Задача 1.1. Розглянемо круговий конус F в $I\!R^3$:

$$\begin{cases} x^1 = r\,u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r\,u^2 \sin u^1, \\ \quad x^3 = h\,u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор конуса F: $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^2 \end{pmatrix}$

Підставивши $u^1 = \dfrac{\pi}{2}, u^2 = 1$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Далі, обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -ru^2 \sin u^1 \\ ru^2 \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх значення в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Це вектори, які утворюють базис в дотичній площині $T_P F$. Знайдемо їх векторний добуток – це буде вектор нормалі дотичної площини:

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$0 \cdot (x^1 - 0) + rh \cdot (x^2 - r) - r^2 \cdot (x^3 - h) = 0,$$

тобто,

$$h\, x^2 - r\, x^3 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

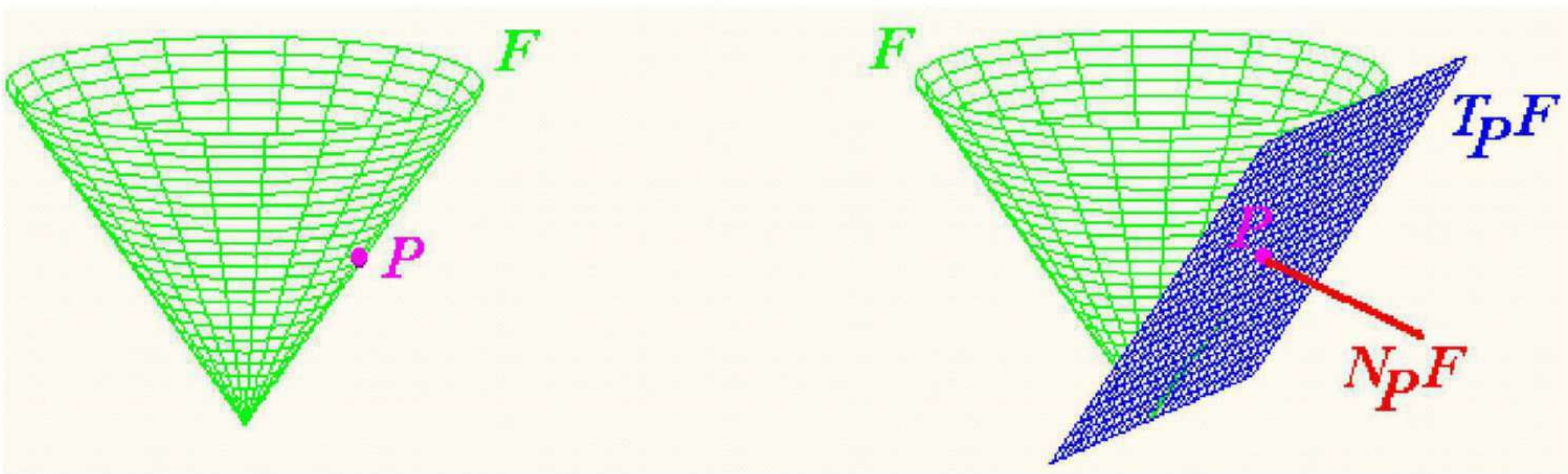
$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x^1 - 0}{0} = \dfrac{x^2 - r}{rh} = \dfrac{x^3 - h}{-r^2}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $h\,x^2 - r\,x^3 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - r}{h} = \frac{x^3 - h}{-r}$$



Задача 1.2. Розглянемо круговий гіперболоїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ x^3 = h\, u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Перевірте регулярність поверхні F. Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої гіперболоїда F в точці $P\ (\pi, -2)$.

** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F, дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор гіперболоїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ \sin u^1 + u^2 \cos u^1 \\ h\, u^2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 - u^2 \cos u^1 \\ \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 \\ \cos u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_Q F$ в довільній точці $Q(u_0^1, u_0^2)$:

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)(x^1 - (\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)) +$$

$$+ h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)(x^2 - (\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)) - u_0^2 (x^3 - h\, u_0^2) = 0$$

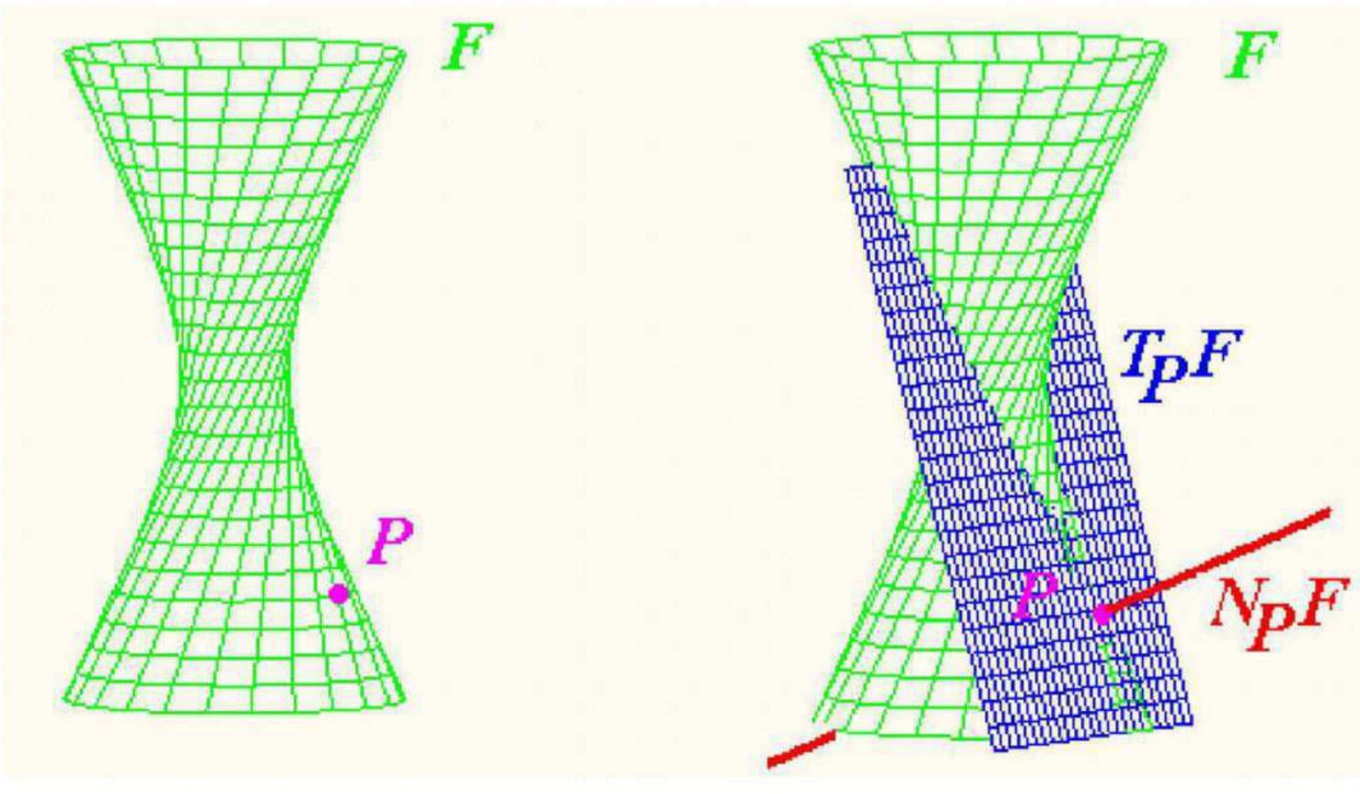
тобто,

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1) x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1) x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

Зокрема, в точці $P\ (\pi,-2)$ маємо: $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2h \end{pmatrix}, \ \vec{N}_P = \begin{pmatrix} -h \\ 2h \\ 2 \end{pmatrix}$

Рівняння дотичної площини T_PF: $-hx^1 + 2hx^2 + 2x^3 - h = 0$

Рівняння нормальної прямої N_PF: $\dfrac{x^1+1}{-h} = \dfrac{x^2-2}{2h} = \dfrac{x^3+2h}{2}$



* Проаналізуємо поведінку дотичної площини

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

і вектора нормалі

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix}$$

при $u^1=c=const$, $u^2=t$, тобто, коли точка рухається по прямолінійній твірній гіперболоїда.

Маємо рівняння дотичної площини:

$$h(\cos c - t\sin c)x^1 + h(\sin c + t\cos c)x^2 - tx^3 - h = 0$$

Підставимо в нього координати довільної точки на твірній:

$$x^1 = \cos c - w\sin c, x^2 = \sin c + w\cos c, x^3 = h\, w, \quad -\infty < w < \infty$$

Отримаємо:

$$h(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + h(\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - thw - h = 0$$

$$(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + (\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - tw - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Таким чином, якщо в довільній точці фіксованої прямолінійної твірної гіперболоїда F розглянути дотичну площину, то ця площина міститиме усю прямолінійну твірну.

Далі проаналізуємо поведінку вектора нормалі

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} h(\cos c - t\sin c) \\ h(\sin c + t\cos c) \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cos c \\ h\sin c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\sin c \\ \cos c \\ -1 \end{pmatrix},$$

коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, тобто, коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній.

Застосуємо поворот на кут $-c$ навколо координатної осі x^3,

$$\vec{N}^*(t)=\begin{pmatrix}\cos c & \sin c & 0\\ -\sin c & \cos c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{N}(t)=\begin{pmatrix}h\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

і пронормуємо:

$$\vec{n}^*(t)=\frac{\vec{N}^*(t)}{|\vec{N}^*(t)|}=\frac{1}{\sqrt{h^2+2t^2}}\begin{pmatrix}h\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{t}{\sqrt{h^2+2t^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, кінець вектора $\vec{n}^*(t)$ пробігає півколо одиничного радіусу з центром в початку координат O, яке розташоване у вертикальній площині $x^1+x^3=0$.

Це означає, що коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній гіперболоїда F, то дотична площина поверхні ковзає і обертається навколо твірної, при цьому повний кут обороту дорівнює π.

Задача 1.3. Розглянемо катеноїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ \quad x^3 = u^1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P\ (0, \frac{\pi}{3})$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор катеноїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \cos u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \sinh u^1 \cos u^2 \\ \sinh u^1 \sin u^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\cosh u^1 \sin u^2 \\ \cosh u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \cosh u^1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos u^2 \\ -\sin u^2 \\ \sinh u^1 \end{pmatrix}$$

Підставивши $u^1 = 0, u^2 = \frac{\pi}{3}$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і вектор нормалі

$$\vec{N}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $(x^1 - \frac{1}{2}) + \sqrt{3}(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 0(x^3 - 0) = 0,$

тобто,

$$x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

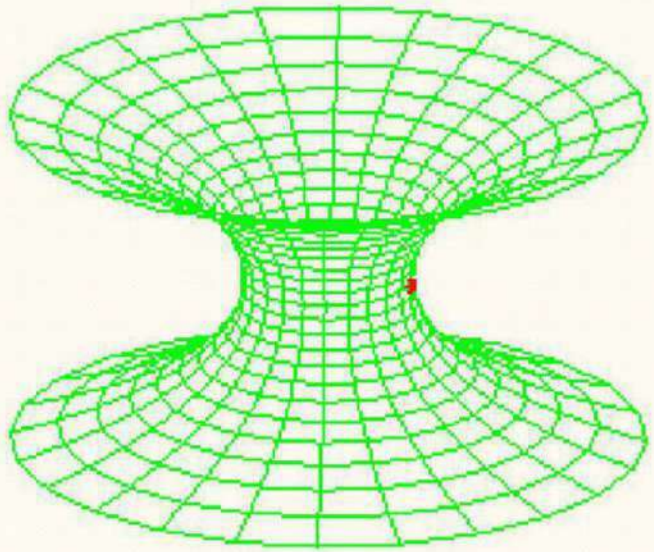
$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

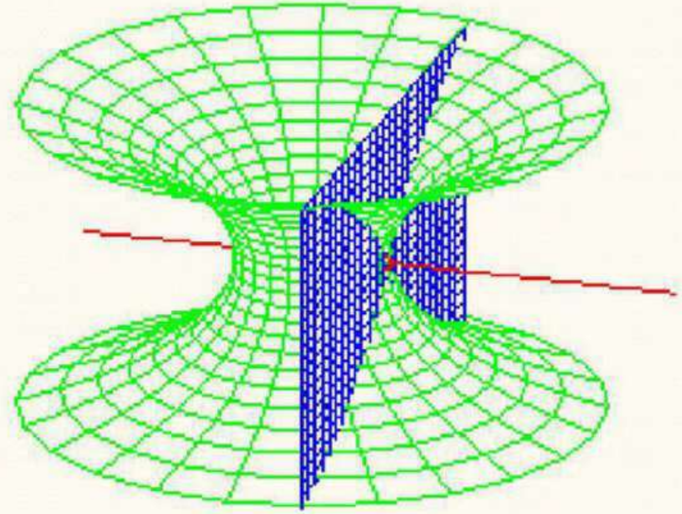
Отримаємо: $\dfrac{x^1 - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $\dfrac{x^1 - \dfrac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$





****Задача 2**. Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричні поверхні F, то її дотична площина $T_P F$ не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини цих поверхонь).

Розвязання.

1) Радіус-вектор довільної циліндричної поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\vec{e}$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s)\ ,\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{e}$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s), \vec{e}]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$<\vec{x}-(\vec{\rho}(s_0)+t_0\vec{e}),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0$$

тобто,

$$<\vec{x}-\vec{\rho}(s_0),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0 .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на циліндричній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{e}$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній циліндричної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

2) Радіус-вектор довільної конічної поверхні:

$$\vec{x} = t\vec{\rho}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = t\,\vec{\tau}(s)\ ,\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\rho}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [t\,\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)] = t[\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0, t_0)$:

$$< \vec{x} - t\vec{\rho}(s_0), [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0$$

$\hat{0}$

тобто,

$$< \vec{x}, [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на конічній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\rho}(s_0)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній конічної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

3) Радіус-вектор довільної торсові поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\,\vec{\tau}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s) + tk\vec{v}(s)\ , \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\tau}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s) + tk\vec{v}(s), \vec{\tau}(s)] = tk[\vec{v}(s), \vec{\tau}(s)] = -tk\vec{\beta}(s)$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці *P(s₀,t₀)*:

$$< \vec{x} - (\vec{\rho}(s_0) + t_0\vec{\tau}(s_0)), \vec{\beta}(s_0) >= 0$$

тобто,

$$< \vec{x} - \vec{\rho}(s_0), \vec{\beta}(s_0) >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на торсовій поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\tau}(s)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній торсової поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

***Задача 3.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

Розв'язання.

Запишемо радіус-вектор довільної поверхні обертання F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos u^2 \\ r(u^1)\sin u^2 \\ h(u^1) \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} r'\cos u^2 \\ r'\sin u^2 \\ h' \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin u^2 \\ r(u^1)\cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = r \cdot \begin{pmatrix} -h' \cos u^2 \\ -h' \sin u^2 \\ r' \end{pmatrix}$$

Рівняння дотичної площини поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$-h'(u_0^1)\cos u_0^2 \cdot (x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2) - h'(u_0^1)\sin u_0^2 \cdot (x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2) +$$

$$+ r'(u_0^1) \cdot (x^3 - h(u_0^1)) = 0$$

тобто,

$$-h'(u_0^1)\cos u_0^2 \cdot x^1 - h'(u_0^1)\sin u_0^2 \cdot x^2 + r'(u_0^1) \cdot x^3 + h'(u_0^1) r(u_0^1) - r'(u_0^1) h(u_0^1) = 0$$

Рівняння нормальної прямої поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\frac{x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2}{-h'(u_0^1)\cos u_0^2} = \frac{x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2}{-h'(u_0^1)\sin u_0^2} = \frac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)}$$

Точки перетину нормальної прямої поверхні F в точці P з координатною віссю x^3 – віссю обертання поверхні F – визначаються з системи

$$\begin{cases} \dfrac{x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2}{-h'(u_0^1)\cos u_0^2} = \dfrac{x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2}{-h'(u_0^1)\sin u_0^2} = \dfrac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)}, \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases}$$

тобто,

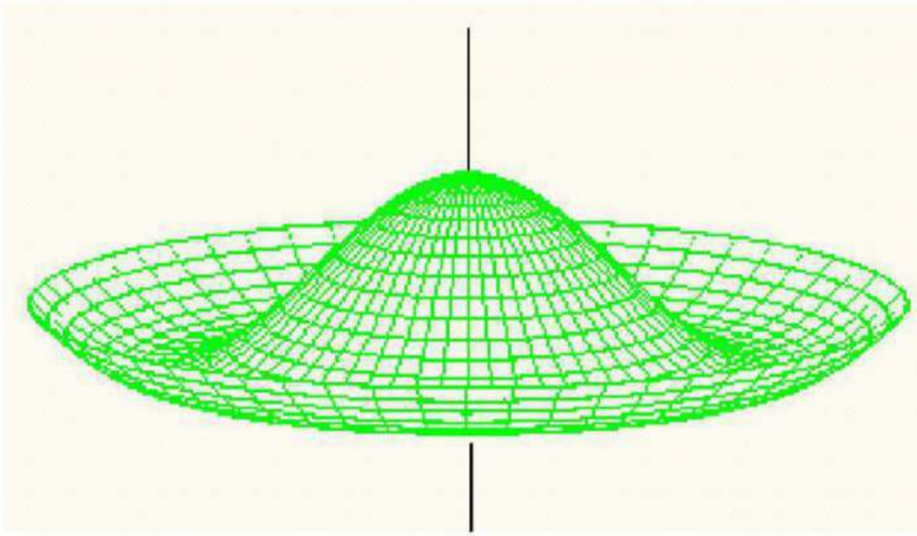
$$\begin{cases} h'(u_0^1)x^3 = h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases}$$

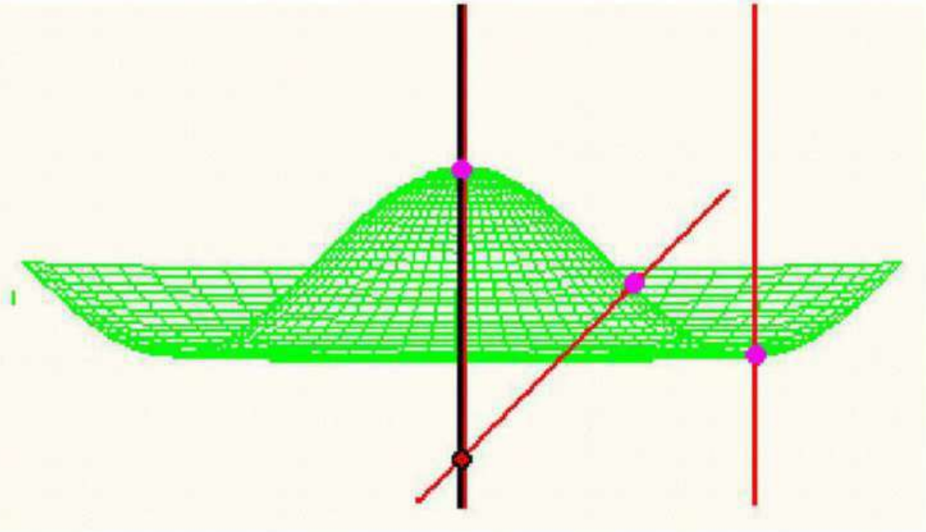
Якщо $h'(u_0^1) \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ж $h'(u_0^1) = 0$, то система або не має розв'язків (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \neq 0$), або навпаки – перетворюється в тотожність (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) = 0$).

Умова $h'(u_0^1) \neq 0$ або $h'(u_0^1) = 0$ означає що нормальна пряма поверхні F в точці P не є вертикальною або є вертикальною відповідно. А вертикальність прямої означає паралельність з віссю обертання.

Таким чином, маємо: або нормальна пряма поверхні обертання F в точці P не є паралельною осі обертання, і тоді вона обов'язково перетинає вісь обертання в якійсь точці, або вона є паралельною чи співпадає з віссю обертання.





Задача 4. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(1,0,0)$.

*Запишіть рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$.

*Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні F, що проходить через точку $B(0,0,1)$.

Розв'язання. Запишемо функцію $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ і обчислимо її градієнт:

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right) = (-x^2, -x^1, 1)$$

Функція $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ є неперервно диференційованою, а її градієнт $\nabla\Phi$ не обертається в нуль. Тому неявно задана поверхня F є регулярною.

Вектор

$$\vec{N}_Q = \nabla\Phi_Q = (-x_Q^2, -x_Q^1, 1)$$

є нормаллю поверхні F в її довільній точці $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$.

Рівняння дотичної площини $T_Q F$:

$$-x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + 1 \cdot (x^3 - x_Q^3) = 0,$$

тобто,

$$x^3 = x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) + x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + x_Q^3.$$

Рівняння нормальної прямої $N_Q F$:

$$\frac{x^1 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \frac{x^2 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \frac{x^3 - x_Q^3}{1}.$$

Координати точки $P(1,0,0)$ задовольняють рівняння поверхні

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $x^3 - x^2 = 0.$

Рівняння нормальної прямої $N_Q F$: $\dfrac{x^1 - 1}{0} = \dfrac{x^2}{-1} = \dfrac{x^3}{1}$.

Запишемо рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$. Сама точка $A(0,0,-1)$ не належить поверхні, оскільки її координати не задовольняють рівняння поверхні $x^3 - x^1 x^2 = 0$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а дотична площина $T_Q F$ проходила через точку $A(0,0,-1)$.

Маємо наступну систему:

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ -x_Q^2 \cdot (0 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (0 - x_Q^2) + 1 \cdot (-1 - x_Q^3) = 0 \end{cases},$$

тобто,

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ 2x_Q^1 x_Q^2 - 1 - x_Q^3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком буде будь-яка точка $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$, яка належить перетину заданої поверхні F з горизонтальною площиною $x^3 = 1$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а нормальна пряма $N_Q F$ проходила через точку $B(0,0,1)$.

Маємо наступну систему:

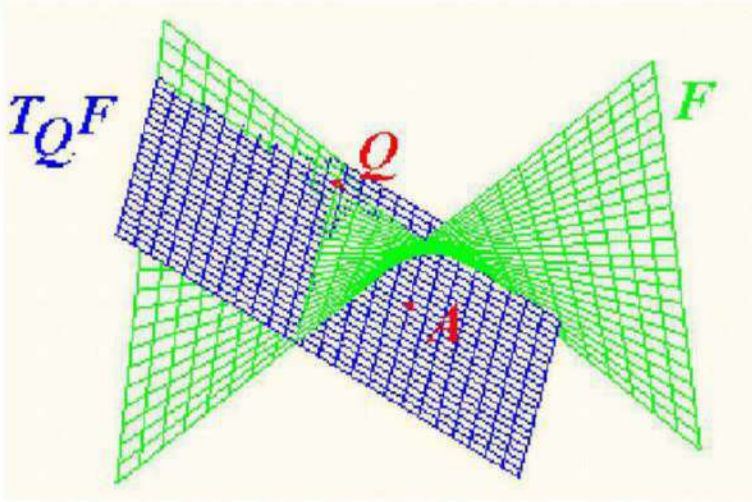
$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ \dfrac{0 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \dfrac{0 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \dfrac{1 - x_Q^3}{1}, \end{cases}$$

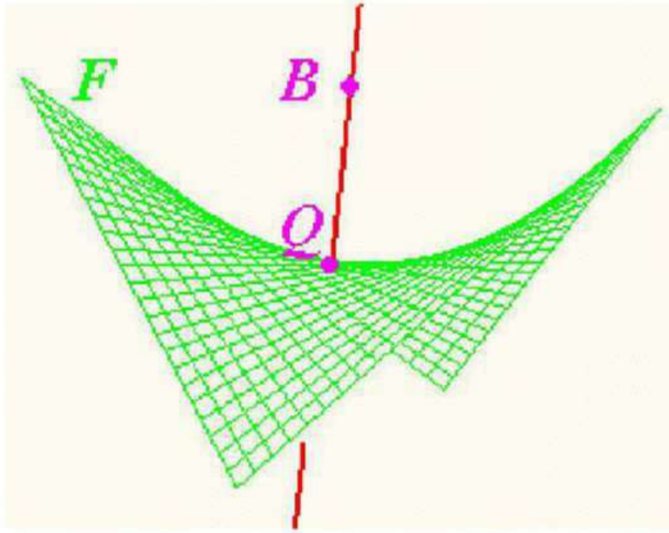
тобто,

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ (x_Q^1)^2 = (x_Q^2)^2,\ (1 - x_Q^3) x_Q^2 = x_Q^1,\ (1 - x_Q^3) x_Q^1 = x_Q^2 \end{cases}$$

Розв'язком буде точка $Q(0,0,0)$.

Рівняння нормальної прямої в цій точці: $\dfrac{x^1}{0} = \dfrac{x^2}{0} = \dfrac{x^3}{1}$


$T_Q F$
Q
F
A


F
B
Q

***Задача 5.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1,a^2,a^3)$, що не лежить на поверхні F.

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1,p^2,p^3)$ на поверхні F є найближчою або найдальшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A, то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P.

Розв'язання. Розглянемо функцію відстані від точки $A(a^1,a^2,a^3)$ до точок поверхні F:

$$d = \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2}, \ \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Щоб знайти екстремуми функції $d(x^1,x^2,x^3)$ за умови $\Phi(x^1, x^2, x^3)= 0$, розглянемо відповідну функцію Лагранжа:

$$L = d(x^1,x^2,x^3)^2 + \lambda\, \Phi(x^1, x^2, x^3)$$

і запишемо умови екстремальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^1} = \dfrac{\partial L}{\partial x^2} = \dfrac{\partial L}{\partial x^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} 2(x^1 - a^1) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \quad 2(x^2 - a^2) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad 2(x^3 - a^3) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{cases} (x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3) = -\dfrac{\lambda}{2} \cdot (\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3}), \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Звідси випливає, що в екстремальній точці P пряма AP, що проходить через точку P і направлена вздовж вектора $(x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3)$, співпаде з нормальною прямою $N_P F$, що проходить через точку P і направленою вздовж вектора $(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3})$.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 13.1. Обчислити першу фундаментальну форму площини F з радіус-вектором (афінні координати)

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} a_1^1u^1+a_2^1u^2+c^1 \\ a_1^2u^1+a_2^2u^2+c^2 \\ a_1^3u^1+a_2^3u^2+c^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}\cdot u^1+\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}\cdot u^2+\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}=\vec{a}_1\cdot u^1+\vec{a}_2\cdot u^2+\vec{c}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Розв'язання. Площина проходить через точку P з радіус-вектором $\vec{c}$ і натягнута на пару лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, величини u^1, u^2 представляють афінні координати в площині F.

Обчислимо перші похідні радіус-вектора поверхні:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}=\vec{a}_1\ ,\ \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}=\vec{a}_2\ .$$

Обчислюємо попарні скалярні добутки:

$$g_{11}=<\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}>=<\vec{a}_1,\vec{a}_1>,\ g_{12}=g_{21}=<\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}>=<\vec{a}_1,\vec{a}_2>\ ,\ g_{22}=<\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}>=<\vec{a}_2,\vec{a}_2>

Запишемо матрицю коефіцієнтів першої фундаментальної форми площини в афінних координатах:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <\vec{a}_1, \vec{a}_1> & <\vec{a}_1, \vec{a}_2> \\ <\vec{a}_2, \vec{a}_1> & <\vec{a}_2, \vec{a}_2> \end{pmatrix}$$

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} = <\vec{a}_1, \vec{a}_1> > 0\ ,\ g_{22} = <\vec{a}_2, \vec{a}_2> > 0\ ,\ \det g = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|^2 > 0$$

Якщо базисні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ є ортонормованими, координати u^1, u^2 в площині є декартовими, а матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми має вигляд

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: В загальному випадку перша фундаментальна форма площини в афінних координатах має вигляд

$$g = <\vec{a}_1, \vec{a}_1> (du^1)^2 + 2 <\vec{a}_1, \vec{a}_2> du^1 du^2 + <\vec{a}_2, \vec{a}_2> (du^2)^2,$$

а в декартових координатах

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Задача 13.2. Обчислити першу фундаментальну форму кругового циліндра F , заданого параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R\cos u^1 \\ x^2 = R\sin u^1 \\ \quad x^3 = u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Розв'язання. Обчислимо перші похідні радіус-вектора

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -R\sin u^1 \\ R\cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = R^2 ,$$

$$g_{12} = g_{21} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = 0 ,$$

$$g_{22} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = 1 \ .$$

Матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} = R^2 > 0 \ , \ g_{22} = 1 > 0 \, , \ \det g = R^2 > 0$$

Відповідь: Перша фундаментальна форма кругового циліндра в заданих координатах має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Задача 13.6. Обчислити першу фундаментальну форму загальної циліндричної поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{c} \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Розв'язання. Циліндрична поверхня F утворена прямими лініями з напрямним вектором $\vec{c}$, що проходять через точки базової кривої γ з радіус-вектором $\vec{\rho}(u^1)$.

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \vec{\rho}' \ , \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{c} \ .$$

Попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = |\vec{\rho}'|^2 \ , \ g_{12} = g_{21} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = < \vec{\rho}', \vec{c} > \ , \quad g_{22} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = |\vec{c}|^2 \ .$$

Матриця коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}'|^2 & < \vec{\rho}', \vec{c} > \\ < \vec{\rho}', \vec{c} > & |\vec{c}|^2 \end{pmatrix}$$

Якщо базова крива параметризована натуральним параметром, то $g_{11}=1$.

Якщо базова крива лежить в площині, ортогональній прямолінійним твірним, то $g_{12}= g_{21}=0$.

Якщо напрямний вектор $\vec{c}$ прямолінійних твірних має одиничну довжину, то $g_{22}=1$.

Перевіримо регулярність поверхні, встановивши додатну визначеність першої фундаментальної форми:

$$g_{11} =| \vec{\rho}' |^2 > 0 \ , \ g_{22} =| \vec{c} |^2 > 0 \ , \ \det g =| [\vec{\rho}', \vec{c}] |^2 > 0$$

Регулярність циліндричної повехні забезпечується регулярністю напрямної кривої γ, тобто, $\vec{\rho}' \neq \vec{0}$, і умовою того, що прямолінійні твірні не дотикаються базової кривої в жодній її точці, тобто, $[\vec{\rho}', \vec{c}] \neq \vec{0}$.

Відповідь: Перша фундаментальна форма циліндричної поверхні

$$g =| \vec{\rho}' |^2 (du^1)^2 + 2 < \vec{\rho}', \vec{c} > du^1 du^2 + | \vec{c} |^2 (du^2)^2$$

Якщо базова крива параметризована натуральним параметром і розташована в площині,ортогональній прямолінійним твірним, а напрямний вектор прямолінійних твірних має одиничну довжину, то

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Зауважимо, що при такому виборі координат на циліндричній поверхні її перша фундаментальна форма буде такою ж, що і перша фундаментальна форма площини в декартових координатах.

Задача 13.9. Розглянемо площину F, параметризовану декартовими координатами (u^1, u^2) так, що перша фундаментальна форма поверхні має вигляд

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні F при переході від декартових координат (u^1, u^2) до полярних координат $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \widetilde{u}^1 \cos \widetilde{u}^2 \\ u^2 = \widetilde{u}^1 \sin \widetilde{u}^2 \end{cases} ?$$

Розв'язання. Скористаємось тензорним законом зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \widetilde{u}^2 & \sin \widetilde{u}^2 \\ -\widetilde{u}^1 \sin \widetilde{u}^2 & \widetilde{u}^1 \cos \widetilde{u}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \widetilde{u}^2 & -\widetilde{u}^1 \sin \widetilde{u}^2 \\ \sin \widetilde{u}^2 & \widetilde{u}^1 \cos \widetilde{u}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\widetilde{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

тобто, перша фундаментальна форма в полярних координатах має вигляд

$$g = (d\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^1)^2 (d\widetilde{u}^2)^2$$

Альтернативний спосіб розв'язання.

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} du^1 = d\tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 - \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 d\tilde{u}^2 \\ du^2 = d\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 + \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 d\tilde{u}^2 \end{cases}$$

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2 = (d\tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 - \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 d\tilde{u}^2)^2 + (d\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 + \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 d\tilde{u}^2)^2 =$$
$$= (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2 (d\tilde{u}^2)^2$$

Відповідь: $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2 (du^2)^2$