* – ізоморфізм (чому саме ізоморфізм переводить твірні у твірні?).

Нарешті, непорожня множина $U \cap V = \text{Int } X \setminus \{y\}$ гомотопічно еквівалентна S^1 (відповідну деформаційну ретракцію можна теж побудувати за допомогою центральної проєкції), отже вона лінійно зв'язна,

й $\pi_1(U \cap V, x) \simeq \mathbb{Z}$ за прикладом 9.1 і гомотопічною інваріантністю фундаментальної групи. Іншими словами, $\pi_1(U \cap V, x)$ є вільною групою з однією твірною c (див. приклад А.15). У якості цієї твірної можна взяти гомотопічний клас u обійденого один раз у певному напрямку кола, що містить x і до внутрішності якого належить y (знову можна порухати точки за необхідності), як показано на рисунках вище. Це коло теж позначатимемо через c . Згадану вище деформаційну ретракцію теж можна брати на це коло, тоді те, що $c \in \pi_1(U \cap V, x)$, формально перевіряється так само, як опис твірних $\pi_1(V, x)$ вище (виконайте цю перевірку за необхідності). Таким чином,

$$\pi_1(U, x) = \langle \rangle, \quad \pi_1(V, x) = \langle a_1, \dots, a_m \rangle, \quad \pi_1(U \cap V, x) = \langle c \rangle.$$

Тоді за теоремою Зейферта – ван Кампена

$$\pi_1(X, x) \simeq \langle a_1, \dots, a_m \mid i_{UV*}(c)(i_{VU*}(c))^{-1} \rangle.$$

При цьому $i_{UV*}: \pi_1(U \cap V, x) \rightarrow \pi_1(U, x)$ є гомоморфізмом у тривіальну групу, тобто тривіальним (див. приклад А.7), тому $i_{UV*}(c) = e$. Таким чином, єдиним співвідношенням шуканої групи буде $(i_{VU*}(c))^{-1}$ або, що еквівалентно, $i_{VU*}(c) \in \pi_1(V, x)$. Це гомотопічний клас кола c у x як петлі з носієм у підпросторі V . Можемо вважати, що центральна проєкція $X \setminus \{y\} \rightarrow \partial X$, факторизацією якої є ретракція φ , відображає коло c на ∂X (наприклад, що її центром є y). Тоді $\varphi_*(i_{VU*}(c))$ є добутком петель a_i та (можливо) обернених до них у точці z у тому порядку, у якому вони зустрічаються на ∂X , тобто тому, що задається словом W (знову ж, не обмежуючи загальність, можемо вважати, що x проєктується саме у його початок і що напрямки обходу збігаються, як проілюстровано вище). Тому за ізоморфізмом $i_{VU*}(c)$ є добутком петель у x з тими ж позначеннями і у тому ж порядку, тобто $i_{VU*}(c) = W$, що й дає потрібний опис $\pi_1(X, x)$.

■

Наслідок 13.3. Для будь-якого натурального g

$$\pi_1(M_g^2) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,$$

$$\pi_1(N_g^2) \simeq \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1 a_1 \dots a_g a_g \rangle.$$

Доведення. Це випливає з попереднього твердження і опису розгорток даних поверхонь у обговоренні перед ним.

■

Зауваження. Тут у позначеннях для фундаментальних груп ми вже не використовуємо точку x , визначаючи їх з точністю до ізоморфізма, як було домовлено у зауваженні після наслідку 4.1.

Обчислені таким чином фундаментальні групи компактних зв'язних поверхонь (нагадаємо, що для $S^2 = M_0^2$ це тривіальна група в силу прикладів 6.2 або 13.1) знайомі нам лише при $g = 1$: $\pi_1(T^2) = \pi_1(M_1^2) \simeq \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$ за прикладом А.17 і $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \pi_1(N_1^2) \simeq \langle a \mid a^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ в силу прикладу А.16, що узгоджується з результатами прикладів 9.1 і 9.2 відповідно. Решта цих груп неабелеві, й нам навіть важко встановити, чи є вони попарно неізоморфними. Так, фундаментальна група пляшки Клейна $K^2 \cong N_g^2$ має у попередньому наслідку опис $\langle a_1, a_2 \mid a_1 a_1 a_2 a_2 \rangle$, а її розгортка, що фактично описана у прикладі 16.1 курсу топології, дає за твердженням 13.1 опис $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Вправа 13.6. Знайти явний вигляд ізоморфізма груп $\langle a_1, a_2 \mid a_1 a_1 a_2 a_2 \rangle$ і $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Для кращого розуміння структури цих груп використаємо техніку абеліанізації, що описана у доповненні (означення А.11, твердження А.4, наслідок А.2 та їх обговорення).

Наслідок 13.4. Для будь-якого натурального g

$$\pi_1(M_g^2)/\pi_1(M_g^2)' \simeq \mathbb{Z}^{2g},$$

$$\pi_1(N_g^2)/\pi_1(N_g^2)' \simeq \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2.$$

Зокрема, усі ці групи, а отже й фундаментальні групи поверхонь $\pi_1(M_g^2)$, $\pi_1(N_g^2)$, попарно неізоморфні.

Доведення. В силу наслідків 13.3 і А.2,

$$\pi_1(M_g^2)/\pi_1(M_g^2)' \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1},$$

$$a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, g}, b_i b_j b_i^{-1} b_j^{-1}, i, j = \overline{1, g}, a_i b_j a_i^{-1} b_j^{-1}, i, j = \overline{1, g} \rangle.$$

Оскільки співвідношення $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ тепер є добутком інших співвідношень, його можна прибрати. Залишається група з $2g$ твірними $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, що усі попарно комутують. Тоді аналогічно до прикладу А.17 встановлюємо, що будь-який елемент цієї групи однозначно представляється у вигляді $a_1^{p_1} b_1^{q_1} \dots a_g^{p_g} b_g^{q_g}$, де $p_1, q_1, \dots, p_g, q_g \in \mathbb{Z}$, і добутку елементів групи відповідає сума наборів показників степенів. Тому її відображення на $\mathbb{Z}^{2g}$, що ставить у відповідність елементу $a_1^{p_1} b_1^{q_1} \dots a_g^{p_g} b_g^{q_g}$

набір $(p_1, q_1, \dots, p_g, q_g)$, є ізоморфізмом груп. Звідси й отримуємо потрібну ізоморфність.

Так само за наслідками 13.3 і А.2 маємо ізоморфність

$$\pi_1(N_g^2)/\pi_1(N_g^2)' \simeq \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1 a_1 \dots a_g a_g, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, g} \rangle.$$

Знову ж, аналогічно до прикладу А.17, нові співвідношення означають, що усі твірні комутують, тому $a_1 a_1 \dots a_g a_g = (a_1 \dots a_g)^2$. Позначимо $b := a_1 \dots a_g$ і помітимо, що $a_g = a_{g-1}^{-1} \dots a_1^{-1} b$, $a_g^{-1} = b^{-1} a_1 \dots a_{g-1}$, тому будь-яке слово з нашої групи можна однозначно переписати з допомогою літер $a_1, \dots, a_{g-1}, b$ та обернених до них, і навпаки: усі слова з літер $a_1, \dots, a_{g-1}, b$ та обернених до них можна записати як елементи групи. Вираз b при цьому комутує з кожним з a_i . Оскільки групова операція при цьому зберігається (чому?), отримуємо таким чином ізоморфізм

$$\pi_1(N_g^2)/\pi_1(N_g^2)' \simeq \langle a_1, \dots, a_{g-1}, b \mid b^2,$$

$$a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, g-1}, a_i b a_i^{-1} b^{-1}, i = \overline{1, g-1} \rangle.$$

Комбінуючи міркування прикладів А.16 і А.17, виводимо, що будь-який елемент такої групи однозначно представляється у вигляді $a_1^{p_1} \dots a_{g-1}^{p_{g-1}} b^q$, де $p_1, \dots, p_{g-1} \in \mathbb{Z}$, а $q = 0$ або 1 , і добуток елементів відповідає сумі показників, тому $a_1^{p_1} \dots a_{g-1}^{p_{g-1}} b^q \mapsto (p_1, \dots, p_{g-1}, [q])$ встановлює ізоморфізм даної групи на $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$, що й демонструє потрібне.

Попарна неізоморфність цих абелевих груп впливає з різного числа твірних або існування *ідемпотентної* твірної b (для якої $b^2 = e$). Відновить її доведення самостійно. Попарна неізоморфність груп $\pi_1(M_g^2)$, $\pi_1(N_g^2)$ тоді впливає з ізоморфності абеліанізацій ізоморфних груп.

■

Зауваження. Попарна неізоморфність фундаментальних груп поверхонь $\pi_1(M_g^2)$, $\pi_1(N_g^2)$ (включно з тривіальною $\pi_1(S^2)$) дає, таким чином, ще одне доведення єдиності у теоремі 30.1, тобто того, що перелічені там поверхні попарно негомеоморфні. Цього разу доведення не використовує специфічні для поверхонь інваріанти (втім, ейлерова характеристика теж не є специфічною для поверхонь, як побачимо далі). Попередній наслідок разом з теоремою 30.1 дозволяють стверджувати, що дві компактні зв'язні поверхні гомеоморфні тоді й тільки тоді, коли мають ізоморфні фундаментальні групи (й коли вони гомотопічно еквівалентні), тобто клас ізоморфності фундаментальної групи є для цього класу топологічних просторів не просто інваріантним, а як кажуть, *повним інваріантом*: коли такі інваріанти збігаються, простори гомеоморфні. Крім того, звідси впливає, що компактний зв'язний топологічний

простір X не є двовимірним многовидом, якщо його фундаментальна група не ізоморфна жодній з перелічених.

З теореми 30.1 і попереднього наслідку також випливає, що єдина з точністю до гомеоморфізму компактна однозв'язна поверхня – це двовимірна сфера S^2 . Виявляється, що аналогічне твердження справедливе й у вимірності 3, а для інших вимірностей це не так (наприклад, добуток $S^2 \times S^2$ є компактным однозв'язним за прикладами 6.2 і 6.4 чотиривимірним за твердженням 29.1 курсу топології многовидом, що не гомеоморфний S^4 , як впливатиме з результатів наступного розділу; побудуйте аналогічні приклади у інших вимірностях), але можна замінити умову однозв'язності на сильнішу умову гомотопічної еквівалентності сфері. Це становить зміст однієї з найвідоміших топологічних теорем:

Теорема 13.2 (Узагальнена гіпотеза Пуанкаре). *Будь-який n -вимірний компактний многовид, що гомотопічно еквівалентний n -вимірній сфері S^n , гомеоморфний S^n .*

Більш того, якщо $n = 2$ або 3 , то будь-який n -вимірний компактний однозв'язний многовид гомеоморфний S^n .

При $n = 0$ твердження цієї теореми впливає з означення многовида і вправи 2.2 (як саме?), а при $n = 1$ – є очевидним наслідком пункту 8. твердження 29.2 курсу топології (будь-який одновимірний зв'язний компактний многовид гомеоморфний S^1 , а некомпактний – $\mathbb{R}$), причому одновимірних компактних однозв'язних многовидів не існує. Класична гіпотеза Пуанкаре (яка виявилася найскладнішою для доведення) – це друге твердження попередньої теореми при $n = 3$.

Абеліанізація фундаментальної групи тут також виникла зовсім не випадково. Далі ми побачимо, що вона ізоморфна іншому важливому топологічному інваріанту – першій групі гомологій (див. наслідок 18.6). Абеліанізація далеко не завжди є таким ефективним інструментом, як у наслідку 13.4. Так, у [13, с. 224-226, с. 256-260 перекладу] показано, що абеліанізація групи будь-якого вузла (див. приклад 13.3) ізоморфна $\mathbb{Z}$, тобто групі тривіального вузла (вправа 13.5), що не дає можливості їх розрізнити.

Звичайно, фундаментальні групи поверхонь можна обчислювати також за допомогою накрить. Дійсно, в силу наслідку 12.5 у кожній компактній зв'язній поверхні M існує єдине з точністю до ізоморфізму універсальне накриття, накриваючий простір якого є однозв'язною поверхнею. На цьому просторі в силу регулярності цього накриття (наслідок 11.1) діє група автоморфізмів, що за наслідком 11.3 ізоморфна $\pi_1(M)$. Як нам відомо, для $M = M_0^2 = S^2$ і $M = N_1^2 = \mathbb{R}P^2$ універсальними накриваючими

просторами є сфери S^2 , на яких діють тривіальна група (тобто накрыття задається тотожним відображенням) і $\mathbb{Z}_2$ (приклад 7.5) відповідно. Помітимо, що в обох випадках ці групи діють ізометріями, бо єдиний нетривіальний елемент $\mathbb{Z}_2$ діє центральною симетрією, яка є ізометрією сфери як обмеження на неї ізометрії евклідового простору.

Також ми знаємо з прикладу 7.4, що універсальним накриваючим простором $M = M_1^2 = T^2$ є площина $\mathbb{R}^2$, на якій діє група $\mathbb{Z}^2$ паралельними перенесеннями на вектори з цілими координатами, що, звичайно, є ізометріями стандартної евклідової структури площини. Виявляється, що це так і для $M = N_2^2 = K^2$:

Вправа 13.7. Знайти групу, що ізоморфна $\pi_1(K^2) \simeq \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ (див. зауваження після наслідку 13.3 і вправу 13.6) та діє на $\mathbb{R}^2$ евклідовими ізометріями так, що простір орбіт цієї дії гомеоморфний K^2 .

Нарешті, можна показати, що універсальними накриваючими просторами поверхонь M_g^2 при $g \geq 2$ і N_g^2 при $g \geq 3$ теж є площини $\mathbb{R}^2$, але тепер групи, що ізоморфні фундаментальним групам цих поверхонь, діють не евклідовими, а *гіперболічними* ізометріями, тобто ізометріями *гіперболічної площини* (Лобачевського). Див. описи різних моделей цієї геометричної структури у [1, с. 181-189] або главах 1 і 2 книги [18]. Зокрема, на [18, с. 16, с. 22 перекладу] показано, як на гіперболічну площину діє фундаментальна група кренделя M_2^2 . На ілюстрації за цим посиланням використовується *модель Пуанкаре в крузі* гіперболічної площини (відкритий круг B^2 , нагадаємо, гомеоморфний $\mathbb{R}^2$) і зображена, зокрема, *фундаментальна область* групи, що містить по одній точці з кожної орбіти та є (криволінійним) восьмикутником, тобто якраз повторює розгортку M_2^2 разом з потрібними отождноженнями сторін. Фундаментальні групи перелічених поверхонь є таким чином (з точністю до ізоморфізма) прикладами *фуксових груп*, тобто дискретних підгруп групи ізометрій гіперболічної площини. Вони, у свою чергу, є важливим окремим випадком загального поняття *гіперболічної групи*, що отримало свою назву саме від цього прикладу. Крім того, оскільки площина $\mathbb{R}^2$ стяжна, перелічені поверхні є просторами Ейленберга – Маклейна $K(G, 1)$ відповідних фундаментальних груп G (див. обговорення наприкінці розділу 9).

Викладені тут спостереження про існування геометричних структур постійної гауссової кривини на універсальних накриваючих просторах компактних зв'язних поверхонь (а отже й на самих поверхнях, як відомо з диференціальної геометрії), знаки кривини яких залежать від роду та орієнтовності поверхні, тісно пов'язані з класичною інтегральною формулою Гаусса – Бонне з диференціальної геометрії поверхонь та її

знаменитим наслідком – теоремою Гаусса – Бонне про ейлерову характеристику, що встановлює зв'язок між геометрією та топологією поверхні (див. [1, с. 164-169]). А саме, з цієї теореми випливає, що якщо на S^2 або на $\mathbb{R}P^2$ існує метрика постійної гауссової кривини, то ця кривина повинна бути додатною, на T^2 або на K^2 – нульовою, на решті компактних зв'язних поверхонь – від'ємною. Дуже нетривіальним перенесенням цих міркувань на випадок тривимірних многовидів є т. зв. *гіпотеза геометризції* У. Тьорстона (див. [18]). Зараз це вже доведена теорема, з якої насправді й випливає класична гіпотеза Пуанкаре.

14 Гомотопічні групи

Поняття гомотопічної групи є прямим узагальненням фундаментальної групи на довільну вимірність. Як побачимо, усі основні технічні засоби, що були введені для дослідження фундаментальної групи, з невеликими змінами працюють і для загальних гомотопічних груп. З іншого боку, їх обчислення, взагалі кажучи, суттєво складніше, і потребує нових методів. Наприклад, накриття тут уже не такі ефективні. Ми лише побіжно познайомимося з одним із таких методів – використанням надбудов.

14.1 Основні означення та властивості

Перш за все, дамо наступне узагальнення поняття петлі:

Означення 14.1. Нехай X – топологічний простір, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді n -вимірним сфероїдом у точці $x \in X$ зветься неперервне відображення $f: I^n \rightarrow X$, що переводить межу куба $I^n \subset \mathbb{R}^n$ у x : $f(\partial I^n) = \{x\}$. Носієм сфероїда $f: I^n \rightarrow X$ зветься його образ $f(I^n) \subset X$. Постійним n -вимірним сфероїдом $e_x: I^n \rightarrow X$ будемо називати постійне відображення у точку x , а n -вимірним сфероїдом, що *протилежний* до сфероїда $f: I^n \rightarrow X$ – відображення $\bar{f}: I^n \rightarrow X$, що визначене умовою $\bar{f}(t_1, \dots, t_n) := f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ (також його позначають через $-f$).

Зауваження. При $n = 0$ це якесь постійне відображення з $I^0 = \{0\}$ у X (зауважимо, що $\partial I^0 = \emptyset$, бо це межа у $\mathbb{R}^0 = \{0\}$), при $n = 1$ – петля $f: I \rightarrow X$ у x , бо $f(0) = f(1) = x$ в силу означення. Постійний і протилежний сфероїди теж є n -вимірними сфероїдами у x за цим означенням. Помітимо також, що межа I^n – це множина усіх точок $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$, для яких принаймні одне з чисел t_i , $i = \overline{1, n}$, дорівнює 0 або 1.

У загальному випадку куб $I^n \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфний замкненій кулі $D^n \subset \mathbb{R}^n$ аналогічно до вправи 14.2 курсу топології (або доведенню твердження 6.1, якщо $n = 2$), де гомеоморфізм можна побудувати, наприклад, за допомогою паралельного перенесення та центральної проєкції. Нехай n натуральне. Тоді при цьому гомеоморфізмі межі куба відповідає межа кулі, тобто сфера: $\partial I^n \cong \partial D^n = S^{n-1}$. Якщо ототожнити I^n з D^n за допомогою такого гомеоморфізма, то будь-який n -вимірний сфероїд можна вважати неперервним відображенням $f: D^n \rightarrow X$ таким, що $f(S^{n-1}) = \{x\}$. Воно тоді факторизується у неперервне відображення $\hat{f}: D^n/S^{n-1} \rightarrow X$. Згадаємо, що $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ в силу вправи 16.1 курсу топології. Тоді $\hat{f}$ перетворюється на неперервне відображення $S^n \rightarrow X$, що переводить певну фіксовану точку S^n у x . І навпаки, кожному такому відображенню відповідає n -вимірний сфероїд $f: I^n \rightarrow X$ аналогічно до випадку $n = 1$ з вправи 4.1 (перевірте). Це пояснює термін "сфероїд" для таких відображень. Узагальнимо тепер гомотопність петель з розділу 3:

Означення 14.2. Два n -вимірні сфероїди f і g у точці x топологічного простору X будемо називати *гомотопними* й писати $f \sim g$, якщо вони ∂I^n -гомотопні, а класи еквівалентності відношення ∂I^n -гомотопності називатимемо *гомотопічними класами* n -вимірних сфероїдів у x . Гомотопічний клас сфероїда f будемо позначати через $[f]$.

Приклад 14.1. Усі n -вимірні сфероїди у будь-якій точці опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ гомотопні між собою в силу прикладу 1.2. Насправді це так і для зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$, і взагалі для будь-якого стяжного простору X за прикладом 14.3 нижче.

Означення 14.3. Сумою n -вимірних сфероїдів f і g у точці x топологічного простору X зветься n -вимірний сфероїд $f + g: I^n \rightarrow X$ у x , що визначений умовою

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Зауваження. Це означення має сенс для натуральних n й дійсно задає n -вимірний сфероїд у x , бо відображення $f + g$ коректно визначене (зокрема, при $t_1 = \frac{1}{2}$ маємо $f(1, t_2, \dots, t_n) = x = g(0, t_2, \dots, t_n)$), неперервне в силу неперервності f та g , і на межі I^n , тобто коли один з аргументів $t_1, \dots, t_n$ дорівнює 0 або 1, це x за побудовою та відповідними властивостями f і g . Див. умовне зображення суми $f + g$ у лівому верхньому куті ілюстрації нижче. При $n = 1$ це просто добуток петель.

Взагалі, слово "сума" і позначення $f + g$ традиційно використовують лише при $n \geq 2$. Це пов'язано з властивістю абелевості у наступній теоремі та тим, що, з іншого боку, добуток петель, взагалі кажучи, не є гомотопічно абелевим, як ми бачили, скажімо, у прикладі 9.4 або при обчисленні фундаментальних груп поверхонь у попередньому розділі.

Теорема 14.1 (Конструкція гомотопічних груп). *Для будь-якого натурального n гомотопічні класи n -вимірних сфероїдів у точці x топологічного простору X з операцією $[f] + [g] := [f + g]$ утворюють групу, що є абелевою при $n \geq 2$.*

Доведення. Як було зауважено після означення 14.3, для будь-яких n -вимірних сфероїдів f і g у x їхня сума $f + g$ теж є n -вимірним сфероїдом у x , тому визначений його гомотопічний клас $[f + g]$. Коректність визначеної в умові теореми операції доводиться аналогічно до випадку фундаментальної групи ($n = 1$) у теоремі 4.1 та лемі 3.1 для шляхів. А саме, якщо $[f_0] = [f_1]$, $[g_0] = [g_1]$, а $F, G: I^n \times I \rightarrow X$ – відповідні гомотопії, то визначимо відображення $H: I^n \times I \rightarrow X$ умовою

$$H(t_1, \dots, t_n, s) := \begin{cases} F(2t_1, t_2, \dots, t_n, s), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, s), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

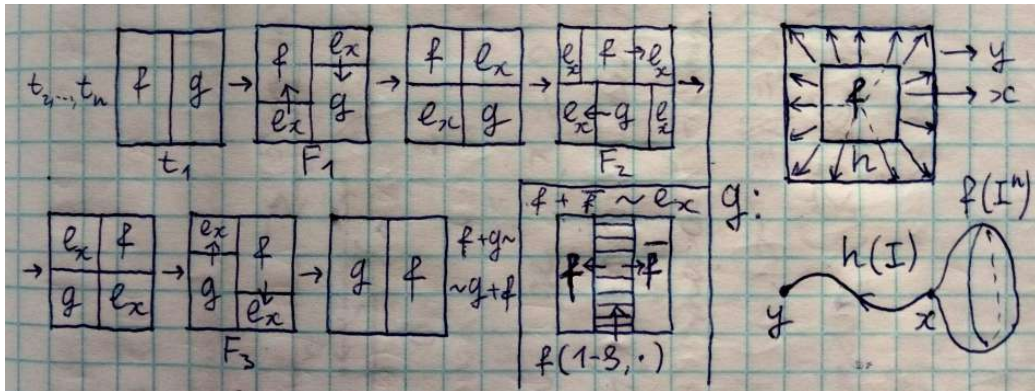
Воно коректно визначене і неперервне, бо F і G неперервні, а при $t_1 = \frac{1}{2}$ маємо $F(1, t_2, \dots, t_n, s) = x = G(0, t_2, \dots, t_n, s)$ для будь-яких значень інших параметрів за означенням ∂I^n -гомотопії. При $s = 0$, оскільки $F(\cdot, 0) = f_0$ і $G(\cdot, 0) = g_0$, маємо $H(\cdot, 0) = f_0 + g_0$ за означенням суми, і аналогічно $H(\cdot, 1) = f_1 + g_1$. Нарешті, коли один з параметрів $t_1, \dots, t_n$ дорівнює 0 або 1, маємо x , бо $F(\partial I^n, \cdot) = G(\partial I^n, \cdot) = e_x$ знову ж за означенням ∂I^n -гомотопії. Тому H є ∂I^n -гомотопією $f_0 + g_0$ і $f_1 + g_1$, а отже їхні гомотопічні класи збігаються: $[f_0 + g_0] = [f_1 + g_1]$, що й означає коректність визначення групової операції.

Асоціативність групової операції доводиться аналогічно до лемі 3.2 (власне, гомотопія виглядає так само, як гомотопія з цієї лемі, тільки з додатковими аргументами). Аналогічно до лемі 3.3 за допомогою гомотопії такого ж вигляду демонструється, що $[f] + [e_x] = [e_x] + [f] = [f]$ для будь-якого класу $[f]$, тобто $[e_x]$ є нейтральним елементом групи (його часто позначають просто через 0). За необхідності відтворіть деталі доведень самостійно. Тепер нехай f – n -вимірний сфероїд у x . Задамо відображення $F: I^n \times I \rightarrow X$ умовою, що аналогічна до задання гомотопії з доведення лемі 3.4:

$$F(t_1, \dots, t_n, s) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1-s, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2-2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Див. ілюстрацію знизу в центрі. Таке відображення неперервне, бо f неперервне, а значення при $t_1 = \frac{1-s}{2}$ і $t_1 = \frac{1+s}{2}$ узгоджені, $F(\cdot, 0) = f + \bar{f}$ за означеннями суми та протилежного сфероїда, і $F(\cdot, 1) = e_x$. Якщо $t_1 = 0$ або $t_1 = 1$, то $F(t_1, \dots, t_n, s) = x$ незалежно від інших значень параметрів, бо f – сфероїд у x . Так само, якщо один з параметрів $t_2, \dots, t_n$ дорівнює 0 або 1, то з тієї ж причини усі три рядки у означенні F дають x незалежно від t_1 та s . Отже, $F(\partial I^n, \cdot) = e_x$. Таким чином, $F \in \partial I^n$ -гомотопією $f + \bar{f}$ і e_x (ще один спосіб побудови гомотопії між цими сфероїдами можна знайти у [2, с. 160]), і тому $[f] + [\bar{f}] = [f + \bar{f}] = [e_x] = 0$ для будь-якого класу $[f]$. Підставляючи сюди $\bar{f}$ замість f , отримуємо, що і $[\bar{f}] + [f] = [\bar{f}] + [\bar{\bar{f}}] = 0$, тобто $[\bar{f}]$ є протилежним до $[f]$ елементом: $-[f] = [\bar{f}]$. Разом це все й означає, що усі гомотопічні класи $[f]$ сфероїдів утворюють групу.

Нехай тепер $n \geq 2$. Нижче продемонстрована ідея доведення комутативності групової операції у даному випадку. На умовному I^n (насправді зображений, звичайно, квадрат I^2) позначені області визначення довільних двох сфероїдів f і g та постійного сфероїда на різних етапах побудови. Як бачимо, потрібно використати послідовність трьох гомотопій.



Перша з них $F_1: I^n \times I \rightarrow X$ задана умовою

$$F_1(t_1, \dots, t_n, s) := \begin{cases} x, & t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [0, \frac{s}{2}]; \\ f(2t_1, \frac{2t_2-s}{2-s}, t_3, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [\frac{s}{2}, 1]; \\ g(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2-s}, t_3, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [0, \frac{2-s}{2}]; \\ x, & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [\frac{2-s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Перевірте самостійно усі формальні вимоги з означення ∂I^n -гомотопії (аналогічно до гомотопії H вище). Вона переводить $f + g$ у n -вимірний сфероїд з третього рисунку в першому рядку вище. Так само, відобра-

ження $F_2: I^n \times I \rightarrow X$, що задане умовою

$$F_1(t_1, \dots, t_n, s) := \begin{cases} x, & t_1 \in [0, \frac{1-s}{2}], & t_2 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2t_1 + s - 1, 2t_2, t_3, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1-s}{2}, \frac{2-s}{2}], & t_2 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ x, & t_1 \in [\frac{2-s}{2}, 1], & t_2 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ x, & t_1 \in [0, \frac{s}{2}], & t_2 \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ f(2t_1 - s, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}], & t_2 \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ x, & t_1 \in [\frac{s+1}{2}, 1], & t_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

є ∂I^n -гомотопією (перевірте це) і переводить згаданий сфероїд у сфероїд з першого рисунку в другому рядку вище. Нарешті, гомотопія F_3 будуватиметься аналогічно до F_1 (випишіть її) та переводить цей сфероїд у суму $g + f$. Таким чином, $f + g \sim g + f$, отже дійсно маємо комутативність:

$$[f] + [g] = [f + g] = [g + f] = [g] + [f]$$

для будь-яких двох гомотопічних класів $[f]$ і $[g]$. Зауважимо, що умова $n \geq 2$ суттєва для самої можливості робити подібні побудови.

■

Означення 14.4. Група, що описана у теоремі 14.1, зветься *n -тою гомотопічною групою* простору X у точці x і позначається через $\pi_n(X, x)$:

$$\pi_n(X, x) = \{[f] \mid f \in C(I^n, X): f(\partial I^n) = \{x\}\}.$$

Зауваження. З означень випливає, що $\pi_1(X, x)$ – це фундаментальна група X у x . Попереднє загальне означення нарешті пояснює сенс індекса 1 у її позначенні. Через $\pi_0(X)$ зазвичай позначають множину (вільних, бо $\partial I^0 = \emptyset$) гомотопічних класів 0-вимірних сфероїдів, тобто (постійних) відображень одноточкового простору в X . Згідно з прикладом 1.1, це просто множина компонент лінійної зв'язності X (тобто $\pi_0(X)$ знаходиться з цією множиною у природній бієктивній відповідності; чому?). На ній, взагалі кажучи, не вводиться структура групи. Групи $\pi_n(X, x)$ при $n \geq 2$ інколи називають *вищими гомотопічними групами*.

Вправа 14.1. Узагальнити результат вправи 4.1, перенесши операцію додавання на множину гомотопічних класів "сферичних" n -вимірних сфероїдів $\hat{f}: S^n \rightarrow X$ із зауваження після означення 14.1 (відносно $\{y\}$ -гомотопності, де $y \in S^n$ – фіксована точка сфери, яку сфероїд переводить у x). Див. відповідь у [11, с. 340-341, с. 432 перекладу].

Приклад 14.2. Гомотопічні групи одноточкового простору за означенням тривіальні: $\pi_n(\{x\}, x) = \{[e_x]\} = \{0\}$ для кожного натурального n .

Твердження 14.1. *Нехай точки x та y топологічного простору X з'єднані шляхом $h: I \rightarrow X$. Тоді для будь-якого натурального n існує ізоморфізм $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$ гомотопічних груп у цих точках.*

Доведення. При $n = 1$ це твердження 4.1. У загальному випадку наведемо лише ідею побудови ізоморфізма. Нехай $[f] \in \pi_n(X, x)$, і f – якийсь сфероїд у x з цього гомотопічного класу. Розділімо його область визначення I^n на внутрішній куб $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n$ і доповнення до нього, як проілюстровано зверху справа. Визначимо відображення $g: I^n \rightarrow X$ умовою $g(t_1, \dots, t_n) := f(2t_1 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_n - \frac{1}{2})$ на внутрішньому кубі (зокрема, це буде x на його межі), а на доповненні визначимо так, як зображено на ілюстрації: розіб'ємо його у диз'юнктне об'єднання відрізків від межі внутрішнього куба до межі I^n і покладемо $g((1-t)z_0 + tz_1) := h(t)$ для кожного такого відрізка $[z_0, z_1]$ (де $z_0 \in \partial[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n$, а $z_1 \in \partial I^n$). Якщо правильно обрати розбиття на відрізки, наприклад, використавши центральну проєкцію, то g буде неперервним, і за побудовою $g(\partial I^n) = \{y\}$, тобто g – n -вимірний сфероїд у точці y . Його носій теж зображений зверху, це об'єднання носіїв f і h . Скажемо тоді, що $[g] \in \pi_n(X, y)$ – образ $[f]$ під дією ізоморфізма.

Вправа 14.2. За необхідності записавши конструкцію більш формально, показати, що це дійсно коректно визначений ізоморфізм груп. Див. деталі у [11, с. 341-342, с. 432-433 перекладу].

■

Наслідок 14.1. *Якщо топологічний простір X лінійно зв'язний, то $\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(X, y)$ для будь-яких $x, y \in X$ і натурального n .*

Вправа 14.3. Показати, що ізоморфізм з твердження 14.1 не змінюється при заміні h в межах гомотопічного класу. Дослідити його залежність від цього класу аналогічно до вправи 4.2. Зокрема, описати дію групи $\pi_1(X, x)$ на $\pi_n(X, x)$ автоморфізмами, тобто ізоморфізмами на себе, що визначені гомотопічними класами петель у x . При $n = 1$ це внутрішні автоморфізми, тобто спряження (див. приклад А.12), як нескладно вивести з твердження 4.1, а загальна ситуація описана у [2, с. 169] або [11, с. 342, с. 433-434 перекладу].

Зауваження. Аналогічно до фундаментальних груп, далі для зручності інколи позначатимемо через $\pi_n(X)$ єдиний клас ізоморфності n -тих гомотопічних груп лінійно зв'язного простору X , і говоритимемо про нього як про n -ту гомотопічну групу X .

Як і у випадку фундаментальної групи, наступне твердження узагальнюється на довільну скінченну кількість множників:

Твердження 14.2. Для будь-яких топологічних просторів X, Y , точки $(x, y) \in X \times Y$ і натурального n

$$\pi_n(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y).$$

Доведення. Дослівно повторює доведення твердження 5.3 (переконайтеся у цьому).

■

Означення 14.5. Нехай X та Y – топологічні простори, $\varphi: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, точка $x \in X$, n натуральне. Тоді відображення

$$\varphi_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x)): [f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

зветься гомоморфізмом n -тих гомотопічних груп, що *індукований* відображенням φ (у точці x).

Твердження 14.3. В умовах попереднього означення відображення φ_* коректно визначене. При цьому

1. φ_* – гомоморфізм груп.
2. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ для будь-яких неперервних $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow Z$.
3. $(id_X)_* = id_{\pi_n(X, x)}$.
4. Якщо відображення $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ гомотопні, F – їх гомотопія і $\alpha: \pi_n(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_n(Y, \psi(x))$ – ізоморфізм, що побудований з використанням шляху $t \mapsto F(x, t)$ як у твердженні 14.1, то $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$.

Доведення. Зауважимо, що $\varphi \circ f: I^n \rightarrow Y$ неперервне як композиція неперервних, і $\varphi \circ f(\partial I^n) = \{\varphi(x)\}$, бо f – сфероїд у x , тому $\varphi \circ f$ – сфероїд у $\varphi(x)$, отже визначений гомотопічний клас $[\varphi \circ f] \in \pi_n(Y, \varphi(x))$. Подальше доведення коректності визначення та пунктів 1. – 3. дослівно повторює доведення коректності та відповідних пунктів у твердженні 5.1 (переконайтеся у цьому). Побудова гомотопії у пункті 4. складніша, але теж повторює ідею доведення пункту 4. твердження 5.1 (побудуйте її).

■

Твердження 14.4. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow X$ – гомотопічно обернені відображення топологічних просторів. Тоді для будь-якого натурального n

- $\varphi_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $x \in X$;
- $\psi_*: \pi_n(Y, y) \rightarrow \pi_n(X, \psi(y))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $y \in Y$.

Доведення. Знову ж, доведення дослівно повторює доведення твердження 5.2 із заміною посилань на твердження 5.1 посиланнями на відповідні пункти попереднього твердження (переконайтеся у цьому).

■

Наслідок 14.2 (Гомотопічна інваріантність гомотопічних груп). *Якщо лінійно зв'язні топологічні простори X та Y гомотопічно еквівалентні, то $\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(Y, y)$ для будь-яких точок $x \in X$, $y \in Y$ і натурального n .*

Доведення. Це випливає з попереднього твердження і наслідку 14.1.

■

Приклад 14.3. Гомотопічні групи будь-якого стяжного простору X тривіальні (нульові): для усіх точок $x \in X$ маємо $\pi_n(X, x) = \{[e_x]\} = \{0\}$ для будь-якого натурального n в силу попереднього наслідку і прикладу 14.2. Зокрема, це так для будь-якої зірчатої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ з прикладу 2.4. У таких випадках часто пишуть просто $\pi_n(X, x) = 0$ або $\pi_n(X) = 0$ (й при $n = 1$, тобто для фундаментальної групи, також).

Зауваження. У спрощених позначеннях зауваження після наслідку 14.1 висновок попереднього твердження виглядає як $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ або $\pi_n(X) = \pi_n(Y)$. Таким чином, не тільки фундаментальна група, а й усі гомотопічні групи лінійно зв'язного простору є його гомотопічними (зокрема топологічними) інваріантами. Для кожного натурального n обчислення n -тих гомотопічних груп та індукованих гомоморфізмів визначає функтор з категорії топологічних просторів з відміченими точками та їх неперервних відображень у категорію груп та їх гомоморфізмів з властивістю гомотопічної інваріантності.

З іншого боку, наступна теорема дає цікаву достатню умову гомотопічної еквівалентності многовидів (у загальному випадку її твердження вірне для лінійно зв'язних клітинних просторів, див. розділ 19). Зауважимо, що просто з ізоморфності усіх гомотопічних груп двох многовидів (тим більше, двох загальних просторів), взагалі кажучи, не випливає існування відображення з формулювання теореми, що задає гомотопічну еквівалентність, тобто гомотопічні групи необов'язково утворюють *повну систему* гомотопічних інваріантів. Ми повернемося до питань однозначної гомотопічної та топологічної визначеності многовидів їхніми гомотопічними групами у наступному підрозділі.

Теорема 14.2 (Уайтхед). Неперервне відображення φ зв'язних многовидів задає їх гомотопічну еквівалентність (тобто має гомотопічно обернене) тоді й тільки тоді, коли індуковані гомоморфізми n -тих гомотопічних груп φ_* є ізоморфізмами для усіх натуральних n .

Доведення. Див. [11, с. 346-348, с. 439-441 перекладу].

■

14.2 Накриття та гомотопічні групи

Нехай тепер (X, Y, p) – деяке накривання та $y \in Y$. Нагадаємо, що за лемою 8.2 (що є, у свою чергу, частковим випадком теореми 10.1) для будь-якого неперервного відображення $f: I^n \rightarrow Y$ такого, що $f(0, \dots, 0) = y$, (зокрема, n -вимірний сфероїд у точці y) і будь-якої точки $x \in p^{-1}(y) \subset X$ існує єдине неперервне підняття $\tilde{f}: I^n \rightarrow X$ відображення f у накриваючий простір X (тобто $p \circ \tilde{f} = f$) таке, що $\tilde{f}(0, \dots, 0) = x$.

Лема 14.1. Нехай (X, Y, p) – накривання, $f: I^n \rightarrow Y$ – n -вимірний сфероїд у точці $y \in Y$, де $n \geq 2$, а $x \in p^{-1}(y)$. Тоді (єдине) підняття $\tilde{f}: I^n \rightarrow X$ відображення f у X таке, що $\tilde{f}(0, \dots, 0) = x$, є n -вимірним сфероїдом у точці x .

Доведення. За означенням, $f(\partial I^n) = \{y\}$. Оскільки при $n \geq 2$ межа ∂I^n лінійно зв'язна (чому?), для кожної точки $t \in \partial I^n$ існує шлях $h \in C(I, \partial I^n)$, що з'єднує $0 = (0, \dots, 0)$ і t . Тоді $\tilde{f} \circ h \in C(I, X)$ є шляхом, що з'єднує $\tilde{f}(0) = x$ і $\tilde{f}(t)$. Він є підняттям шляху $p \circ \tilde{f} \circ h = f \circ h = e_y$ з початком у x . Тому в силу єдиності у лемі 8.1, оскільки ще одним таким підняттям є e_x , $\tilde{f} \circ h = e_x$, зокрема, $\tilde{f}(t) = \tilde{f} \circ h(1) = x$. Таким чином, $\tilde{f}(\partial I^n) = \{x\}$, тобто $\tilde{f}$ – дійсно сфероїд у x .

■

Зауваження. Звичайно, вірне й обернене: якщо $\tilde{f}$ – сфероїд в x , то $f = p \circ \tilde{f}$ – сфероїд в y , причому це так для будь-якого натурального n .

Через лінійну зв'язність ∂I^n тут виникає суттєва різниця з випадком $n = 1$, де межа $\partial I = \{0, 1\}$ незв'язна і, як ми бачили у розділах 9–12, накривання петлі не обов'язково є петлею. Це, зокрема, грало ключову роль у доведенні та застосуваннях теореми 9.1.

Лема 14.2. Нехай (X, Y, p) – накривання, $f, g: I^n \rightarrow Y$ – n -вимірні сфероїди у точці $y \in Y$, $\tilde{f}, \tilde{g}: I^n \rightarrow X$ – підняття f і g відповідно у X , що є n -вимірними сфероїдами у точці $x \in p^{-1}(y)$. Тоді якщо $f \sim g$, то $\tilde{f} \sim \tilde{g}$.

Доведення. Тут при $n \geq 2$ підняття $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ сфероїдів f і g відповідно у X , що визначені умовами $\tilde{f}(0, \dots, 0) = \tilde{g}(0, \dots, 0) = x$, є сфероїдами у x в силу попередньої леми, але при $n = 1$, як було зазначено у зауваженні вище, це треба вимагати додатково. Також при $n = 1$ дана лема є просто лемою 8.3 про накриваючу гомотопію.

Доведення для $n \geq 2$ проведемо аналогічно до доведення леми 8.3. Нехай $F: I^n \times I \rightarrow Y$ — ∂I^n -гомотопія f і g . Ототожнивши $I^n \times I$ з I^{n+1} , застосуємо до F згадану вище лему 8.2: існує єдине підняття $\tilde{F}$ у X , тобто неперервне відображення $\tilde{F}: I^n \times I \rightarrow X$ таке, що $p \circ \tilde{F} = F$ і $\tilde{F}(0, \dots, 0) = x$. Оскільки ∂I^n лінійно зв'язна, для кожної $t \in \partial I^n$ існує шлях $h \in C(I, \partial I^n)$, що з'єднує $0 = (0, \dots, 0)$ і t . Тоді для кожного $s \in I$ відображення $h \times \{s\}: I \rightarrow I^n \times I: \tau \mapsto (h(\tau), s)$ буде за властивостями топології прямого добутку неперервним, тобто шляхом у $I^n \times I$, що з'єднує $(0, s)$ і (t, s) . У свою чергу, композиції $\tilde{F} \circ (h \times \{s\})$ і $F \circ (h \times \{s\})$ будуть шляхами в X та Y відповідно, перший з яких є підняттям другого: $p \circ \tilde{F} \circ (h \times \{s\}) = F \circ (h \times \{s\})$. Оскільки F є ∂I^n -гомотопією сфероїдів у точці y , а $h(I) \subset \partial I^n$, $F \circ (h \times \{s\}) = e_y$ для будь-якого $s \in I$. Зокрема, $\tilde{F} \circ (h \times \{0\})$ є підняттям $F \circ (h \times \{0\}) = e_y$ з початком у $\tilde{F}(h(0), 0) = \tilde{F}(0, \dots, 0) = x$. Оскільки ще одним таким підняттям є e_x , $\tilde{F} \circ (h \times \{0\}) = e_x$ за єдиністю у лемі 8.1. Зокрема, $\tilde{F}(h(1), 0) = \tilde{F}(t, 0) = x$. Тепер зауважимо, що шлях $s \mapsto \tilde{F}(t, s)$ у X (неперервність якого випливає з неперервності $\tilde{F}$) з початком у $\tilde{F}(t, 0) = x$ є підняттям шляху $s \mapsto p \circ \tilde{F}(t, s) = F(t, s)$, який знову ж збігається з e_y , бо F — ∂I^n -гомотопія сфероїдів в y (нагадаємо, що $t \in \partial I^n$). Тому так само $\tilde{F}(t, s) = x$ для будь-якого $s \in I$. Таким чином, $\tilde{F} \in \partial I^n$ -гомотопією відображень $\tilde{F}(\cdot, 0)$ і $\tilde{F}(\cdot, 1)$. Але вони є підняттями $p \circ \tilde{F}(\cdot, 0) = F(\cdot, 0) = f$ і $p \circ \tilde{F}(\cdot, 1) = F(\cdot, 1) = g$ відповідно такими, що $\tilde{F}(0, 0) = x = \tilde{f}(0)$ та $\tilde{F}(0, 1) = x = \tilde{g}(0)$ за умовою і доведеним вище, тому $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}$ і $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{g}$ за єдиністю підняття у лемі 8.2. Отже, сфероїди $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ дійсно є гомотопними.

■

Твердження 14.5. Нехай (X, Y, p) — накриття, $x \in X$ та $y = p(x) \in Y$. Тоді для будь-якого натурального $n \geq 2$ індукований гомоморфізм гомотопічних груп $p_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ є ізоморфізмом.

Доведення. Для будь-якого $[f] \in \pi_n(Y, y)$ та будь-якого сфероїда f з цього класу за лемою 8.2 існує єдине підняття $\tilde{f}: I^n \rightarrow X$ відображення f у X таке, що $\tilde{f}(0, \dots, 0) = x$. Тоді за лемою 14.1 це сфероїд у x , тобто $[\tilde{f}] \in \pi_n(X, x)$, і $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$. Отже, p_* сюр'єктивний.

Ін'єктивність p_* виводиться з леми 14.2 аналогічно до пункту 1. твердження 9.1 у випадку фундаментальної групи: для $[f] \in \pi_n(X, x)$ образ $p_*([f]) = [p \circ f]$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли сфероїд $p \circ f$ гомотопний e_y . Але, оскільки сфероїди f і e_x у точці x є підняттями $p \circ f$ і e_y відповідно, $f \sim e_x$ за згаданою лемою, тобто $[f] = 0$. Таким чином, ядро гомоморфізма p_* нульове, звідки й випливає його ін'єктивність, а отже ізоморфність.

■

Означення 14.6. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається *асферичним*, якщо всі його вищі гомотопічні групи нульові, тобто тривіальні: $\pi_n(X) = 0$ для будь-якого $n \geq 2$.

Наслідок 14.3. Якщо у топологічного простору Y існує накриття (X, Y, p) зі стяжним накриваючим простором X , то Y асферичний.

Доведення. Випливає з попереднього твердження і прикладу 14.3.

■

Зауваження. Умовам попереднього наслідку задовольняють, зокрема, простори Ейленберга – Маклейна, що обговорювалися наприкінці розділу 9: оскільки їхні універсальні накриваючі простори стяжні, вони асферичні. Для многовидів (більш загально, для клітинних просторів, див. розділ 19) справедливе й обернене: будь-який асферичний многовид є простором Ейленберга – Маклейна $K(G, 1)$ своєї фундаментальної групи G . Звідси та з твердження про однозначну визначеність просторів $K(G, 1)$ випливає, що у цьому випадку гомотопічні групи дійсно складають повну систему гомотопічних інваріантів: асферичні многовиди гомотопічно еквівалентні тоді й тільки тоді, коли їхні фундаментальні групи ізоморфні. Зокрема, зв'язний многовид, усі гомотопічні групи якого тривіальні, тобто однозв'язний та асферичний, повинен бути стяжним. З іншого боку, варшавське коло, що описане у [13, с. 164-165, с. 189-190 перекладу] є, як виявляється, прикладом нестяжного однозв'язного асферичного простору.

Більш того, *гіпотеза Бореля* стверджує, що компактні асферичні многовиди гомеоморфні тоді й тільки тоді, коли вони гомотопічно еквівалентні, а отже тоді й тільки тоді, коли їхні фундаментальні групи ізоморфні. Пор. з обговоренням теореми класифікації поверхонь після наслідку 13.4 та з узагальненою гіпотезою Пуанкаре у теоремі 13.2. Наразі гіпотеза Бореля доведена для окремих класів фундаментальних груп, зокрема для *нільпотентних* (див. [10, с. 190]), що включають абелеві. Тому компактний однозв'язний асферичний многовид може бути лише одноточковим.

Також можна визначити загальний *простір Ейленберга – Маклейна* $K(G, n)$ для групи G і натурального $n \geq 2$ як лінійно зв'язний топологічний простір X , для якого $\pi_n(X) \simeq G$, а решта гомотопічних груп тривіальні (при $n = 1$ ця умова, взагалі кажучи, слабша за опис $K(G, 1)$ з розділу 9, як було згадано вище). Зокрема, G повинна бути абелевою в силу теореми 14.1. Опис побудови $K(G, n)$ для $n \geq 2$, що для даної G завжди існує і єдиний з точністю до деякого відношення еквівалентності, що слабше за гомотопічну еквівалентність, на відміну від випадку $n = 1$, та інші деталі див. у [11, с. 365-366, с. 462-464 перекладу].

Приклад 14.4. Тор T^n , зокрема коло $T^1 = S^1$, є асферичним згідно з існуванням накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ з прикладу 7.4, стяжністю $\mathbb{R}^n$ і попереднім наслідком. Згадаємо також, що в силу цього та прикладу 9.1 він є (з точністю до гомотопічної еквівалентності) простором $K(\mathbb{Z}^n, 1)$. З гіпотези Бореля для випадку абелевих груп тоді випливає, що будь-який компактний асферичний многовид, фундаментальна група якого ізоморфна $\mathbb{Z}^n$, гомеоморфний T^n .

Приклад 14.5. В силу побудови універсального накриття у прикладі 9.5, його узагальнення з розв'язку вправи 9.2 і наслідку 14.3, букет кіл $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n \sim K(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, 1)$ асферичний. Як зауважено вище, він визначається цією властивістю та своєю фундаментальною групою з точністю до гомотопічної еквівалентності, але не до гомеоморфізма: площина без n точок, що є двовимірним многовидом, гомотопічно еквівалентна цьому простору (вправа 9.3), а отже має ізоморфні гомотопічні групи, але не гомеоморфна хоча б через некомпактність. Які з цих тверджень залишаються вірними для букета довільної кількості кіл?

Приклад 14.6. Згідно з твердженням 14.5 і прикладом 7.5, з існування накриття $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ дійсного проєктивного простору $\mathbb{R}P^n$ випливає, що $\pi_k(S^n, x) \simeq \pi_k(\mathbb{R}P^n, [x])$ для будь-яких натуральних n і $k \geq 2$ та усіх $x \in S^n$, де клас еквівалентності $[x] = p(x)$ – образ точки x під дією канонічної проєкції p . При $n \geq 2$ цей простір вже не буде асферичним, як побачимо далі.

Зауваження. Виявляється, що для обчислення вищих гомотопічних груп корисним є перехід від накрить до їх узагальнення – розшарувань. Так, *розшарування у сенсі Серра* можна визначити як трійку (X, Y, p) з топологічних просторів та неперервного відображення між ними, що має *властивість підняття гомотопії* для відображень з куль D^n довільної вимірності, аналогічну до властивості накрить з вправи 10.2 або [11,

с. 60, с. 82-83 перекладу]. Зокрема, таким є (S^3, S^2, p) , де $p: S^3 \rightarrow S^2$ – (класичне) відображення Хопфа, що буде описане далі у прикладі 14.9. Для розшарувань у сенсі Серра справедлива довга точна послідовність розшарування – певне алгебраїчне співвідношення між гомотопічними групами X , Y та шарів розшарування, тобто прообразів $p^{-1}(y)$ точок Y , яке дозволяє їх обчислювати. Див [11, с. 375-384, с. 474-486 перекладу]. З технікою точних послідовностей ми також зустрінемося у наступних розділах курсу.

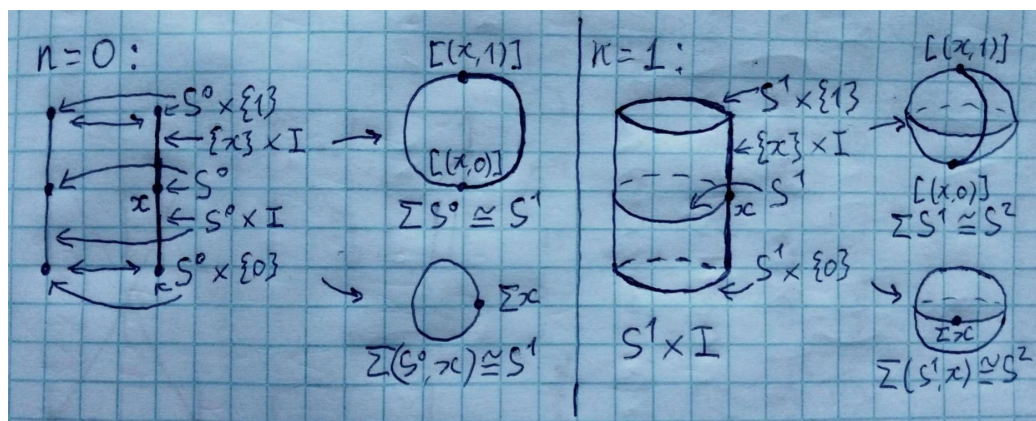
14.3 Надбудови та обчислення гомотопічних груп

Наступна конструкція, як побачимо, дозволить нам природним чином переходити від k -вимірних сфероїдів до $(k+1)$ -вимірних у іншому просторі, пов'язуючи їхні відповідні гомотопічні групи:

Означення 14.7. Надбудовою (англійською *suspension*, тобто "підвішування") над топологічним простором X зветься факторпростір $\Sigma X := X \times I / \sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ отожднює усі точки $X \times \{0\}$, усі точки $X \times \{1\}$ (в інший клас еквівалентності), і залишає решту точок $X \times I$ еквівалентними лише собі.

Надбудовою над топологічним простором X з відміченою точкою $x \in X$ зветься факторпростір $\Sigma(X, x) := X \times I / (\{x\} \times I) \cup (X \times \{0, 1\})$.

Вправа 14.4. Показати, що $\Sigma S^n \cong \Sigma(S^n, x) \cong S^{n+1}$ для будь-яких $n \in \mathbb{Z}_+$ і $x \in S^n$. Див. наступні ілюстрації для випадків $n = 0$ і $n = 1$:



Зауваження. Пор. цю конструкцію з конструкцією конуса (означення 12.2). Як бачимо з попередньої вправи і, скажімо, нестяжності S^1 (приклад 9.1), на відміну від конусів (див. твердження 12.1) надбудови не обов'язково стяжні.

Вправа 14.5. Визначити поняття конуса над простором з відміченою точкою за аналогією з надбудовою. Яким просторам гомеоморфні конуси над S^n і (S^n, x) ?

Зауваження. Нехай тепер $f: I^k \rightarrow X$ – k -вимірний сфероїд у точці x топологічного простору X для деякого натурального k . Зокрема, $f(\partial I^k) = \{x\}$. Розглянемо відображення $f \times id_I: I^{k+1} = I^k \times I \rightarrow X \times I: (t, s) \mapsto (f(t), s)$, що є неперервним як добуток неперервних за властивостями топології прямого добутку (перевірте це). Оскільки куб $I^{k+1} = I^k \times I$ є замкненою підмножиною $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, його межу можна знайти за формулою

$$\partial I^{k+1} = \partial(I^k \times I) = (\partial I^k \times I) \cup (I^k \times \partial I) = (\partial I^k \times I) \cup (I^k \times \{0, 1\})$$

(див., наприклад, задачу 20.13 у [3]). Тоді $(f \times id_I)(\partial I^{k+1}) \subset (\{x\} \times I) \cup (X \times \{0, 1\})$, тобто $f \times id_I$ відображає ∂I^{k+1} у ту саму підмножину, за якою здійснюється факторизація в конструкції надбудови $\Sigma(X, x)$. Позначимо через $p: X \times I \rightarrow \Sigma(X, x)$ канонічну проєкцію, що відповідає цій факторизації, а через $\Sigma x := p(x, 0)$ – спільний клас еквівалентності усіх точок підмножини $(\{x\} \times I) \cup (X \times \{0, 1\})$. Тоді відображення $\Sigma f := p \circ (f \times id_I): I^{k+1} \rightarrow \Sigma(X, x)$ неперервне як композиція неперервних і переводить ∂I^{k+1} у $\{\Sigma x\}$, тобто є $(k+1)$ -вимірним сфероїдом у точці Σx простору $\Sigma(X, x)$.

Означення 14.8. Нехай X – топологічний простір, а $f: I^k \rightarrow X$ – k -вимірний сфероїд у точці $x \in X$ для деякого натурального k . Описаний у попередньому зауваженні $(k+1)$ -вимірний сфероїд $\Sigma f := p \circ (f \times id_I): I^{k+1} \rightarrow \Sigma(X, x)$ у точці $\Sigma x \in \Sigma(X, x)$ зветься *надбудовою* над сфероїдом f . Відображення гомотопічних груп

$$\Sigma: \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma(X, x), \Sigma x): [f] \mapsto [\Sigma f]$$

зветься *гомоморфізмом надбудови*.

Твердження 14.6. Для будь-яких топологічного простору X , точки $x \in X$ й натурального k гомоморфізм надбудови Σ коректно визначений і є гомоморфізмом гомотопічних груп $\pi_k(X, x)$ та $\pi_{k+1}(\Sigma(X, x), \Sigma x)$.

Доведення. Нехай $[f] = [g]$, тобто сфероїди f і g гомотопні, а $F: I^k \times I \rightarrow X$ – відповідна ∂I^k -гомотопія. Тоді гомотопію між відображеннями $f \times id_I$ і $g \times id_I$ можна побудувати, просто домноживши F на id_I . Більш точно, визначимо гомотопію $G: I^{k+1} \times I = I^k \times I \times I \rightarrow X \times I$ умовою

$G(t_1, \dots, t_{k+1}, s) := (F(t_1, \dots, t_k, s), t_{k+1})$. За побудовою, це дійсно гомотопія $f \times id_I$ та $g \times id_I$, але не ∂I^{k+1} -гомотопія. А саме, в силу зауваження перед означенням 14.8,

$$\begin{aligned} G(\partial I^{k+1}, s) &= G((\partial I^k \times I) \cup (I^k \times \{0, 1\}), s) = G(\partial I^k \times I, s) \cup G(I^k \times \{0, 1\}, s) = \\ &= (F(\partial I^k, s) \times I) \cup (F(I^k, s) \times \{0, 1\}) \subset (\{x\} \times I) \cup (X \times \{0, 1\}) \end{aligned}$$

для будь-якого $s \in I$ за побудовою G і ∂I^k -зв'язаністю F . Тому $(p \circ G)(\partial I^{k+1}, s) = \{\Sigma x\}$ для кожного s , а отже $p \circ G: I^{k+1} \times I \rightarrow \Sigma(X, x)$ є ∂I^{k+1} -гомотопією сфероїдів $\Sigma f = p \circ (f \times id_I)$ і $\Sigma g = p \circ (g \times id_I)$, тобто $[\Sigma f] = [\Sigma g]$. Це демонструє коректність. Оскільки $\Sigma(f + g) = \Sigma f + \Sigma g$ за означеннями (перевірте це) для будь-яких сфероїдів f і g у x ,

$$\Sigma([f] + [g]) = \Sigma([f + g]) = [\Sigma(f + g)] = [\Sigma f + \Sigma g] = [\Sigma f] + [\Sigma g] = \Sigma([f]) + \Sigma([g])$$

для довільних гомотопічних класів $[f], [g] \in \pi_k(X, x)$ в силу означень гомотопічної групи та Σ . Таким чином, Σ – дійсно гомоморфізм.

■

Теорема 14.3 (Фрейденталю про надбудову). *Гомоморфізми надбудови гомотопічних груп сфер $\Sigma: \pi_k(S^n, x) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1}, \Sigma x)$ є ізоморфізмами для усіх натуральних n і k таких, що $k \leq 2n - 2$ або $k = n = 1$, і сюр'єкціями (епіморфізмами) для усіх натуральних n і k таких, що $k = 2n - 1$.*

Доведення. Зауважимо, що тут ми ототожнили $\pi_{k+1}(\Sigma(S^n, x), \Sigma x)$ з $\pi_{k+1}(S^{n+1}, \Sigma x)$, використавши вправу 14.4 і гомотопічну (а у даному випадку – топологічну) інваріантність гомотопічних груп. При цьому $\Sigma x \in S^{n+1}$ позначає точку, в яку $\Sigma x \in \Sigma(S^n, x)$ переходить при гооморфізмі з вправи 14.4. Доведення теореми див. у [11, с. 360-365, с. 456-462 перекладу]. Воно дане для узагальнення теореми й використовує клітинні простори та алгебраїчну техніку теорії гомологій. Строго кажучи, сама теорема Фрейденталю у випадку $k = n = 1$ гарантує лише сюр'єктивність. Ізоморфність тут виводиться окремо на [11, с. 361, с. 457 перекладу] з точної послідовності розшарування Хопфа (S^3, S^2, p) (див. приклад 14.9 далі та зауваження після прикладу 14.6).

■

Приклад 14.7. Застосуємо теорему Фрейденталю для обчислення k -тих гомотопічних груп сфер S^n при $k \leq n$ натуральних. Для спрощення позначень скористаємося лінійною зв'язністю S^n і не будемо вказувати точку, визначаючи гомотопічні групи з точністю до ізоморфізма, див.

зауваження після наслідку 14.1. Оскільки $k \leq 2k - 2$ при $k \geq 2$ (і враховуючи окремий випадок $k = n = 1$), маємо

$$\pi_n(S^n) \simeq \pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq \pi_3(S^3) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

для будь-якого натурального n , де остання ізоморфність випливає з прикладу 9.1. При $0 < k < n$, оскільки тоді $i < 2(n - k + i) - 2$ для усіх натуральних i , з теореми Фрейденталія випливає, що

$$\pi_k(S^n) \simeq \pi_{k-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq \pi_2(S^{n-k+2}) \simeq \pi_1(S^{n-k+1}) = \{0\}$$

в силу прикладу 6.2, бо $n - k + 1 \geq 2$. Тут $n \geq 2$. Таким чином, для довільного натурального n

$$\pi_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n; \\ \{0\}, & k < n. \end{cases}$$

Зокрема, для будь-якої точки $x \in S^n$ сфери $\pi_n(S^n, x) \simeq \mathbb{Z}$ — це група з однією твірною (див. приклад А.15). Якщо ототожнити n -вимірні сфери у x з їх "сферичними" версіями, тобто з неперервними відображеннями сфер S^n у S^n , що зберігають на місці x , як у зауваженні після означення 14.1, то у якості цієї твірної, як буде показано далі у прикладі 15.1, можна взяти гомотопічний клас тотожного відображення $id_{S^n}: S^n \rightarrow S^n$.

В силу гомотопічної інваріантності обчислених груп і прикладу 14.3, сфери S^n для натуральних n нестяжні, а S^n і S^m не є гомотопічно еквівалентними (зокрема гомеоморфними) при $n \neq m$, бо, скажімо, при $n < m$ маємо $\pi_n(S^m) = \{0\} \not\simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_n(S^n)$.

При $k > n$ теорема Фрейденталія дозволяє встановлювати ізоморфності між гомотопічними групами сфер, але сама по собі не дозволяє їх обчислювати, тут потрібні інші методи. Задача обчислення гомотопічних груп сфер довгий час посідала одне з центральних місць у алгебраїчній топології та все ще не є повністю розв'язаною. Див. деякі подальші відомості у [11, с. 339-340, 384-388 с. 430-431, 486-492 перекладу].

Вправа 14.6. Показати тривіальність групи $\pi_k(S^n)$ при $k < n$ безпосередньо (спробуйте узагальнити доведення прикладу 6.2).

Приклад 14.8. З попереднього прикладу, прикладів 14.6 і 9.2 та гомеоморфності $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ випливає, що

$$\pi_k(\mathbb{R}P^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n; \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1, n \geq 2; \\ \{0\}, & 2 \leq k < n. \end{cases}$$

При $k > n$ приклад 14.6 означає, що задача обчислення $\pi_k(\mathbb{R}P^n)$ зводиться до обчислення $\pi_k(S^n)$ (див. обговорення у попередньому прикладі).

Приклад 14.9. Аналогічно до конструкції дійсних проєктивних просторів у прикладі 18.5 курсу топології, n -вимірний комплексний проєктивний простір $\mathbb{C}P^n$ визначається як множина комплексних прямих, що проходять через початок координат простору $\mathbb{C}^{n+1}$, тобто як простір орбіт $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}_*$ з фактортопологією. Тут $\mathbb{C}^{n+1}$ очевидним чином ототожнюється з $\mathbb{R}^{2n+2}$, і на ньому розглядається стандартна топологія евклідового простору, а мультиплікативна група поля комплексних чисел $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (див. приклад А.3) діє множеннями, тому орбітами дійсно є комплексні прямі. Як у дійсному випадку, розглянемо одиничну сферу, тобто підмножину комплексних векторів $(z^1, \dots, z^{n+1})$ довжини $|z^1|^2 + \dots + |z^{n+1}|^2 = 1$ у $\mathbb{C}^{n+1}$. При ототожненні з $\mathbb{R}^{2n+2}$ їй відповідає сфера S^{2n+1} , а комплексним прямим – дійсні площини, що перетинають цю сферу по великих колах (чому?). Зауважимо, що, втім, не кожна дійсна площина, що проходить через початок координат, є комплексною прямою, а перетини з комплексними прямими розбивають S^{2n+1} у диз'юнктне об'єднання великих кіл (т. зв. *шарування Хопфа*). Ці кола є орбітами дії групи комплексних чисел модуля 1 на S^{2n+1} , де структура групи та дія визначаються комплексним множенням. У свою чергу, дана група є одиничним колом $S^1 \subset \mathbb{C}$. Таким чином, $\mathbb{C}P^n$ ототожнюється з простором орбіт S^{2n+1}/S^1 .

Вправа 14.7. Аналогічно до прикладу 18.5 курсу топології, задати явно відповідність між $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}_*$ і S^{2n+1}/S^1 (використавши комплексний варіант однорідних координат) і показати, що це гомеоморфізм.

Отже, далі вважаємо $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$. Канонічна проєкція $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ зветься *відображенням Хопфа*, а трійка $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, p)$ – *розшаруванням Хопфа*. Зі сказаного вище випливає, що *шари* цього розшарування, тобто прообрази точок $\mathbb{C}P^n$ – це великі кола, що утворюють шарування Хопфа. Оскільки розшарування Хопфа дійсно є розшаруванням у сенсі Серра (див. зауваження після прикладу 14.6 і посилання там), з його точної послідовності випливає, що для будь-яких натуральних n і $k \geq 3$ та довільної $x \in S^{2n+1}$ індукований гомоморфізм $p_*: \pi_k(S^{2n+1}, x) \rightarrow \pi_k(\mathbb{C}P^n, [x])$, де $[x] = p(x)$, є ізоморфізмом, а отже, зокрема, $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \simeq \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \simeq \mathbb{Z}$ за прикладом 14.7 (з урахуванням лінійної зв'язності $\mathbb{C}P^n$, що випливає з лінійної зв'язності S^{2n+1}). Зауважимо, що будь-який ізоморфізм групи з однією твірною на групу з однією твірною переводить твірну у твірну (чому?), отже p_* відображає твірну групи $\pi_{2n+1}(S^{2n+1}, x)$ у твірну. Якщо, як вказано у прикладі 14.7, в якості цієї твірної взяти гомотопічний клас $[id_{S^{2n+1}}]$ тотожного відображення сфери, то звідси випливає, що твірною $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n, [x])$

є $p_*([id_{S^{2n+1}}]) = [p \circ id_{S^{2n+1}}] = [p]$, тобто гомотопічний клас самого відображення Хопфа. Крім того, за допомогою точної послідовності розшарування Хопфа можна показати, що $\mathbb{C}P^n$ є, на відміну від $\mathbb{R}P^n$, однозв'язним.

При $n = 1$ область значень відображення Хопфа – комплексна проєктивна пряма $\mathbb{C}P^1$ – гомеоморфна сфері S^2 . Дійсно, діючи як у прикладах 18.5 і 29.4 курсу топології, опишемо $\mathbb{C}P^1$ за допомогою однорідних координат як множину класів еквівалентності (орбіт) $(z^1 : z^2) := [(z^1, z^2)]$ точок $\mathbb{C}^2$, розіб'ємо у диз'юнктне об'єднання підмножини $U := \{(z^1 : z^2) \mid z^2 \neq 0\}$ та точки $(1 : 0)$ і відобразимо U на $\mathbb{C}$ за допомогою відображення $\varphi: (z^1 : z^2) \mapsto \frac{z^1}{z^2}$. Далі використаємо обернену стереографічну проєкцію (див. приклад 14.5 курсу топології):

Вправа 14.8. Показати, що відображення $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (де $\mathbb{C}$ ототожнюється з $\mathbb{R}^2$ стандартним чином) та $\psi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$, що визначене умовами

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi_N^{-1} \circ \varphi(x), & x \in U; \\ N, & x = (1 : 0), \end{cases}$$

де $\varphi_N: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – стереографічна проєкція сфери відносно її північного полюса $N = (0, 0, 1)$, є гомеоморфізмами.

В комплексному аналізі $\mathbb{C}P^1$ (тобто комплексна площина, що "поповнена нескінченно віддаленою точкою") зветься в силу цієї гомеоморфності *сферою Рімана*. Ототожнюючи таким чином $\mathbb{C}P^1$ з S^2 , отримуємо класичне відображення Хопфа $p: S^3 \rightarrow S^2$. Зі сказаного вище випливає, що його гомотопічний клас (як "сферичного" тривимірного сфероїда) є твірною групи $\pi_3(S^2, y) \simeq \mathbb{Z}$ для довільної $y \in S^2$.

15 Застосування гомотопічних груп

Результати, що будуть отримані у цьому розділі, нагадують застосування зв'язності та теореми про проміжне значення у розділах 23 і 25 курсу топології. Якщо там ми використовували здебільшого зв'язність сфери S^n при $n \geq 1$ і незв'язність S^0 , то тут будемо головним чином спиратися на знайдені у прикладах 9.1 і 14.7 гомотопічні групи сфер.

15.1 Інваріантність вимірності. Нерухомі точки

Почнемо з найочевиднішого застосування інваріантів – доведень негомеоморфності:

Твердження 15.1. Простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ негомеоморфні для будь-яких цілих невід'ємних $n \neq m$.

Доведення. Якщо одна з вимірностей n або m дорівнює нулю, то інша додатна. Оскільки простір $\mathbb{R}^0$ одноточковий, негомеоморфність тут випливає з того, що ці множини не є рівнопотужними. Тому можемо вважати, що n і m натуральні. Припустимо, що існує гомеоморфізм $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ між цими просторами. Тоді обмеження f на підпростір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ буде гомеоморфізмом на підпростір $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ за наслідком 14.1 курсу топології. Зокрема, простори $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ повинні бути гомотопічно еквівалентними. Але згідно з прикладом 2.6 (точніше, його очевидним узагальненням на простір без довільної точки) вони гомотопічно еквівалентні сферам S^{n-1} і S^{m-1} відповідно. Якщо, скажімо, $n = 1$, то $m \geq 2$, $S^{n-1} = S^0$ незв'язна, а S^{m-1} зв'язна (і те ж можна сказати про $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$), що суперечить гомотопічній еквівалентності (або просто гомеоморфності цих просторів), і аналогічно при $m = 1$. Насправді цей випадок вже було розібрано у прикладі 23.11 курсу топології. Нарешті, при $n, m \geq 2$ сфери S^{n-1} і S^{m-1} не є гомотопічно еквівалентними, як було показано у прикладі 14.7, що теж дає потрібне протиріччя.

■

Вправа 15.1. Узагальнити попереднє твердження, продемонструвавши топологічну інваріантність вимірності многовида (пункт 7. твердження 29.2 курсу топології): якщо многовиди N та M гомеоморфні, то $\dim N = \dim M$. Суттєвою тут є лише властивість локальної евклідовості многовида.

Твердження 15.2. Простір $\mathbb{R}^n$ і його замкнений верхній напівпростір $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ негомеоморфні для будь-якого натурального n .

Доведення. Діємо аналогічно до попереднього доведення: якщо існує гомеоморфізм $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то його обмеження буде гомеоморфізмом $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$, зокрема, ці простори тоді гомотопічно еквівалентні. Але перша з цих підмножин $\mathbb{R}^n$ є зірчатою відносно будь-якої своєї внутрішньої точки (бо викинута точка 0 лежить на межовій гіперплощині), а отже стяжною (приклад 2.4) і зокрема лінійно зв'язною за твердженням 2.4, а друга гомотопічно еквівалентна S^{n-1} (знову ж за узагальненням прикладу 2.6), отже незв'язна при $n = 1$ (цей випадок було розібрано у прикладі 23.9 курсу топології) і нестяжна при $n \geq 2$ за прикладом 14.7, що приводить до протиріччя.

■

Зауваження. З доведення випливає, що $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}_+^m$ негомеоморфні й для будь-якої пари натуральних n і m (чому?). Також, звичайно, звідси випливає, що $\mathbb{R}^n$ негомоморфний будь-якому своєму замкненому напівпростору, а не тільки $\mathbb{R}_+^n$, бо аффінні перетворення є гомеоморфізмами (приклад 14.3 курсу топології).

Теорема 15.1 (Про барабан). *Не існує ретракції замкненої кулі D^n на її межу $S^{n-1} = \partial D^n$ для будь-якого натурального n .*

Доведення. При $n = 1$ ретракція була б сюр'єктивним неперервним відображенням зв'язного простору D^1 на незв'язний S^0 , що суперечить властивостям зв'язності. Тому можемо вважати, що $n \geq 2$. Припустимо супротивне: нехай існує ретракція $\varphi: D^n \rightarrow S^{n-1}$, тобто неперервне відображення таке, що $\varphi|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. Розглянемо відображення включення $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$. Оскільки тоді $\varphi \circ i = id_{S^{n-1}}$, $\varphi_* \circ i_* = (\varphi \circ i)_* = id_{\pi_{n-1}(S^{n-1}, x)}$ у будь-якій точці $x \in S^{n-1}$ за пунктами 2. і 3. твердження 14.3, де $i_*: \pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \rightarrow \pi_{n-1}(D^n, x)$ та $\varphi_*: \pi_{n-1}(D^n, x) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}, x)$ – індуковані гомоморфізми. З іншого боку, D^n – опукла підмножина $\mathbb{R}^n$, тобто стяжна (приклад 2.4), отже $\pi_{n-1}(D^n, x) = 0$ за прикладом 14.3. Тоді гомоморфізми i_* та φ_* , а отже й їх композиція $\varphi_* \circ i_*$ є тривіальними, тобто переводять будь-який гомотопічний клас у 0 (див. приклад А.7). Але тоді $\varphi_* \circ i_* \neq id_{\pi_{n-1}(S^{n-1}, x)}$, бо група $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \simeq \mathbb{Z}$ нетривіальна за прикладом 14.7, протиріччя.

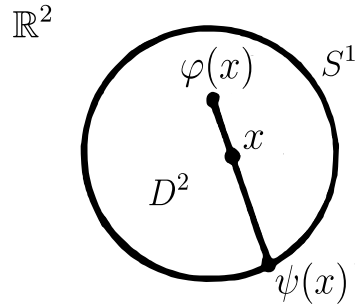
■

Теорема 15.2 (Брауера про нерухому точку). *Для будь-яких натурального n і неперервного відображення $\varphi: D^n \rightarrow D^n$ існує точка $x \in D^n$ така, що $\varphi(x) = x$.*

Доведення.

Припустимо, що це не так, і $\varphi(x) \neq x$ для будь-якої $x \in D^n$. Побудуємо тоді відображення $\psi: D^n \rightarrow S^{n-1}$, де $\psi(x)$ – перетин S^{n-1} з променем, що починається у точці $\varphi(x)$ (не включаючи саму цю точку) і проходить через точку x (див. ілюстрацію справа для $n = 2$). Тоді ψ коректно визначене (бо завжди $\varphi(x) \neq x$), неперервне в силу неперервності φ (перевірте це, виписавши його явне задання), і для будь-якої $x \in S^{n-1}$ маємо $\psi(x) = x$ за побудовою. Тому ψ – ретракція D^n на S^{n-1} , що суперечить теоремі про барабан.

■



Зауваження. Нагадаємо, що при $n = 1$ ми виводили це твердження у наслідку 25.1 курсу топології з теореми про проміжне значення (тобто також використовували зв'язність, цього разу для відрізка D^1). Виявляється, що твердження двох попередніх теорем еквівалентні, тобто з кожної з них можна вивести іншу:

Вправа 15.2. Вивести теорему про барабан із теореми Брауера.

Вправа 15.3. Показати, що якщо топологічний простір X гомеоморфний якомусь ретракту D^n , то він теж має *властивість нерухомої точки*: для будь-якого неперервного відображення $\varphi: X \rightarrow X$ існує точка $x \in X$ така, що $\varphi(x) = x$.

15.2 Теорема Борсука – Улама та її наслідки

Як і пара попередніх теорем, наступна теж має кілька еквівалентних формулювань. Наведемо те з них, що "підказує" перший крок доведення:

Теорема 15.3 (Борсук – Улам). *Для будь-якого натурального $n \geq 2$ не існує непарного неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^1$, тобто такого, що переводить діаметрально протилежні точки сфери в діаметрально протилежні точки кола: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для будь-якої $x \in S^n$.*

Доведення. Отже, припустимо, що таке відображення φ існує. Воно переводить пари діаметрально протилежних точок S^n у пари діаметрально протилежних точок S^1 , тому можна коректно визначити відображення $\psi: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^1$ відповідних дійсних проєктивних просторів умовою $\psi([x]) := [\varphi(x)]$, де через $[x] = \mathbb{Z}_2 \cdot x = \{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ позначено клас еквівалентності (орбіту) точки $x \in S^n$ у $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$, і так само для $\mathbb{R}P^1$: $[\varphi(x)] = \mathbb{Z}_2 \cdot \varphi(x) = \{\varphi(x), -\varphi(x)\}$ (див. приклад 7.5). Якщо $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ і $q: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ – відповідні канонічні проєкції, то за побудовою маємо $\psi \circ p = q \circ \varphi$, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}P^1 \end{array}$$

відповідних просторів та їхніх відображень. Зокрема, для будь-якої відкритої $U \subset \mathbb{R}P^1$ тоді $p^{-1}(\psi^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(q^{-1}(U))$. Це відкрита множина за неперервністю φ та q , а отже $\psi^{-1}(U)$ відкрита за побудовою фактор-топології. Таким чином, відображення ψ неперервне. Також з комутативності $\psi \circ p = q \circ \varphi$ та пункту 2. твердження 5.1 випливає рівність

$\psi_* \circ p_* = q_* \circ \varphi_*$, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^n, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(S^1, \varphi(x)) \\ p_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ \pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)]) \end{array}$$

фундаментальних груп та їхніх (індукованих) гомоморфізмів для довільної точки $x \in S^n$. Нехай тепер $f \in C(I, S^n)$ – шлях, що з'єднує якісь дві діаметрально протилежні точки x і $-x$, тоді $\varphi \circ f \in C(I, S^1)$ – шлях, що з'єднує $\varphi(x)$ і $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Оскільки канонічні проєкції переводять кожну з цих пар точок в одну, шляхи f і $\varphi \circ f$ є підняттями петель $p \circ f$ і $q \circ \varphi \circ f$ у накриваючі простори з початками x і $\varphi(x)$ відповідно. Тому згідно з прикладами 9.1, 9.2 і побудовою ізоморфізма у доведенні теореми 9.1 гомотопічні класи $[p \circ f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) \simeq \mathbb{Z}_2$ і $[q \circ \varphi \circ f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)]) \simeq \mathbb{Z}$ є нетривіальними елементами відповідних фундаментальних груп, оскільки підняття петель $p \circ f$ і $q \circ \varphi \circ f$ не є петлями (тепер квадратні дужки позначають ще й гомотопічний клас, як завжди). При цьому в силу комутативності

$$[q \circ \varphi \circ f] = [\psi \circ p \circ f] = \psi_*([p \circ f]).$$

Оскільки це нетривіальний елемент групи $\pi_1(\mathbb{R}P^1, [\varphi(x)]) \simeq \mathbb{Z}$, його квадрат також нетривіальний:

$$\begin{aligned} [e_{[\varphi(x)]}] &\neq [q \circ \varphi \circ f][q \circ \varphi \circ f] = \psi_*([p \circ f])\psi_*([p \circ f]) = \\ &= \psi_*([p \circ f][p \circ f]) = \psi_*([e_x]) = [e_{[\varphi(x)]}], \end{aligned}$$

за гомоморфізмом ψ_* і тим, що у групі $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) \simeq \mathbb{Z}_2$ квадрат будь-якого елемента тривіальний, протиріччя. Іншими словами, протиріччя виникає через те, що між групами, що ізоморфні $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Z}_2$, не існує нетривіальних гомоморфізмів; тому ψ_* повинен бути тривіальним і не може переводити нетривіальний елемент у нетривіальний. Зауважимо, що друга комутативна діаграма вище нам не знадобилася: ми навели її лише для кращого розуміння зв'язків між математичними об'єктами, що використовуються у доведенні.

■

Наслідок 15.1. Для будь-яких натурального $n \geq 2$ і непарного неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ (тобто такого, що $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для будь-якої $x \in S^n$), існує $x \in S^n$ така, що $\varphi(x) = 0$.

Доведення. Нехай це не так: $\varphi(x) \neq 0$ для будь-якої $x \in S^n$. Тоді коректно визначене $\psi: S^n \rightarrow S^1: x \mapsto \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ (де $|\cdot|$ – евклідова норма $\mathbb{R}^2$), що є неперервним в силу неперервності φ і непарним, бо φ непарне. Це суперечить теоремі Борсука – Улама.

■

Наслідок 15.2. Для будь-яких натурального $n \geq 2$ і неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ існує $x \in S^n$ така, що $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Доведення. Достатньо застосувати попередній наслідок до непарного неперервного $\psi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \varphi(x) - \varphi(-x)$.

■

Наслідок 15.3. Для жодного натурального $n \geq 2$ не існує вкладення сфери S^n у площину $\mathbb{R}^2$.

Доведення. Дійсно, будь-яке неперервне відображення $S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ не є ін'єктивним в силу попереднього наслідку.

■

Вправа 15.4 (Задача про сендвіч з шинкою). Нехай $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ – компактні вимірні підмножини. Показати, що тоді існує площина, що ділить кожну з множин A, B, C на дві частини рівного об'єму (розв'язок див. у [13, с. 159-160, с. 184-185 перекладу]).

Вправа 15.5. Вивести теорему Борсука – Улама з тверджень наслідків 15.1 і 15.2, показавши таким чином, що це її еквівалентні переформулювання.

Зауваження. Саме твердження наслідку 15.2 при $n = 2$ є класичним формулюванням теореми Борсука – Улама. Пор. попередні три наслідки і вправу з наслідками 25.2 – 25.4 і вправою 25.1 (задачами про млинці) курсу топології. Зокрема, аналогічно до зауваження після наслідку 25.3 там, з наслідку 15.2 можна вивести, що в будь-який момент часу на земній кулі існують дві діаметрально протилежні точки з однаковими температурою і атмосферним тиском (звичайно, якщо вважати їх неперервними функціями).

Вірне наступне узагальнення теореми Борсука – Улама: не існує непарного неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^m$ для будь-яких цілого невід'ємного m і натурального $n > m$. При $m = 0$ це впливає знову ж із властивостей зв'язності, бо будь-яке непарне відображення в S^0 сюр'єктивне, простір S^n зв'язний, а S^0 – ні (згадані результати курсу топології впливають саме звідси). При $m \geq 2$ цю теорему не вдається

довести з використанням лише гомотопічних груп. Тут потрібна інша алгебро-топологічна техніка (див. [11, с. 174-176, с. 224-226 перекладу]).

Вправа 15.6. Сформулювати і вивести з узагальнення теореми Борсука – Улама (див. попереднє зауваження) узагальнення наслідків 15.1, 15.2 (що будуть еквівалентними переформулюваннями), 15.3 та вправи 15.4.

15.3 Степінь відображення сфер

Як вже зазначалося, ізоморфність $\pi_n(S^n, x) \simeq \mathbb{Z}$ для будь-яких натурального n і точки $x \in S^n$ з прикладу 14.7 означає, що це група з однією твірною. У її якості в силу теореми Фрейдентала можна взяти результат $n - 1$ послідовних надбудов над твірною групи $\pi_1(S^1, x)$, тобто гомотопічним класом петлі, що один раз обходить коло (приклад 9.1). Будемо позначати цю твірну через $1 \in \pi_n(S^n, x)$, використовуючи адитивні позначення для усіх n . Тоді для будь-якого неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ його індукований гомоморфізм $\varphi_*: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \pi_n(S^n, \varphi(x))$ переводить 1 у якесь m -кратне твірної групи $\pi_n(S^n, \varphi(x))$ для $m \in \mathbb{Z}$, тобто у $m \cdot 1 := \underbrace{1 + \dots + 1}_m$ для $m > 0$, $m \cdot 1 := -\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{-m}$ для $m < 0$

або $0 \cdot 1 := 0$, якщо твірну $\pi_n(S^n, \varphi(x))$ теж позначити через 1 . Далі також будемо позначати $m \cdot 1$ просто через m для усіх цілих m .

Означення 15.1. Степенем неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ для довільного натурального n зветься $\deg \varphi := \varphi_*(1) \in \mathbb{Z}$, де гомоморфізм $\varphi_*: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \pi_n(S^n, \varphi(x))$ індукований φ у деякій точці $x \in S^n$, а $\varphi_*(1)$ належить до $\mathbb{Z}$ у сенсі попереднього зауваження.

Твердження 15.3. Нехай $\varphi, \psi: S^n \rightarrow S^n$ – неперервні відображення для деякого натурального n .

1. Степінь відображення φ коректно визначений, тобто не залежить від точки x .
2. Якщо φ та ψ гомотопні, то $\deg \varphi = \deg \psi$.
3. $\deg(\varphi \circ \psi) = \deg \varphi \deg \psi$.

Доведення. Тут будемо для усіх точок $x \in S^n$ позначати твірні гомотопічних груп $\pi_n(S^n, x)$ (що ізоморфні $\mathbb{Z}$ за прикладом 14.7), через 1 .

1. Щоб продемонструвати коректність, нам знадобиться наступне узагальнення леми 10.1 на гомотопічні групи:

Вправа 15.7. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, n натуральне, а шлях $f: I \rightarrow X$ з'єднує точки x та x' простору X . Позначимо $g := \varphi \circ f$, $y := \varphi(x)$, $y' := \varphi(x')$ (тоді шлях $g: I \rightarrow Y$ з'єднує точки y та y'). Нехай $\alpha: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, x')$ і $\beta: \pi_n(Y, y) \rightarrow \pi_n(Y, y')$ – ізоморфізми гомотопічних груп з твердження 14.1, що побудовані за шляхами f і g відповідно, а $\varphi_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ та $\varphi'_*: \pi_n(X, x') \rightarrow \pi_n(Y, y')$ – гомоморфізми фундаментальних груп, що індуковані відображенням φ у x та x' відповідно. Показати, що тоді

$$\varphi'_* \circ \alpha = \beta \circ \varphi_*,$$

тобто діаграма гомотопічних груп та їх гомоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_n(X, x') \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi'_* \\ \pi_n(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_n(Y, y') \end{array}$$

комутативна.

Отже, нехай $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ – неперервне, $x, x' \in S^n$. В силу лінійної зв'язності сфер, існує шлях f у S^n , що з'єднує ці дві точки, тому ми знаходимося в умовах попередньої вправи. Згадаємо ще раз, що ізоморфізм групи з однією твірною на групу з однією твірною переводить твірну у твірну. Нехай $\varphi_*(1) = m \in \mathbb{Z}$ у сенсі зауваження перед означенням 15.1, тобто $\varphi_*(1) = m \cdot 1$. Тоді у позначеннях попередньої вправи маємо

$$\varphi'_*(1) = \varphi'_*(\alpha(1)) = \beta(\varphi_*(1)) = \beta(m \cdot 1) = m \cdot \beta(1) = m \cdot 1$$

за ізоморфністю β та сенсом позначення $m \cdot 1$ (у передостанній рівності), тобто $\varphi'_*(1) = m$, що й демонструє незалежність означення степеня від точки.

2. Для гомотопних $\varphi, \psi: S^n \rightarrow S^n$ і довільної $x \in S^n$ за пунктом 4. твердження 14.3 маємо $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$, де $\varphi_*: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \pi_n(S^n, \varphi(x))$ та $\psi_*: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \pi_n(S^n, \psi(x))$ – відповідні індуковані гомоморфізми, а $\alpha: \pi_n(S^n, \varphi(x)) \rightarrow \pi_n(S^n, \psi(x))$ – ізоморфізм з твердження 14.1. Тоді

$$\deg \psi \cdot 1 = \psi_*(1) = \alpha(\varphi_*(1)) = \alpha(\deg \varphi \cdot 1) = \deg \varphi \cdot \alpha(1) = \deg \varphi \cdot 1$$

знову ж за властивостями α , отже дійсно $\deg \psi = \deg \varphi$.

3. Нехай $\varphi, \psi: S^n \rightarrow S^n$ неперервні, точка $x \in S^n$, а $\psi_*: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \pi_n(S^n, \psi(x))$ та $\varphi_*: \pi_n(S^n, \psi(x)) \rightarrow \pi_n(S^n, \varphi(\psi(x)))$ – індуковані гомоморфізми. З означення степеня і пункту 2. твердження 14.3 випливає, що

$$\begin{aligned} \deg(\varphi \circ \psi) \cdot 1 &= (\varphi \circ \psi)_*(1) = \varphi_*(\psi_*(1)) = \varphi_*(\deg \psi \cdot 1) = \\ &= \deg \psi \cdot \varphi_*(1) = \deg \psi \cdot (\deg \varphi \cdot 1) = \deg \varphi \deg \psi \cdot 1 \end{aligned}$$

за гомоморфічністю φ_* , звідки й отримуємо потрібне.

■

Зауваження. Пункт 2. попереднього твердження означає, що степінь є гомотопічним інваріантом, але вже не топологічного простору, а неперервного відображення. Також прикладами подібних конструкцій є інваріанти вузлів, зокрема група вузла з прикладу 13.3 та інші, що можна знайти у книгах [6] та [8].

Означення 15.1 степеня відображення сфер через гомотопічні групи є лише одним з кількох еквівалентних. Також степінь можна визначати через гомології (див. [11, с. 134, с. 174 перекладу]) чи когомології. Більш того, це поняття узагальнюється на неперервні відображення будь-яких двох компактних зв'язних орієнтованих многовидів однакової вимірності (орієнтованість тут є узагальненням відповідного поняття для поверхонь, з яким ми познайомилися у розділі 32 курсу топології), див. [11, с. 258, с. 328 перекладу]. Але для відображень сфер (а для згаданого узагальнення – у сфери) цей гомотопічний інваріант є повним (пор. з обговореннями після наслідків 13.4 і 14.3) в силу наступної теореми:

Теорема 15.4 (Хопфа про відображення сфер). *Неперервні відображення $\varphi, \psi: S^n \rightarrow S^n$ гомотопні тоді й тільки тоді, коли $\deg \varphi = \deg \psi$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність тут – це пункт 2. твердження 15.3.

$\Leftarrow$ Наведемо ідею доведення достатності, винесши його технічні деталі у вправи. Знову використаємо опис n -вимірних сфероїдів у довільній $x \in S^n$ як неперервних відображень сфер $S^n \rightarrow S^n$ таких, що $y \mapsto x$ для деякої фіксованої $y \in S^n$, та перенесення на множину їх класів $\{y\}$ -гомотопності структури групи $\pi_n(S^n, x)$ з вправи 14.1 (тут можна взяти й $y = x$). Таким чином, ототожнивши ці групи та враховуючи гомотопічну інваріантність, можна вважати, що степінь визначений для елементів $\pi_n(S^n, x)$.

Вправа 15.8. Показати, що побудоване таким чином відображення

$$\deg: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \mathbb{Z}: [f] \mapsto \deg f$$

є гомоморфізмом груп.

Більш того, цей гомоморфізм $\deg$ сюр'єктивний в силу вправи 15.12 нижче, побудову в якій нескладно провести так, щоб отримати потрібний нам сфероїд степеня k для кожного $k \in \mathbb{Z}$ (або просто використати наступну вправу). Оскільки при цьому $\pi_n(S^n, x) \simeq \mathbb{Z}$ за прикладом 14.7, $\deg$ є ізоморфізмом (чому?).

Вправа 15.9. Показати, що для будь-яких неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ та точок $x, y \in S^n$ існує неперервне $\widehat{\varphi}: S^n \rightarrow S^n$, що (вільно) гомотопне φ та переводить y в x . Для цього можна використати лінійну зв'язність S^n та побудову сфероїда з φ та шляху, що з'єднує x та $\varphi(y)$, аналогічно до конструкції у доведенні твердження 14.1.

Отже, нехай $\deg \varphi = \deg \psi$ для неперервних $\varphi, \psi: S^n \rightarrow S^n$. В силу попередньої вправи існують неперервні $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}: S^n \rightarrow S^n$ такі, що $\varphi \sim \widehat{\varphi}$, $\psi \sim \widehat{\psi}$ та $\widehat{\varphi}(y) = \widehat{\psi}(y) = x$, тобто $\widehat{\varphi}$ та $\widehat{\psi}$ є сфероїдами в x у вказаному вище сенсі. Оскільки $\deg \widehat{\varphi} = \deg \varphi = \deg \psi = \deg \widehat{\psi}$ за гомотопічною інваріантністю та умовою, з ін'єктивності $\deg: \pi_n(S^n, x) \rightarrow \mathbb{Z}$ випливає, що $\widehat{\varphi}$ та $\widehat{\psi}$ є $\{y\}$ -гомотопними, зокрема вільно гомотопними, а отже $\varphi \sim \widehat{\varphi} \sim \widehat{\psi} \sim \psi$, що й потрібно.

■

Зауваження. Також див. доведення згаданого вище узагальнення цієї теореми на випадок відображень з многовидів у сфери в [12, с. 121-131, с. 161-175 перекладу], де використовується вже не чисто алгебро-топологічна, а гладка (диференціально-топологічна) техніка. Означення узагальнення степеня відображення, що використовується у цих доведеннях (і теж еквівалентне нашому для відображень сфер) можна знайти на [12, с. 122, с. 163 перекладу].

Приклад 15.1. Оскільки тотожне відображення сфери S^n індукує тотожний ізоморфізм гомотопічних груп у кожній точці за пунктом 3. твердження 14.3, його степінь дорівнює 1. Це ж вірно взагалі для будь-якого гомеоморфізма S^n на себе (більш того, для будь-якого відображення, що має гомотопічно обернене) в силу твердження 14.4. З доведення теореми Хопфа тоді випливає (як саме?), що гомотопічний клас тотожного відображення є твірною групи $\pi_n(S^n, x)$, як згадувалося у прикладі 14.7.

Приклад 15.2. Будь-яке постійне відображення φ сфери S^n у точку $x \in S^n$ індукує за означенням тривіальний (нульовий) гомоморфізм гомотопічних груп для кожної $y \in S^n$. Дійсно, для будь-якого гомотопічного класу $[f] \in \pi_n(S^n, y)$ за означенням $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] = [e_x] = 0$. Оскільки це вірно зокрема для твірної, $\deg \varphi = 0$.

Вправа 15.10. Показати, що будь-яке неперервне відображення $\varphi: X \rightarrow S^n$ з довільного простору в сферу, що не є сюр'єктивним, гомотопне постійному (підказка: використати стереографічну проєкцію аналогічно до доведення у прикладі 6.2), отже $\deg \varphi = 0$ при $X = S^n$ за гомотопічною інваріантністю степеня та попереднім прикладом.

Приклад 15.3. Гомоморфізм, що індукований відображенням накриття $p: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^k$ (де $S^1 \subset \mathbb{C}$) для довільного натурального k , як було показано у прикладі 9.3, переводить твірну 1 фундаментальної групи кола у $k \cdot 1$, отже $\deg p = k$.

Приклад 15.4. Нехай

$$\varphi_n: S^n \rightarrow S^n: (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$$

задає симетрію сфери відносно гіперплощини $x^1 = 0$ простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Помітимо, що для будь-якого $(n-1)$ -вимірного сфероїда $f: I^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ у $x \in S^{n-1}$ (при $n \geq 2$) вірна рівність $\varphi_n \circ \Sigma f = \Sigma(\varphi_{n-1} \circ f)$, якщо ототожнити $\Sigma(S^{n-1}, x)$ з S^n в силу вправи 14.4, як у формулюванні теореми Фрейденталю. Тут беремо x , що зберігається під дією φ_{n-1} , скажімо, $x = (0, \dots, 0, 1)$. Зокрема, при такому ототожненні $\varphi_n([(x^1, \dots, x^n, t)]) = [(-x^1, \dots, x^n, t)]$ для будь-яких $(x^1, \dots, x^n) \in S^{n-1}$ і $t \in I$, де $[\cdot]$ позначає класи еквівалентності при відповідній факторизації $S^n \times I$. Тому дійсно (у позначеннях зауваження перед означенням 14.8)

$$\begin{aligned} (\varphi_n \circ \Sigma f)(t_1, \dots, t_n) &= (\varphi_n \circ p \circ (f \times id_I))(t_1, \dots, t_n) = \\ &= \varphi_n([(f(t_1, \dots, t_{n-1}), t_n)]) = [(\varphi_{n-1} \circ f(t_1, \dots, t_{n-1}), t_n)] = \\ &= p \circ ((\varphi_{n-1} \circ f) \times id_I)(t_1, \dots, t_n) = \Sigma(\varphi_{n-1} \circ f)(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

для будь-яких $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$, що демонструє потрібне. Як було зауважено перед означенням 15.1, у якості твірної 1 групи $\pi_n(S^n, \underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n-1} x) \simeq \mathbb{Z}$

в силу теореми Фрейденталю можна взяти гомотопічний клас $\underbrace{[\Sigma \dots \Sigma f]}_{n-1} = \underbrace{\Sigma \circ \dots \circ \Sigma}_{n-1}([f])$, де $[f]$ – твірна фундаментальної групи кола $\pi_1(S^1, x)$. Нехай, скажімо, петля f задається умовою $f(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$, $t \in I$ (див. приклад 9.1), тоді $x = (0, 1)$. Ітеративно застосовуючи отриману вище рівність, отримуємо наступне:

$$(\varphi_n)_*(1) = (\varphi_n)_* \left(\underbrace{[\Sigma \dots \Sigma f]}_{n-1} \right) = [\varphi_n \circ \underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n-1} f] = [\Sigma(\varphi_{n-1} \circ \underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n-2} f)] =$$

$$= [\Sigma \Sigma(\varphi_{n-2} \circ \underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n-3} f)] = \dots = [\underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n-1}(\varphi_1 \circ f)] = \underbrace{\Sigma \circ \dots \circ \Sigma}_{n-1}([\varphi_1 \circ f]).$$

При цьому $(\varphi_1 \circ f)(t) = (-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) = f(1-t) = \bar{f}(t)$ для усіх $t \in I$, тому остаточно маємо

$$(\varphi_n)_*(1) = \underbrace{\Sigma \circ \dots \circ \Sigma}_{n-1}([\bar{f}]) = \underbrace{\Sigma \circ \dots \circ \Sigma}_{n-1}(-[f]) = -\underbrace{\Sigma \circ \dots \circ \Sigma}_{n-1}([f]) = -1$$

за описом протилежного елемента у гомотопічній групі (теорема 14.1) і гомоморфією Σ (твердження 14.6). Таким чином, $\deg \varphi_n = -1$.

Так само можна показати, що симетрія

$$S^n \rightarrow S^n: (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, -x^i, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

відносно гіперплощини $x^i = 0$ має степінь -1 для будь-якого $i = \overline{1, n+1}$, або вивести це з гомотопності усіх симетрій відносно гіперплощин (доведіть її) та гомотопічної інваріантності степеня.

Приклад 15.5. Центральна симетрія сфери

$$\varphi: S^n \rightarrow S^n: (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (-x^1, \dots, -x^{n+1})$$

є композицією $n+1$ симетрій вигляду

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, -x^i, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

для $i = \overline{1, n+1}$, кожна з яких має степінь -1 за попереднім прикладом. Тому $\deg \varphi = (-1)^{n+1}$ в силу ітеративного застосування пункту 3. твердження 15.3.

Вправа 15.11. Показати, що якщо неперервне відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ не має нерухомих точок (тобто таких $x \in S^n$, що $\varphi(x) = x$), то воно гомотопне центральній симетрії, а отже $\deg \varphi = (-1)^{n+1}$ за попереднім прикладом та гомотопічною інваріантністю. Зокрема, з цього, прикладу 15.1 і гомотопічної інваріантності випливає, що якщо n парне, а відображення φ гомотопне тотожному, то воно має нерухому точку (і взагалі це так для будь-якого відображення, степінь якого не дорівнює $(-1)^{n+1}$).

Вправа 15.12. Побудувати неперервне відображення $S^n \rightarrow S^n$ степеня k для будь-якого цілого k , використавши приклад 15.3 і метод "послідовних надбудов" з прикладу 15.4.

Наслідок 15.4. Степінь відображення задає бієкцію між гомотопічними класами неперервних відображень $S^n \rightarrow S^n$ і $\mathbb{Z}$.

Доведення. Це випливає з теореми Хопфа (ін'єктивність) та попередньої вправи (сюр'єктивність).

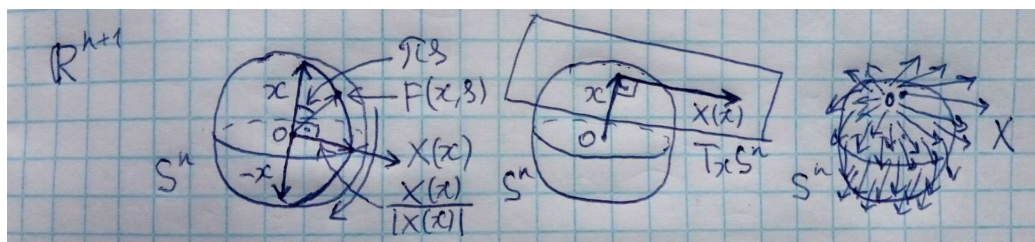
■

Зауваження. Тут йдеться про класи вільної, а не зв'язаної гомотопії, що складають $\pi_n(S^n, x)$, як у доведенні теореми Хопфа. Втім, звідси та з доведення теореми випливає, що вони знаходяться у бієктивній відповідності.

Теорема 15.5 (Про причісування їжака). *Нехай натуральне n парне, а X – неперервне векторне поле на сфері S^n , тобто неперервне відображення $X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ таке, що $X(x)$ ортогональний до x (відносно стандартного скалярного добутку на $\mathbb{R}^{n+1}$) для будь-якої $x \in S^n$. Тоді існує $x \in S^n$ така, що $X(x) = 0$.*

Доведення. Припустимо супротивне: існує неперервне відображення $X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ таке, що $X(x)$ ортогональний до x і $X(x) \neq 0$ для усіх $x \in S^n$. Тоді задамо відображення $F: S^n \times I \rightarrow S^n$ умовою $F(x, s) := \cos \pi s \, x + \sin \pi s \, \frac{X(x)}{|X(x)|}$ для $x \in S^n$, $s \in I$ (див. ілюстрацію знизу зліва). Воно коректно визначене, бо $X \neq 0$, дійсно є відображенням у S^n в силу ортонормованості пари $\left\{x, \frac{X(x)}{|X(x)|}\right\}$ для усіх $x \in S^n$ і неперервне, оскільки задається у $\mathbb{R}^{n+1}$ неперервними функціями (бо, зокрема, X неперервне). При цьому $F(x, 0) = x$ і $F(x, 1) = -x$ для будь-якого $x \in S^n$, тобто це гомотопія тотожного відображення і центральної симетрії S^n . Оскільки за прикладами 15.1 і 15.5 їхні степені в умовах теореми дорівнюють 1 та -1 відповідно, це суперечить гомотопічній інваріантності.

■



Зауваження. Умова ортогональності $X(x)$ і x означає, що вектор $X(x)$ належить до дотичної гіперплощини $T_x S^n$ сфери у кожній точці $x \in S^n$, як зображено зверху в центрі, тобто неперервне відображення X задає поле дотичних векторів на сфері – власне, *векторне поле* на ній (див. рисунок зверху справа). Попередню теорему також називають *теоремою про волохату кулю* (*hairy ball theorem*). Геометричний сенс обох

наведених назв достатньо наочний: згідно з теоремою, парновимірною сферичного їжака (він же куля) неможливо причесати! Для непарних n твердження теореми невірне: при $n = 2k - 1$ (для будь-якого натурального k) *поле Хопфа*, тобто відображення

$$X: S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}: (x^1, \dots, x^{2k}) \mapsto (-x^2, x^1, \dots, -x^{2k}, x^{2k-1})$$

є прикладом неперервного векторного поля на $S^n = S^{2k-1}$, що в жодній точці не дорівнює нулю (бо має постійну довжину 1).

Вправа 15.13. Показати, що поле Хопфа є дотичним до шарування Хопфа з прикладу 14.9, тобто що для кожної $x \in S^{2k-1}$ вектор $X(x)$ – дотичний до (єдиного) великого кола S^{2k-1} , що входить до шарування Хопфа та проходить через x , як до кривої у $\mathbb{R}^{2k}$. Це залишається вірним і для $k = 1$, якщо вважати саме коло S^1 єдиним шаром цього шарування.

Наведене у зауваженні після вправи 15.4 узагальнення теореми Борсука – Улама також можна вивести з наступного (нетривіального) факта про степені відображення: степінь будь-якого непарного неперервного відображення $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ непарний (до речі, аналогічне твердження про парні відображення та степінь теж вірне).

Вправа 15.14. Вивести узагальнену теорему Борсука – Улама з твердження про степінь непарного відображення сфери, що наведене у останньому зауваженні (див. [11, с. 176, с. 226 перекладу]).

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [4] або частині I книги [10] (гл. 1–3). Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення А.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \rightarrow G: (a, b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e . Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a, b) \mapsto a + b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад А.1. *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці, з очевидною груповою операцією: $ee = e$.

Приклад А.2. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад А.3. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових

елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад А.4. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n : $k \equiv l \pmod{n}$, тобто $k-l$ кратне n . Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід’ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n . Тоді коректно (чому?) визначена операція додавання $[k] + [l] := [k+l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем n* . Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

Приклад А.5. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \dots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу S_n* . При $n \geq 3$ вона є неабелевою.

Приклад А.6. Ще одним прикладом неабелевої (за умови $n \geq 2$) групи є *вільна група з n твірними* для натурального n . Так зветься фактор-множина множини скінченних слів, що складаються з символів $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ за відношенням еквівалентності, що задане умовами

$$W_1 a_i a_i^{-1} W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1 a_i^{-1} a_i W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого i та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Групова операція визначається за допомогою послідовного записування слів з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 буде клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. У подальшому будемо для спрощення позначень замість класів еквівалентності слів записувати самі слова у якості елементів групи (але пам’ятати, що вони представляють відповідний клас, тому, наприклад, $W_1 a_i a_i^{-1} W_2 = W_1 W_2$). Групова операція коректно визначена та асоціативна, а нейтральним елементом є порожнє слово (тобто його клас еквівалентності). Також неважко переконатися у тому, що обернений елемент до довільного слова $W = b_1 \dots b_m$ має вигляд

$$W^{-1} = (b_1 \dots b_m)^{-1} := (b_m)^{-1} \dots (b_1)^{-1},$$

де вважаємо $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Тому це дійсно група. Позначимо її через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а елементи $a_1, \dots, a_n$ (тобто слова з одного символу) будемо звати *твірними* (або *породжуючими елементами*) групи. При $n = 1$ ця група ізоморфна $\mathbb{Z}$ (див. доведення цього у прикладі А.15).

нижче), а при $n \geq 2$ дійсно є неабелевою, бо, наприклад, $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ за побудовою.

Означення вільної групи можна узагальнити, використовуючи замість скінченної $\{a_1, \dots, a_n\}$ множини твірних A довільної потужності, розглядаючи множини скінчених слів з цих твірних та обернених до них з тим самим відношенням еквівалентності та вводячи групову операцію так само. Потужність множини твірних A зветься *рангом* відповідної вільної групи та визначає її з точністю до ізоморфізма (див. далі означення А.3 та обговорення після нього). Подальшу інформацію див. у [4, с. 64-70].

Означення А.2. Відображення груп $\alpha: G \rightarrow H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це).

Приклад А.7. *Тривіальний* гомоморфізм $G \rightarrow H$ визначений для будь-яких груп G і H як постійне відображення, що переводить кожний елемент G у одиницю $e \in H$. Він очевидним чином задовольняє попередньому означенню.

Означення А.3. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо він є бієкцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha: G \rightarrow H$, то говорять, що група G *ізоморфна* групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом, зокрема гомоморфізмом, в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (перевірте це) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад А.8. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах А.3 і А.2 відповідно (перевірте це).

Означення А.4. *Прямим добутком* груп G_1 і G_2 зветься їх прямий декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з почленно визначеною груповою операцією: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2)$ для будь-яких $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$.

Перевірте, що така операція дійсно перетворює $G_1 \times G_2$ на групу і що прямий добуток груп асоціативний, тобто $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$ для будь-яких груп G_1 , G_2 і G_3 , тобто відповідні групові структури на $G_1 \times G_2 \times G_3$ збігаються. Більш того, ця конструкція очевидним чином узагальнюється на довільну скінченну кількість множників (див. також [4, с. 100-101]). Зауважимо крім того, що добуток будь-якої групи G на тривіальну групу ізоморфний G (запишіть відповідний ізоморфізм), а добуток абелевих груп абелевий в силу означень. Прямий добуток скінченної кількості абелевих груп $G_1, \dots, G_n$ ще називають їх *прямою сумою* і позначають $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Приклад А.9. Прямий добуток будь-якого натурального числа n копій групи $\mathbb{Z}$ (відповідно, $\mathbb{R}$) з прикладу А.2 будемо позначати через $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{R}^n$). У позначеннях прямої суми це виглядає як $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$ та $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_n$ відповідно. Таким чином, $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ – абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$.

Означення А.5. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G , якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення А.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Означення А.6. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо $aba^{-1} \in H$ для будь-яких $a \in G$ і $b \in H$.

Приклад А.10. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад А.1) та G , що є, очевидно, нормальними.

Усі підгрупи будь-якої абелевої групи є нормальними, бо в цьому випадку $aba^{-1} = b \in H$ для усіх $a \in G$, $b \in H$.

Приклад А.11. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу А.3, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу А.9 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою. Усі ці підгрупи нормальні в силу абелевості.

Приклад А.12. Будь-який елемент a довільної групи G визначає *спряження* (внутрішній автоморфізм)

$$C_a: G \rightarrow G: b \mapsto aba^{-1},$$

що є ізоморфізмом G на себе (тобто дійсно *автоморфізмом*). Зокрема, він переводить кожну підгрупу $H \subset G$ у *спряжену* до неї підгрупу

$$aHa^{-1} := C_a(H) = \{aba^{-1} \mid b \in H\}.$$

Перевірте ці твердження, друге з яких можна вивести з більш загального факту: будь-який ізоморфізм переводить підгрупи у підгрупи. Згідно з попереднім означенням, нормальні підгрупи G – це в точності ті, що зберігаються при усіх внутрішніх автоморфізмах, тобто ті підгрупи $H \subset G$, для яких $aHa^{-1} = H$ для будь-яких $a \in G$. Якщо G абелева, то всі її внутрішні автоморфізми є тотожними відображеннями. Див. також деяку подальшу інформацію у [4, с. 60-62].

Означення А.7. Нехай H – підгрупа групи G . Для кожного елемента $a \in G$ підмножини $aH := \{ab \mid b \in H\} \subset G$ та $Ha := \{ba \mid b \in H\} \subset G$ звуться відповідно *лівим* та *правим класами суміжності* a за H .

При цьому належність елементів групи до одного лівого або правого класу суміжності є відношенням еквівалентності (перевірте це, а також те, що ліві та праві класи суміжності – це орбіти деяких правої та лівої дій H на G відповідно, див. розділ 18 курсу топології). Таким чином, у загальному випадку виникають дві фактормножини G за цими відношеннями еквівалентності, між якими, втім, існує бієкція (яка саме?). Але якщо H нормальна, то можна говорити про однозначно визначену фактормножину:

Твердження А.1. Нехай H – нормальна підгрупа групи G . Тоді для кожного $a \in G$ його ліві та праві класи суміжності за H збігаються: $aH = Ha$. При цьому бінарна операція

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H: (aH, bH) \mapsto aH bH := abH$$

на множині G/H класів суміжності G за H коректно визначена і задає на цій фактормножині структуру групи.

Означення А.8. Множина G/H (одночасно лівих та правих) класів суміжності групи G за її нормальною підгрупою H з груповою структурою, що описана у попередньому твердженні, зветься *факторгрупою* G за H .

Факторгрупа будь-якої абелевої групи є абелевою за побудовою.

Приклад А.13. Факторгрупа довільної групи G за тривіальною підгрупою $\{e\}$ ізоморфна G , бо кожен клас суміжності складається з одного елемента, а за тривіальною підгрупою G – ізоморфна $\{e\}$, бо єдиним класом суміжності буде сама G (перевірте це, явно записавши відповідні ізоморфізми).

Означення А.9. Нехай G і H – деякі групи, а відображення $\alpha: G \rightarrow H$ – їх гомоморфізм. Його *ядром* зветься

$$\text{Ker } \alpha := \{a \mid \alpha(a) = e\} \subset G,$$

а *образом* –

$$\text{Im } \alpha := \alpha(G) = \{\alpha(a) \mid a \in G\} \subset H.$$

Тут і в наступному твердженні через e знову позначаємо одиниці обох цих груп.

Твердження А.2 (Властивості ядра та образу). *Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – деякий гомоморфізм груп.*

1. $\text{Ker } \alpha$ – нормальна підгрупа G і α – ін’єкція (мономорфізм) тоді й тільки тоді, коли $\text{Ker } \alpha = \{e\}$;
2. $\text{Im } \alpha$ – підгрупа H і α – сюр’єкція (епіморфізм) тоді й тільки тоді, коли $\text{Im } \alpha = H$;
3. Відображення

$$G/\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha: a \text{Ker } \alpha \mapsto \alpha(a)$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Таким чином, пункт 3. цього твердження (що називають ще *першою теоремою Ньотер про ізоморфізм*) означає, що $G/\text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha$ для будь-якого гомоморфізма $\alpha: G \rightarrow H$.

Приклад А.14. Для натурального n розглянемо відображення

$$\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n: k \mapsto [k]$$

абелевих груп з прикладів А.2 та А.4 відповідно. Оскільки

$$\alpha(k + l) = [k + l] = [k] + [l] = \alpha(k) + \alpha(l)$$

для будь-яких $k, l \in \mathbb{Z}$ за побудовою структури групи на $\mathbb{Z}_n$, α є гомоморфізмом. Він сюр'єктивний, бо $[k] = \alpha(k)$ для будь-якого $[k] \in \mathbb{Z}_n$, тобто $\text{Im } \alpha = \mathbb{Z}_n$. Ядро цього гомоморфізма має вигляд

$$\text{Ker } \alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = [0]\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 \pmod{n}\} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\},$$

тобто складається з усіх кратних n цілих чисел. Позначимо цю підмножину через $n\mathbb{Z}$. Неважко безпосередньо перевірити, що це нормальна (хоча б у силу абелевості) підгрупа $\mathbb{Z}$, як і повинно бути за пунктом 1. попереднього твердження. Тоді за його ж пунктом 3. маємо

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n,$$

де ізоморфізм задається умовою $k + n\mathbb{Z} \mapsto \alpha(k) = [k]$ для кожного $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (де використовуємо адитивні позначення також і для класів суміжності).

Якщо гомоморфізм груп $\alpha: G \rightarrow H$ ін'єктивний, то з прикладу A.13 і пунктів 1. та 3. твердження A.2 маємо

$$G \simeq G/\{e\} = G/\text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha = \alpha(G),$$

більш того, відповідним ізоморфізмом $G \rightarrow \alpha(G)$ буде саме α (чому?), що неважко перевірити й безпосередньо.

Наслідок A.1. *Будь-який ін'єктивний гомоморфізм груп є ізоморфізмом на свій образ.*

Продовжимо розмову про вільну групу з n твірними $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, що була розпочата у прикладі A.6, використовуючи ті ж позначення, що там. Нехай тепер $\{r_1, \dots, r_m\}$ – якась скінченна множина слів, що складаються з тих же символів $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$. Змінимо наше відношення еквівалентності на множині усіх скінченних слів, додавши до перелічених у прикладі A.6 умови

$$W_1 r_j W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1 r_j^{-1} W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого $j = \overline{1, m}$ та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Тут обернене слово r_j^{-1} визначається за звичними правилами: якщо $r_j = b_1 \dots b_k$, то $r_j^{-1} = (b_k)^{-1} \dots (b_1)^{-1}$, де $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Далі розглядаємо фактормножину множини слів саме за таким відношенням еквівалентності й так само у якості елементів цієї множини записуємо самі слова. Введемо на отриманій таким чином фактормножині групову

операцію як у випадку вільної групи, послідовно записуючи слова з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 є клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. Перевірте, що введена таким способом операція коректно визначена й асоціативна. Нейтральним елементом є клас еквівалентності порожнього слова, який ми далі позначатимемо через e . Наприклад, $a_i a_i^{-1} = e$ або $r_j = e$ для будь-яких i та j . Обернені елементи можна знаходити так, як вказано вище для r_j (чому?). Тому це дійсно група.

Означення А.10. Описану вище групу будемо називати *групою з твірними* $a_1, \dots, a_n$ та *співвідношеннями* $r_1, \dots, r_m$. Вона позначається через $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Якщо якась група G ізоморфна $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, то будемо говорити, що вона має опис у термінах твірних $a_1, \dots, a_n$ та співвідношень $r_1, \dots, r_m$ (або *копредставлення* $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$).

Співвідношення часто для наочності записують у вигляді рівностей: $r_j = e$ замість просто r_j . Також часто частину співвідношення переносять вправо: якщо $r_j = c_j d_j^{-1}$ для деяких слів c_j і d_j , то пишуть $c_j = d_j$ замість r_j . З опису відношення еквівалентності випливає, що у цьому випадку

$$W_1 c_j W_2 = W_1 c_j d_j^{-1} d_j W_2 = W_1 r_j d_j W_2 = W_1 d_j W_2$$

для будь-яких слів W_1 і W_2 . Також у подальшому будемо використовувати очевидні спрощені позначення для степенів: писати a_i^k замість $\underbrace{a_i \dots a_i}_k$

і a_i^{-k} замість $\underbrace{a_i^{-1} \dots a_i^{-1}}_k$ для усіх натуральних k та будь-якого i . Під a_i^0

при цьому будемо розуміти одиницю групи e . Множина співвідношень не визначена групою однозначно: до їх списку без зміни групи можна додавати, наприклад, $a_i a_i^{-1}$ для довільних i та інші вирази, що є одиничними за побудовою. На практиці список співвідношень намагаються зробити мінімальним. Встановлення ізоморфності або неізоморфності двох груп, що задані твірними та співвідношеннями, є у загальному випадку доволі складною комбінаторною задачею (при цьому множина твірних теж не визначена класом ізоморфності групи однозначно).

Приклад А.15. Група з твірними $a_1, \dots, a_n$ і без співвідношень за побудовою є просто вільною групою $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ з твірними $a_1, \dots, a_n$. Зокрема, "групою без твірних" вважатимемо тривіальну: $\langle \rangle = \{e\}$.

Тепер розглянемо групу з однією твірною $\langle a \rangle$. Її довільний елемент з урахуванням введених вище позначень однозначно представляється

у вигляді a^n для деякого $n \in \mathbb{Z}$, який можна отримати, "приводячи подібні" літери a і a^{-1} , якщо вони стоять поруч (чому таке представлення однозначне?). При цьому $a^n a^m = a^{n+m}$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$. Перевірте це, розглянувши різні варіанти знаків у цілих чисел n, m і $n + m$. Тому бієктивне відображення $\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Z}: a^n \rightarrow n$ є гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом, груп: $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Приклад А.16. Розглянемо групу $\langle a \mid a^n \rangle$, де $n \geq 2$ натуральне (при $n = 0$ в силу наших домовленостей про позначення це $\langle a \rangle$, а при $n = 1$ – тривіальна група $\{e\}$). Аналогічним до $\langle a \rangle$ чином встановлюємо, що довільний елемент цієї групи має вигляд a^i для деякого $i = \overline{0, n-1}$. Дійсно, спочатку, як у попередньому прикладі, отримаємо вираз a^j для деякого цілого j , а потім, враховуючи рівність $a^n = e$, перепишемо його як a^i , де i – залишок від ділення j на n . І взагалі, $a^i = a^j$ тоді й тільки тоді, коли $i \equiv j \pmod n$. Оскільки при цьому $a^i a^j = a^{i+j}$, відображення $\langle a \mid a^n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_n: a^i \rightarrow [i]$ у групу $\mathbb{Z}_n$ з прикладу А.4 є бієктивним (чому?) гомоморфізмом, тобто ізоморфізмом, груп, і $\langle a \mid a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Групи з однією твірною, що розглядалися у цьому та попередньому прикладах, тобто (з точністю до ізоморфізма) нескінченна $\mathbb{Z}$ та скінченні $\mathbb{Z}_n$, звуться ще *циклічними* (див. також [4, с. 30-32]).

Приклад А.17. Єдине співвідношення групи $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ згідно з домовленостями вище зручно буде переписати у вигляді $ab = ba$. Звідси, переходячи до обернених елементів, отримаємо $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, а домножаючи зліва і справа на a^{-1} і b^{-1} – $ba^{-1} = a^{-1}b$ і $b^{-1}a = ab^{-1}$ відповідно. Враховуючи ці співвідношення, у довільному слові з символів a, b, a^{-1}, b^{-1} можна їх переставляти, допоки не отримаємо $a^n b^m$ для деяких $n, m \in \mathbb{Z}$, й різні пари n, m відповідають різним елементам групи (чому?). Крім того, в силу тих же співвідношень $a^n b^m a^k b^l = a^{n+k} b^{m+l}$ для будь-яких $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. Тому відображення $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2: a^n b^m \rightarrow (n, m)$ у групу $\mathbb{Z}^2$ з прикладу А.9 є бієктивним гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом, груп: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Аналогічним способом можна описати у термінах твірних та співвідношень групу $\mathbb{Z}^n$ і для довільного n (зробіть це). Таким чином, додавання співвідношень вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ дозволяють перетворити вільну групу на абелеву. Тому $\mathbb{Z}^n$ ще називають *вільною абелевою групою з n твірними*.

Приклад А.18. Для будь-якої скінченної групи G розглянемо групу $\langle a, a \in G \mid abc^{-1}, a, b, c \in G: ab = c \rangle$, твірними якої є елементи G , а співвідношення визначені таблицею множення G (тут у рівності $ab = c$ елементи a і b множаться у G). Покажіть, що відображення $a \mapsto a$ задає ізоморфізм G на описану вище групу. Таким чином, будь-яку скінченну групу можна описати у термінах твірних та співвідношень, хоча це

буде, взагалі кажучи, доволі неекономний опис. Більш того, якщо у означенні А.10 дозволити довільну кількість твірних та співвідношень, зберігаючи вимогу на скінченну довжину слів (аналогічно до вільної групи з довільною множиною твірних у прикладі А.6), так можна описати взагалі будь-яку групу. Перевірте, що ваше доведення залишається вірним і для цього випадку.

Твердження А.3. *Нехай N – найменша за включенням нормальна підгрупа групи $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, що містить її елементи $s_1, \dots, s_l$ (у такому випадку говорять, що N породжена $s_1, \dots, s_l$). Тоді відображення*

$$G/N \rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l \rangle: W N \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Тут нормальна підгрупа N , що породжена $s_1, \dots, s_l$, завжди існує (покажіть це; пор. також з доведенням твердження А.4 нижче) і єдина як найменший елемент частково впорядкованої множини (якої?). Іншими словами, факторизація G за N і дописування $s_1, \dots, s_l$ у список співвідношень G дають ізоморфні групи. Подальшу інформацію та приклади опису груп у термінах твірних та співвідношень можна знайти, наприклад, у [4, с. 70-72] і [10, с. 23-28, 215-221].

Один зі способів "прояснення" структури групи, зокрема, такої, що задана твірними та співвідношеннями – це перехід до пов'язаної з нею абелевої групи, що описаний у наступному означенні:

Означення А.11. *Нехай G – деяка група. Комутатором двох елементів $a, b \in G$ зветься $aba^{-1}b^{-1} \in G$. Комутантом (або першою похідною підгрупою) групи G зветься підгрупа $G' \subset G$, що породжена усіма комутаторами, тобто найменша за включенням підгрупа G , що містить вирази $aba^{-1}b^{-1}$ для усіх $a, b \in G$. Факторгрупа G/G' зветься абеліанізацією G .*

Твердження А.4. *Факторгрупа G/G' коректно визначена (тобто підгрупа G' коректно визначена і є нормальною) та абелева.*

Доведення. З опису у означенні випливає, що G' складається з усіх можливих добутоків елементів вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ (і обернених до них, але обернені мають той же вигляд), тобто його довільний елемент дорівнює $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$. Це підгрупа G (чому?), і будь-яка підгрупа, що містить усі комутанти, повинна містити й усі добутки такого вигляду, тобто включати всю G' . Тому вона і є найменшою за включенням з такою

властивістю (єдиною такою як найменший елемент частково впорядкованої множини). При цьому для будь-якого $c \in G$

$$ca_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}c^{-1} = (ca_1c^{-1})(cb_1c^{-1})(ca_1c^{-1})^{-1}(cb_1c^{-1})^{-1} \dots \\ \dots (ca_kc^{-1})(cb_kc^{-1})(ca_kc^{-1})^{-1}(cb_kc^{-1})^{-1} \in G',$$

що й демонструє нормальність G' .

За означенням факторгрупи G/G' , довільний її елемент – це суміжний клас aG' , де $a \in G$, а комутатор будь-яких двох елементів дорівнює

$$aG' bG' (aG')^{-1} (bG')^{-1} = aba^{-1}b^{-1}G' = eG',$$

бо $aba^{-1}b^{-1} \in G'$ (тут $a, b \in G$). Зауважимо, що, як і завжди у факторгрупі, eG' – це нейтральний елемент G/G' . Тобто $aG' bG' = bG' aG'$ для будь-яких $aG', bG' \in G/G'$, що й означає абелевість G/G' .

■

Більш того, G' – це найменша за включенням нормальна підгрупа, факторизація за якою абелева, що теж однозначно її характеризує (перевірте самостійно або див. [4, с. 75-76]). Зрозуміло також, що $G' = \{e\}$ тоді й тільки тоді, коли G абелева, і у цьому випадку абеліанізація G збігається з нею самою (точніше, канонічно ізоморфна). Крім того, якщо групи ізоморфні, то їхні комутанти та абеліанізації також ізоморфні (перевірте це).

Зауважимо, що у загальному випадку, щоб побудувати нормальну підгрупу N групи G , що породжена певною підмножиною елементів G , як у твердженні А.3, нам потрібно розглядати усі можливі добутки не лише цих елементів та обернених до них, а й їхніх спряжень з довільними елементами G .

Нехай $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. З узагальнення твердження А.3 на випадок, коли підгрупа може бути породжена нескінченним числом елементів (переконайтеся у тому, що таке узагальнення теж справедливе) випливає, що

$$G/G' \simeq \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, W_1W_2W_1^{-1}W_2^{-1}, W_1, W_2 \in G \rangle.$$

Серед комутаторів $W_1W_2W_1^{-1}W_2^{-1}$ є комутатори твірних $a_ia_ja_i^{-1}a_j^{-1}$ для $i, j = \overline{1, n}$. Більш того, решта співвідношень-комутаторів випливає з них. Дійсно, якщо твірні комутують, то, аналогічно до прикладу А.17, ми можемо довільним чином переставляти літери у будь-якому слові, зокрема, міняти підслова місцями, тоді $W_1W_2W_1^{-1}W_2^{-1} = W_1W_1^{-1}W_2W_2^{-1} = e$ для будь-яких W_1 і W_2 з G . Тому ці зайві співвідношення можна прибрати, і таким чином отримаємо наступне:

Наслідок А.2. Якщо $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, то

$$G/G' \simeq \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, n} \rangle.$$

Цю ізоморфність можна перевірити й безпосередньо, показавши, що відображення

$$G/G' \rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, n} \rangle: W/G' \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп (зробіть це). Зокрема, як згадано у прикладі А.17 та більш детально показано у доведенні наслідку 13.4, абеліанізація перетворює вільну групу з n твірними на вільну абелеву групу з n твірними, що ізоморфна $\mathbb{Z}^n$.

Література

- [1] О.А. Борисенко. Дифференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.
- [2] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1995.
- [3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.
- [4] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005.
- [5] С.М. Львовский. Лекции по комплексному анализу. М.: МЦНМО, 2009.
- [6] C.C. Adams. The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots. AMS, 2004.
- [7] M.A. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.
- [8] R.H. Crowell, R.H. Fox. Introduction to Knot Theory. Springer, 2012. Переклад: Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
- [9] E.D. Demaine, M.L. Demaine, Y.N. Minsky, J.S.B. Mitchell, R.L. Rivest, M. Pătraşcu. Picture-Hanging Puzzles. Preprint, arXiv:1203.3602, April 26 2014.
- [10] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.
- [11] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. Переклад: А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.
- [12] M.W. Hirsch. Differential Topology. Springer, 1976. Переклад: М. Хирш. Дифференциальная топология. М. Мир, 1979.
- [13] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.
- [14] J.M. Lee. Introduction to Topological Manifolds. Second Edition. Springer, 2011.

- [15] W.S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction. Springer, 1991. Переклад у: У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.
- [16] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2020.
- [17] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.
- [18] W.P. Thurston. Three-dimensional Geometry and Topology. Volume 1. Edited by S. Levy. Princeton University Press, 1997. Переклад: У. Тёрстон. Трёхмерная геометрия и топология. Под редакцией С. Леви. М.: МЦНМО, 2001.

Частина 2. Гомології

Див. наступні аркуші.

16. Топології та коомології алгебраїчних комплексів

Топології (теорії топологій та коомологій) - це цілий клас алгебраїчних ^{гомотопічних} інваріантів, що ставлять у відповідність топ. простору X (можливо, з певного класу) набір абелевих груп (кілець, модулів, векторних просторів...). Вони бувають за певними спільними правилами та мають спільні властивості, з якими потрібно познайомитися спочатку.

def. 16.1.

Ланцюговий (фігн., коаланцюговий)

комплекс зв. набір абелевих груп $\{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$) та їх гомоморфізмів $\{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$) таких, що $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ ($d^{k+1} \circ d^k = 0$) $\forall k \in \mathbb{Z}$. Будемо позначати $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($C^* = \{C^k, d^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$):

$$C_* : \dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \rightarrow \dots$$

$$C^*: \quad \dots \xrightarrow{d^{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \xrightarrow{d^{k+2}} \dots$$

$C_k(C^*)$ зветься k -мою групною ланцюгів (келанцюгів) (або (ко)ланцюговим групним комплексом, $\partial_k(d^k)$ - k -мим ^{(ко)гранничним} гомоморфізмом, $k \in \mathbb{Z}$. Комплекс зветься скінченним, якщо $C_k \neq \{0\}$ ($C^k \neq \{0\}$) лише для скінченного числа k . Комп. зв. невід'ємним, якщо $C_k = \{0\}$ ($C^k = \{0\}$) для всіх $k < 0$ (ан-но можна визначити додатний, недодатний ...).

Рем. Далі всюди за замовчуванням - саме такі позначення.

Лем. 16.2. k -мою групною (ко)циклів (ко)ланцюгового комплексу $C_*(C^*)$ зветься $Z_k(C_*) := \ker \partial_k$ ($Z^k(C^*) := \ker d^k$). k -мою групною (ко)гранницею $C_*(C^*)$ зв. $B_k(C_*) := \text{Im } \partial_{k+1} = \partial_{k+1}(C_{k+1})$ ($B^k(C^*) := \text{Im } d^{k+1} = d^{k+1}(C^{k+1})$), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Рем. За власт. $\ker$ та Im , $Z_k(C_*), B_k(C_*) \subset C_k(Z^k(C^*),$

$B^k(C^*) \subset C^k$ - підгрупи $\forall k$. Оскільки $d^k \circ d^{k+1} = 0$
 ($d^k \circ d^{k+1} = 0$), $B_k(C^*) \subset Z_k(C^*)$ ($B^k(C^*) \subset Z^k(C^*)$) і
 $\in$ підгрупами в нас $\forall k$. Оскільки групи абелеві, які
 є підгрупами нормальні.

def. 16.3. k -тою групою (ко)гомологій (ко)ланцюгового комплексу
 $C_*(C^*)$ для $k \in \mathbb{Z}$ звється

$$H_k(C_*) := Z_k(C_*) / B_k(C_*) \quad (H^k(C^*) := Z^k(C^*) / B^k(C^*)).$$

Рем. За побудовою, це теж абелеві групи. Дати зовнішню
 про ланцюгові комплекси, на коланцюгові це все пере-
 носиться зрозумілим чином.

def. 16.4. Морфізми ланцюгових комплексів $C_*^1 = \{C_k^1, d_k^1\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 $\subset C_*^2 = \{C_k^2, d_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ зв. набір гомоморфізмів $f_* = \{f_k: C_k^1 \rightarrow$
 $\rightarrow C_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (будемо писати $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$) таких, що $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\partial_k^2 \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^1$ тобто діаграма (взаємні компати, нескінченна)

$$\begin{array}{ccccccc} & \partial_{k+1}^1 & & \partial_k^1 & & \partial_{k-1}^1 & \\ & \rightarrow & C_k^1 & \rightarrow & C_{k-1}^1 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\ & \partial_{k+1}^2 & & \partial_k^2 & & \partial_{k-1}^2 & \\ & \rightarrow & C_k^2 & \rightarrow & C_{k-1}^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

є комутативною. Віт. Так, комплекси і морфізми — це теж категорія!

Лем. 16.1. Нехай $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ — морфізм ланцюгових комплексів. Тоді $f_k(Z_k(C_*^1)) \subset Z_k(C_*^2)$, $f_k(B_k(C_*^1)) \subset B_k(C_*^2)$, а відображення $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2): a + B_k(C_*^1) \mapsto f_k(a) + B_k(C_*^2)$ коректно визначене і є гомоморфізмом груп $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Віт. Оскільки групи абелеві, для суміщення класів за рівнянням використовується адитивна позначення.

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}: a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow \partial_k^2 f_k(a) = f_{k-1}(\partial_k^1 a) = 0$,
бо $\partial_k^1 a = 0$, тому $f_k(a) \in Z_k(C_*^2)$.

$$a \in B_k(C_*^1) \Rightarrow \overset{\exists b:}{\forall} a = \partial_{k+1}^1 b, \quad b \in C_{k+1}^1 \Rightarrow f_k(a) = f_k(\partial_{k+1}^1 b) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(b) \in B_k(C_*^2).$$

Коректність: $a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1) \Rightarrow a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow f_k(a) \in Z_k(C_*^2) \Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) \in H_k(C_*^2)$ за гомоморфізму.

$$a + B_k(C_*^1) = b + B_k(C_*^1) \Rightarrow \exists c \in C_{k+1}^1 : a - b = \partial_{k+1}^1 c,$$

f_k -зом-зм $\Rightarrow f_k(a) - f_k(b) = f_k(a - b) = f_k(\partial_{k+1}^1 c) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(c) \in B_k(C_*^2)$ (повторили гомоморфізм вище) $\Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) = f_k(b) + B_k(C_*^2).$

Гомоморфізм, бо f_k -зом-зм: $\forall a, b \in Z_k(C_*^1)$

$$f_{k*}((a + B_k(C_*^1)) + (b + B_k(C_*^1))) = f_{k*}(a + b + B_k(C_*^1)) = f_k(a + b) + B_k(C_*^2) = f_k(a) + f_k(b) + B_k(C_*^2) = (f_k(a) + B_k(C_*^2)) + (f_k(b) + B_k(C_*^2)) = f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) + f_{k*}(b + B_k(C_*^1)). \quad \triangle$$

лев. 16.5. Товариство, що зом-зм зм зом-зм $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2)$, $k \in \mathbb{Z}$ (як з ном. Рл) індукують морфізм $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$.

Рет. За побудовою, якщо $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ і $g_*: C_*^2 \rightarrow C_*^3$ — морфізми, то $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (g_k \circ f_k)_* = g_{k*} \circ f_{k*}$. Якщо $f_*: C_* \rightarrow C_*$ — тождественний морфізм, тобто $f_k = \text{id}_{C_k}$ $\forall k$, то $f_{k*} = \text{id}_{H_k(C_*)}$.

Лем. 16.6. Алгебраїчною гомотопією між морфізмами ланцюгових комплексів f_* і $g_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ зветься набір гомоморфізмів $\{D_k: C_k^1 \rightarrow C_{k+1}^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ таких, що $\forall k \in \mathbb{Z}$
 $f_k - g_k = \partial_{k+1}^2 \circ D_k + D_{k-1} \circ \partial_k^1$ або $\partial_{k+1}^2 \circ D_k - D_{k-1} \circ \partial_k^1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \partial_{k+2}^1 & & 1 & \partial_{k+1}^1 & 1 & \partial_k^1 & 1 & \partial_{k-1}^1 \\
 \cdots & \rightarrow & C_{k+1}^1 & \xrightarrow{\quad} & C_k^1 & \xrightarrow{\quad} & C_{k-1}^1 & \rightarrow \cdots \\
 & & \searrow D_k & & \downarrow f_k, g_k & & \swarrow D_{k-1} & \\
 \partial_{k+2}^2 & & C_{k+1}^2 & \xrightarrow{\quad} & C_k^2 & \xrightarrow{\quad} & C_{k-1}^2 & \rightarrow \cdots \\
 & & \swarrow \partial_{k+1}^2 & & \swarrow \partial_k^2 & & \swarrow \partial_{k-1}^2 &
 \end{array}$$

Рл. 16.2. Якщо $\exists$ алг. гомотопія між f_* і g_* , то
 $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f_{k*} = g_{k*}$.

► Дійсно, $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1)$ (зокр., $a \in Z_k(C_*^1)$):

$$(f_{k*} - g_{k*})(a + B_k(C_*^1)) = (f_k - g_k)(a) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{D}_k(a) \pm \mathcal{D}_{k-1}(\underbrace{\partial_k^1 a}_0) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{D}_k(a) + B_k(C_*^2) = 0 + B_k(C_*^2),$$

$\stackrel{\text{"}B_k(C_*^2)\text{"}}{=}$

тобто $f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) = g_{k*}(a + B_k(C_*^1))$. $\triangle$

Лем. Ранг абелевої групи G називають найбільше $n \in \mathbb{Z}_+$ таке, що G містить підгрупу, ізоморфну $\mathbb{Z}^n$, або ∞ , якщо такою n немає. Найбільшого позначають чанк G . Наприклад, $\text{чанк } \mathbb{Z}^n = \text{чанк}(\mathbb{Z}^n \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots}_{\substack{\neq \mathbb{Z}_+, \text{ p.z.}}}) = n$, $\text{чанк } \mathbb{Q} = 1$ (чому?) з операцією додавання.

def. 16.7. k -мим числом Бетті ланцюгового комплексу C_* зб. $b_k := \text{чанк } H_k(C_*)$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо C_* скінченний (або принаймні $H_k(C_*) \neq \{0\}$ лише для скінченної кількості k) і $b_k < \infty \quad \forall k$, то ейлеровою характеристикою C_* зб. $\chi(C_*) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b_k$.

Пр. 16.3. Якщо ланцюговий комплекс C_* скінченний і $\text{rang } C_k < \infty \ \forall k$, то

$$\chi(C_*) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } C_k.$$

► Впр. 16.1. $\forall$ аделевої гр. G та її підгрупи $K \subset G$ якщо $\text{rang } G < \infty$, то $\text{rang } K < \infty$, і $\text{rang } G/K = \text{rang } G - \text{rang } K$.

Поклон для ком-зла $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ маємо ізоморфізм $C_k / \text{Im } \partial_k \cong \text{Im } \partial_k = B_{k-1}(C_*)$, тому в силу
вправи (і очевидної інваріантності ранга відносно ізоморфізмів)

$\text{rang } C_k - \text{rang } Z_k(C_*) = \text{rang } B_{k-1}(C_*)$ (вони усі $< \infty$ за умовою і Впр. 16.1.). Тому

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } H_k(C_*) = \left[\text{Впр. 16.1.} \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left(\text{rang } Z_k(C_*) - \text{rang } B_k(C_*) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } Z_k(C_*) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \text{rang } B_k(C_*) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left(\text{rang } Z_k(C_*) + \text{rang } B_{k-1}(C_*) \right) = \left[\text{зауваж.} \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } C_k, \end{aligned}$$

де усі суми скінченні в силу скінченності C_* . $\triangle$

Лем. $\forall$ груп H і G множини морф. $H \rightarrow G$ позн.

$\text{Hom}(H, G)$ це група аделева, якщо G аделева:

$$\forall f, g \in \text{Hom}(H, G) \quad \forall a \in H \quad (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

(перевірте).

аделевої групи G

лем. 16.3. Для будь-якого класифікованого комплексу C_* , i

$k \in \mathbb{Z}$ визначимо $d^k: \text{Hom}(C_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}, G)$:

$$d^k f(a) := f(\partial_{k+1} a) \in G, \text{ де } f \in \text{Hom}(C_k, G) \text{ і } a \in C_{k+1}.$$

Позн. $\text{Hom}(C_*, G) := \{ \text{Hom}(C_k, G), d^k \}_{k \in \mathbb{Z}}$ буде називатися класифікованим комплексом, що спряжений до C_* .

Рл. 16.4. $\text{Hom}(C_*, G)$ коректно визначений і дійсно є класифікованим комплексом.

$$\triangleright \forall k \in \mathbb{Z}, f \in \text{Hom}(C_k, G) \quad d^k f = f \circ \partial_{k+1}: C_{k+1} \rightarrow G \in$$

роз-знач як композиція роз-знач, тому гіпно визначено
 $d^k: \text{Hom}(C_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}, G)$.

$\forall f, g \in \text{Hom}(C_k, G), \forall a \in C_{k+1}$

$$d^k(f+g)(a) = (f+g)(\partial_{k+1}a) = f(\partial_{k+1}a) + g(\partial_{k+1}a) = d^k f(a) + d^k g(a) = (d^k f + d^k g)(a), \text{ тому } d^k - \text{гомоморфізм.}$$

$\forall f \in \text{Hom}(C_k, G), \forall a \in C_{k+2}$

$$(d^{k+1} \circ d^k)(f)(a) = d^k f(\partial_{k+2}a) = f(\underbrace{(\partial_{k+1} \circ \partial_{k+2})}_{=0}(a)) = 0,$$

тому $d^{k+1} \circ d^k = 0$. Отже, це коланізоровий комплекс. $\triangle$

Рем. Групи когомологій $\text{Hom}(C_*, G)$ іноді називаються

групами когомологій C_* з коефіцієнтами у G і позначають $H^k(C_*, G) := H^k(\text{Hom}(C_*, G))$.

Впр. 16.2. Побудувати за морфізмом $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ морфізм коланізорових комплексів $\text{Hom}(C_*^2, G) \rightarrow \text{Hom}(C_*^1, G)$.

Рем. $\text{Hom}(\cdot, G)$ - контраваріантний функтор з категорії ланцюгових комплексів у категорію коланізорових.