

Варіант 1

1. Довести, що якщо (X, Y, p) і (X', Y', p') –накриття, то й $(X \times X', Y \times Y', p \times p')$ –накриття.
2. Довести, що не існує ретракції проєктивної площини на проєктивну пряму.

Варіант 2

1. Встановити, чи може проєктивна площина накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).
2. Нехай X – топологічний простір, $x, y \in X$, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Довести, що ізоморфізми фундаментальних груп $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(X, y)$, що визначені шляхами f і g , збігаються тоді й тільки тоді, коли гомотопічний клас $[f * \bar{g}]$ належить до центру групи $\pi_1(X, x)$, тобто комутує з будь-яким елементом цієї групи.

Варіант 3

1. Встановити, чи може пляшка Клейна накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).
2. Довести, що не існує ретракції замкнутого листа Мебіуса на його межу.

Варіант 4

1. Нехай (X, Y, p) і (Y, Z, q) – накриття з лінійно зв'язними базами та накриваючими просторами. Довести, що якщо (Y, Z, q) – скінченнолистоє, тобто шар над будь-якою точкою скінченний, то й $(X, Z, q \circ p)$ – накриття.
2. Довести, що "зірочка" X , тобто букет n відрізків, що склеєні спільним кінцем, має властивість нерухомої точки: для будь-якого неперервного відображення $f: X \rightarrow X$ існує така $x \in X$, що $f(x) = x$. Підказка: представити X як ретракт замкнутого круга D^2 .

Варіант 5

1. Довести, що якщо (X, Y, p) – накриття, простір X зв'язний, а Y лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний, то й X лінійно зв'язний.
2. Знайти фундаментальну групу об'єднання сфери $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ та відрізка $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0, -1 \leq y \leq 1\}$.

Варіант 6

1. Довести, що будь-яке дволистоє, тобто таке, всі шари якого складаються з двох точок, накриття з лінійно зв'язними та локально лінійно зв'язними базою і накриваючим простором є регулярним.

2. Довести, що не існує ретракції двовимірного тора на тор з виколотою точкою.

Варіант 7

1. Встановити, чи може крендель M_2^2 , тобто зв'язна сума двох двовимірних торів, накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).

2. Нехай X – підпростір однозв'язного Y . Довести, що якщо неперервне відображення $f: X \rightarrow Z$ можна продовжити на Y , то для будь-якої $x \in X$ гомоморфізм $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, f(x))$ тривіальний, тобто відображає будь-який елемент групи в одиницю.

Варіант 8

1. Довести, що якщо (X, Y, p) – накриття, простори X та Y хаусдорфові та задовольняють другій аксіомі зліченності, а X – многовид, то Y є многовидом тієї ж вимірності.

2. Знайти фундаментальну групу об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ та відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$.

Варіант 9

1. Нехай (X, Y, p) – накриття, база якого Y є компактним T_1 -простором. Довести, що накриваючий простір X компактний тоді й тільки тоді, коли p скінченнолистоє, тобто шар над будь-якою точкою скінченний. Для якої з двох імплікацій тут використовується аксіома T_1 ?

2. Знайти фундаментальну групу простору $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m$.