Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

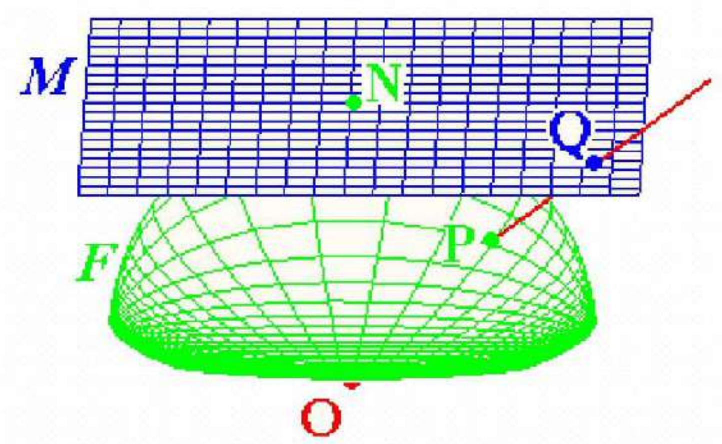
Задача 12.1. Перевірити, що центральна проекція відкритої півсфери на дотичну площину сфери в полюсі дійсно представляється описаними в *Прикладі 1* функціями:

Півсфера:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} 0 < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

Площина: $$\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad \begin{array}{l} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{array}$$

Відображення: $$\begin{cases} v^1 = r\cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r\cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$$



Перевірити бієктивність відображення.

Перевірити регулярність відображення.

Дослідити, які лінії на півсфері є прообразами прямих ліній на площині.

Зробити заміну координат $u^1=u^1(v^1,v^2)$, $u^2=u^2(v^1,v^2)$ на півсфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на півсфері після заміни координат.

Задача 12.2. Розглянемо вертикальну проекцію відкритої півсфери на горизонтальну координатну площину.

Півсфера в «географічних» координатах: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}$, $\begin{matrix} 0 < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$

Площина в полярних координатах: $\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = 0 \end{cases}$, $\begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$

Перевірити бієктивність відображення.

Записати аналітичне представлення заданого відображення відносно вказаних координат.

Перевірити регулярність відображення.

Зробити заміну координат $u^1=u^1(v^1,v^2)$, $u^2=u^2(v^1,v^2)$ на півсфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на півсфері після заміни координат.

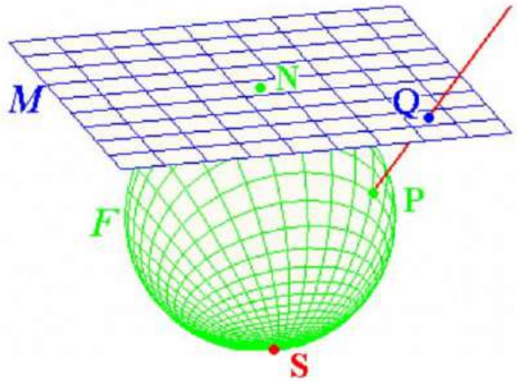
Задача 12.3. Перевірити, що стереографічна проекція сфери на дотичну площину сфери в полюсі дійсно представляється описаними в *Прикладі 2* функціями:

Сфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$

Відображення:

$$\begin{cases} v^1 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \\ v^2 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \end{cases}$$

Площина: $\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$



Перевірити бієктивність відображення.

Перевірити регулярність відображення.

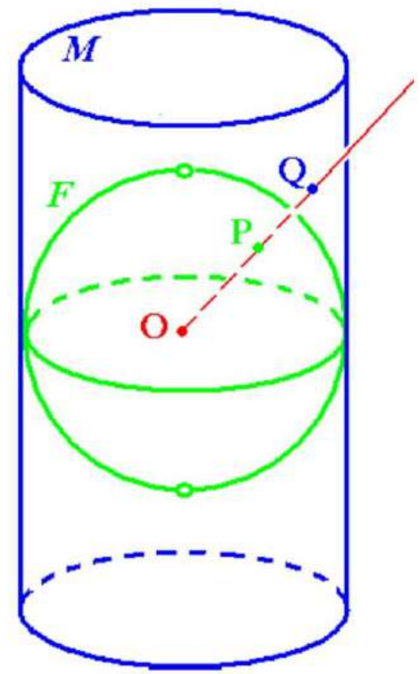
Дослідити, які лінії на сфері є прообразами прямих ліній та кіл на площині.

Зробити заміну координат $u^1=u^1(v^1,v^2)$, $u^2=u^2(v^1,v^2)$ на сфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

Дослідити, які лінії на площині є образами паралелелей і меридіанів на сфері.

Зробити заміну координат $v^1=v^1(u^1,u^2)$, $v^2=v^2(u^1,u^2)$ на площині, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

Задача 12.4. Перевірити, що центральна проекція сфери на дотичний вздовж екватора циліндр дійсно представляється описаними в *Прикладі 3* функціями:



$$\text{Сфера: } \begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{array}{c} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r\cos v^1 \\ x^2 = r\sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}, \quad \begin{array}{c} 0 < v^1 < 2\pi \\ -\infty < v^2 < \infty \end{array}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r\tan u^1 \end{cases}$$

Перевірити визначеність і бієктивність відображення.

Записати аналітичне представлення заданого відображення відносно вказаних координат.

Перевірити регулярність відображення.

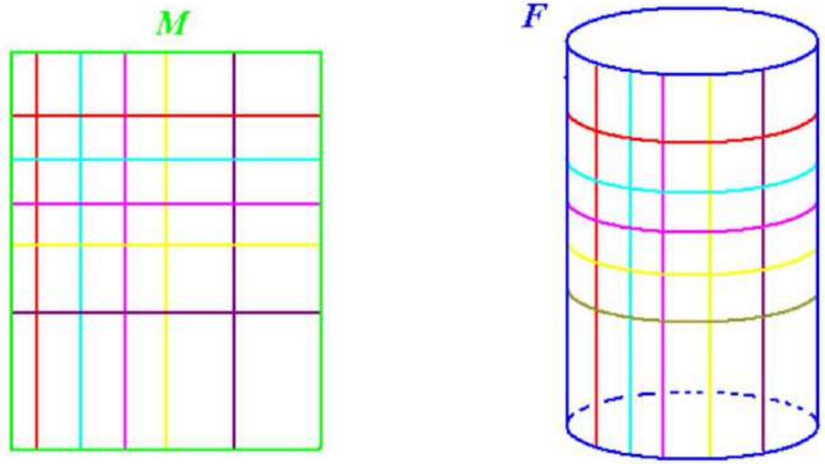
Зробити заміну координат $u^1=u^1(v^1,v^2)$, $u^2=u^2(v^1,v^2)$ на сфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

Задача 12.5. Розглянемо відображення нагортання (накриття) площини на циліндр, описане в *Прикладі 4*.

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = u^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r\cos v^1 \\ x^2 = r\sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < v^1 < 2\pi \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$$



Перевірити визначеність і бієктивність відображення.
Описати прообраз довільної точки циліндра.
Перевірити регулярність відображення.

Задача 12.6. Обчислити першу фундаментальну форму площини F з радіус-вектором (афінні координати)

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} a_1^1u^1+a_2^1u^2+c^1 \\ a_1^2u^1+a_2^2u^2+c^2 \\ a_1^3u^1+a_2^3u^2+c^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}\cdot u^1+\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}\cdot u^2+\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}=\vec{a}_1\cdot u^1+\vec{a}_2\cdot u^2+\vec{c}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Задача 12.7. Обчислити першу фундаментальну форму кругового циліндра F , заданого параметрично

$$\begin{cases} x^1=R\cos u^1 \\ x^2=R\sin u^1 \\ x^3=u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Задача 12.8. Обчислити першу фундаментальну форму сфери F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\cos u^1 \cos u^2 \\ R\cos u^1 \sin u^2 \\ R\sin u^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

Задача 12.9. Обчислити першу фундаментальну форму наступних поверхонь, заданих параметрично:

1) катеноїд

$$\begin{cases} x^1 = R\cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R\cosh u^1 \sin u^2 \\ x^3 = Ru^1 \end{cases}$$

2) гелікоїд

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \omega u^2 \end{cases}$$

3) поверхня Бельтрамі

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) \end{cases}$$

4) поверхня Діні

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \dfrac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) + \omega u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, чи поверхня є регулярно параметризованою.

Задача 12.10.

1) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1)\cos u^2 \\ x^2 = f(u^1)\sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}.$$

2) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні гвинтового обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1)\cos u^2 \\ x^2 = f(u^1)\sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) + \omega u^2 \end{cases}.$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Задача 12.11. Обчислити першу фундаментальну форму загальної циліндрричної поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{c} \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Задача 12.12. Обчислити першу фундаментальну форму загальної конічної поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = u^2 \cdot \vec{\rho}(u^1) \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Задача 12.13. Обчислити першу фундаментальну форму загальної торсової поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\rho}'(u^1) \ .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

Задача 12.14. Розглянемо площину F, параметризовану декартовими координатами (u^1, u^2) так, що перша фундаментальна форма поверхні має вигляд

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні F при переході від декартових координат (u^1, u^2) до полярних координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases} ?$$

Задача 12.15. Розглянемо катеноїд F (або якусь іншу поверхню), перша фундаментальна форма якого має вигляд

$$g = \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2.$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма катеноїда F заміні координат за формулами

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \sinh u^1 \\ \tilde{u}^2 = u^2 \end{cases} ?$$

Задача 12.16. Розглянемо поверхню F, перша фундаментальна форма якої має вигляд

$$g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні F при переході від декартових координат (u^1,u^2) до полярних координат $(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)$ за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^2 \\ u^2 = e^{\tilde{u}^1} \end{cases} \quad ?$$

Задача 12.17. Доведіть, що якщо до поверхні F застосувати гомотетію з коефіцієнтом $\lambda > 0$ у просторі $\mathbb{R}^3$, то її перша фундаментальна форма (усі її коефіцієнти одночасно) домножиться на λ^2.