

# Лекція 12. Відображення поверхонь і його диференціал. Перша фундаментальна форма поверхні.

## 1. Відображення поверхонь

Розглянемо дві прості поверхні  $F$  і  $M$  в  $\mathbb{R}^3$  та неперервне відображення між ними

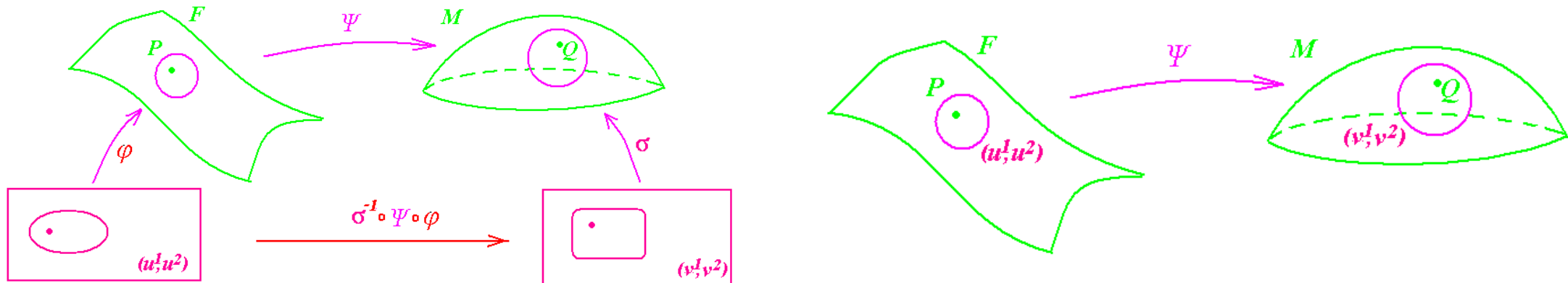
$$\Psi: F \rightarrow M$$

Зафіксуємо точку  $P$  на поверхні  $F$  та її образ  $\Psi(P) = Q$  на поверхні  $M$ .

Введемо локальні координати  $(u^1, u^2)$  в околі точки  $P$  на поверхні  $F$  і локальні координати  $(v^1, v^2)$  в околі точки  $Q$  на поверхні  $M$ .

Тоді в локальних координатах відображення  $\Psi$  задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$



## Приклади

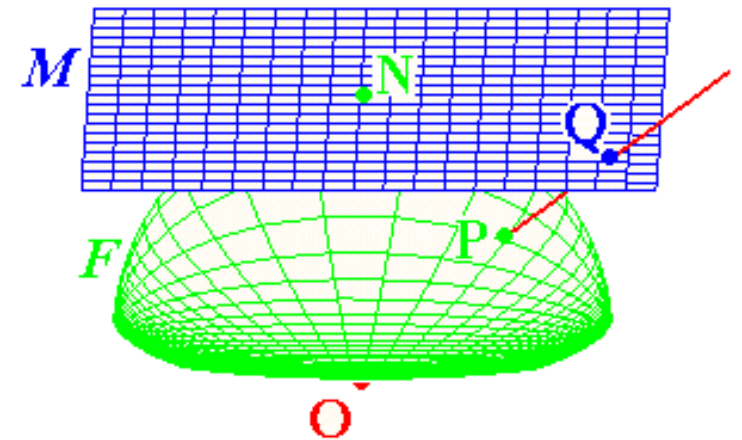
### 1. Центральна проекція відкритої півсфери на площину

Кожній точці  $P$  верхньої півсфери ставиться у відповідність точка  $Q$  дотичної площини сфери в північному полюсі, де площина перетинається з променем  $OP$ , проведеним з центра сфери – точки  $O$ .

$$\text{Півсфера: } \begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & 0 < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2, & -\infty < v^1 < \infty \\ x^3 = r & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = r \cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r \cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$$



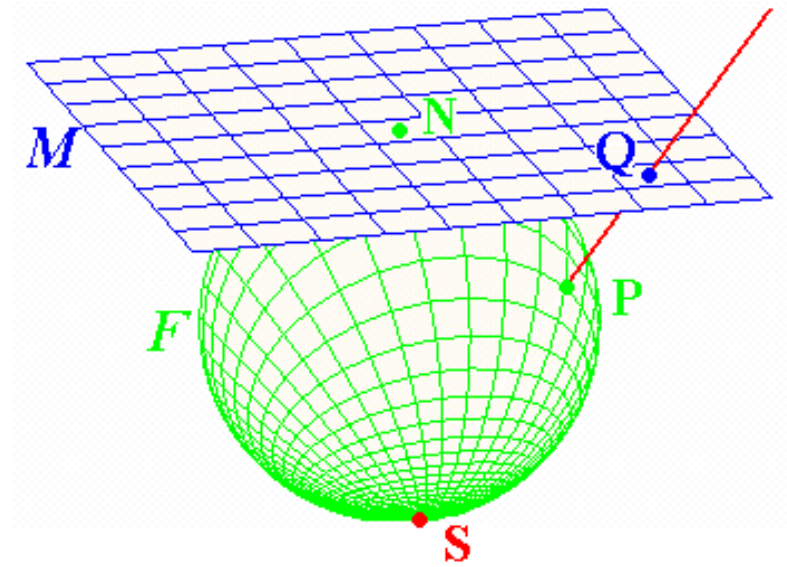
## 2. Стереοграфічна проєкція сфери (з виколотою точкою) на площину

Кожній точці  $P$  сфери (без південного полюса  $S$ ) ставиться у відповідність точка  $Q$  дотичної площини сфери в північному полюсі, де площина перетинається з променем  $SP$ , проведеним з південного полюса  $S$ .

$$\text{Сфера: } \begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2, & -\infty < v^1 < \infty \\ x^3 = r & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = 2r \frac{\cos u^1}{1 + \sin u^1} \cos u^2 \\ v^2 = 2r \frac{\cos u^1}{1 + \sin u^1} \sin u^2 \end{cases}$$



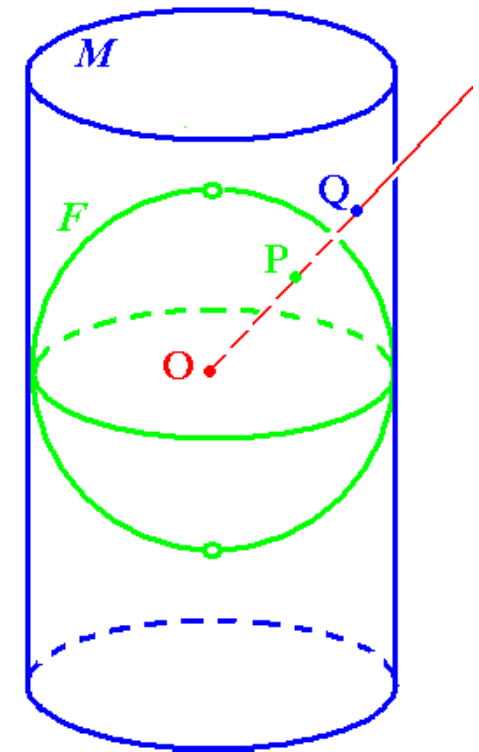
### 3. Центральна проєкція сфери на циліндр

Кожній точці  $P$  сфери (без полюсів) ставиться у відповідність точка  $Q$  на вертикальному круговому циліндрі, дотичному до сфери вздовж екватора, в якій циліндр перетинається з променем  $OP$ , проведеним з центра сфери – точки  $O$ .

$$\text{Сфера: } \begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r \cos v^1 \\ x^2 = r \sin v^1, & 0 < v^1 < 2\pi \\ x^3 = v^2 & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r \tan u^1 \end{cases}$$

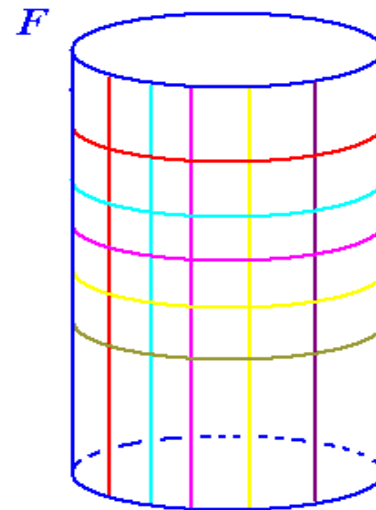
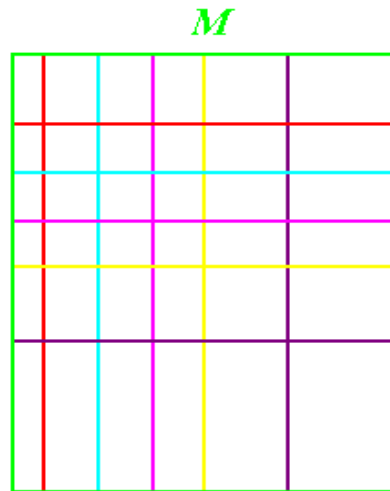


#### 4. Площина накриває циліндр

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = u^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r \cos v^1 \\ x^2 = r \sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < v^1 < 2\pi \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$



Припустимо, що поверхні  $F$  і  $M$  є регулярними.

**Визначення.** Відображення  $\Psi : F \rightarrow M$  назовемо *регулярним* в точці  $P \in F$ , якщо в локальних координатах  $(u^1, u^2)$  в околі точки  $P$  на поверхні  $F$  і в локальних координатах  $(v^1, v^2)$  в околі точки  $Q$  на поверхні  $M$  відображення  $\Psi$  задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

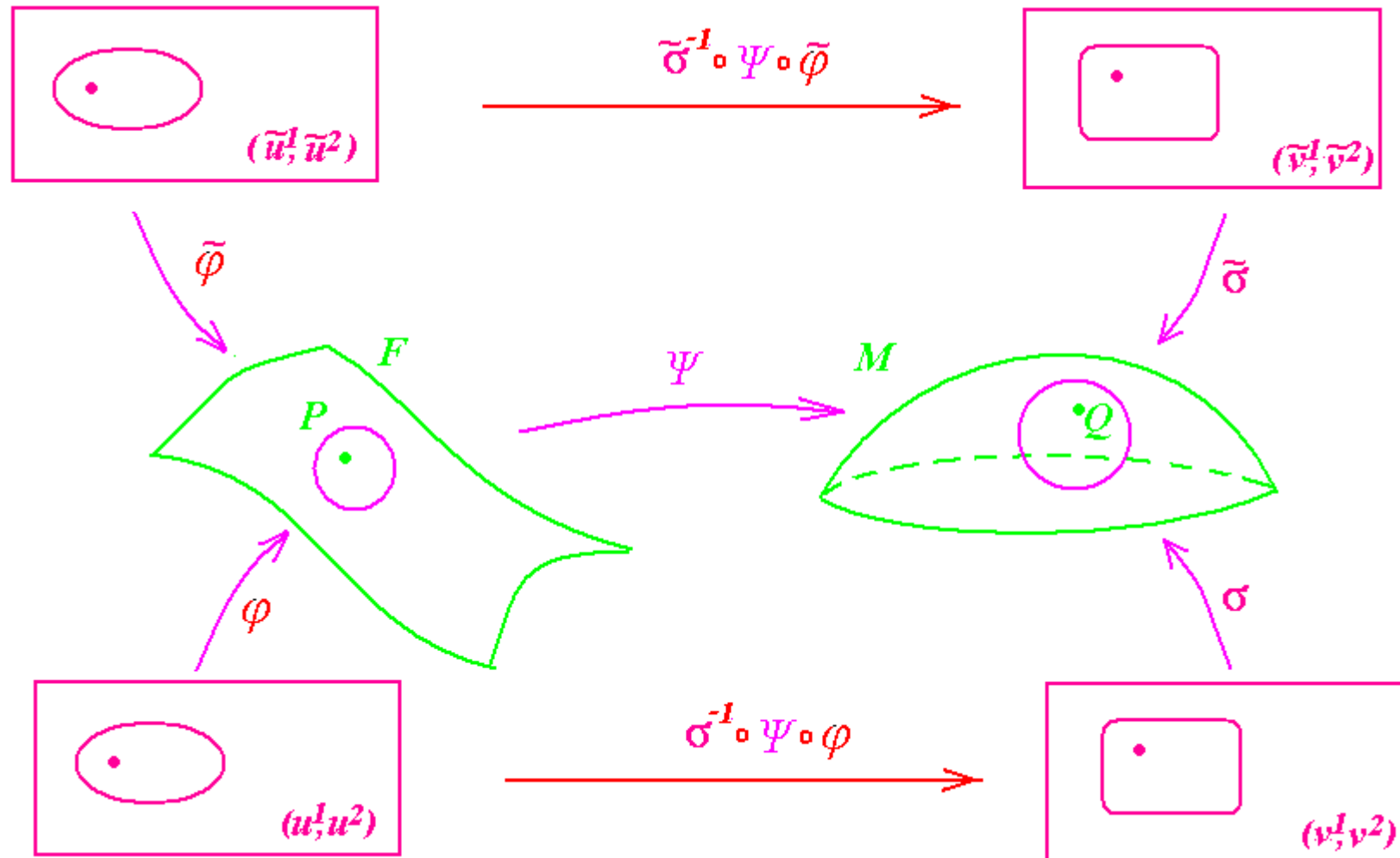
так, що

1) функції  $\xi^1(u^1, u^2)$ ,  $\xi^2(u^1, u^2)$  є неперервно диференційованими,

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix}_P \neq 0$$

Визначення регулярності відображення є коректним – воно не залежить від вибору локальних координат.

*Ілюстрація-пояснення:*



Відображення  $F \rightarrow M$  в старих координатах

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні  $M$

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(v^1, v^2) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(v^1, v^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні  $F$

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Відображення  $F \rightarrow M$  в нових координатах

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \end{cases}$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Як наслідок, при регулярних замінах координат на поверхнях  $F$  і  $M$ :

1) зберігається неперервна диференційовність функцій, що представляють відображення, як композицій неперервно диференційовних функцій;

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

*Зауваження 1.* Регулярне відображення регулярних простих поверхонь є локальним гомеоморфізмом.

*Зауваження 2.* Якщо в нас є регулярне відображення регулярних простих поверхонь  $F \rightarrow M$ , то його можна застосовувати для регулярної заміни локальних координат на поверхні  $F$  (або на поверхні  $M$ ) так, щоб в нових координатах відображення задавалось за відповідністю координат – відповідні за відображенням точки на поверхнях  $F$  і  $M$  мають однакові координати.

## 2. Диференціал відображення поверхонь

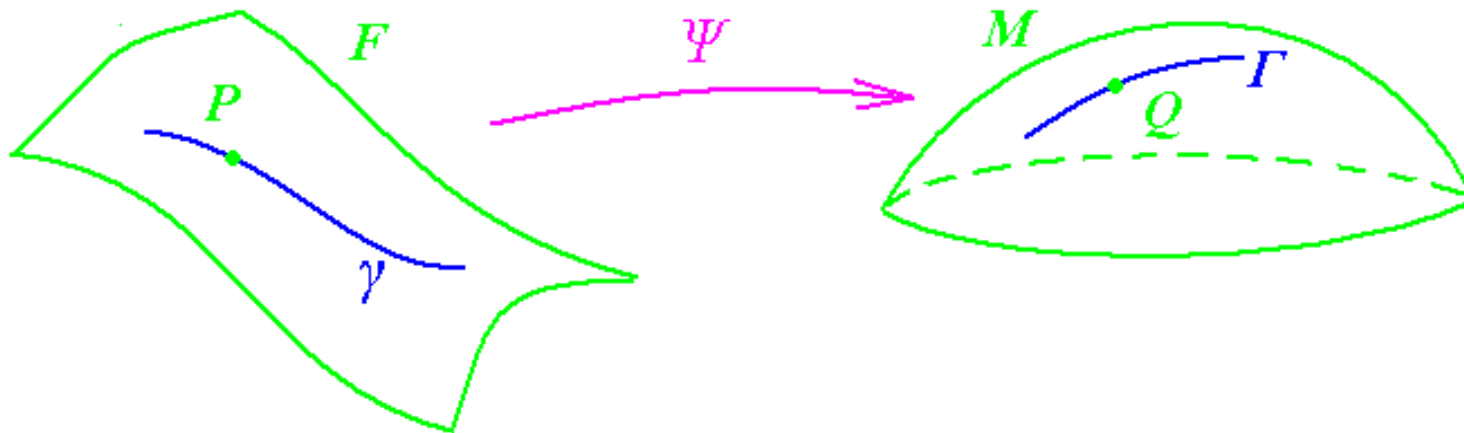
Розглянемо регулярне відображення регулярних поверхонь в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Psi: F \rightarrow M$$

Зафіксуємо точку  $P$  на поверхні  $F$  та її образ  $\Psi(P) = Q$  на поверхні  $M$ .

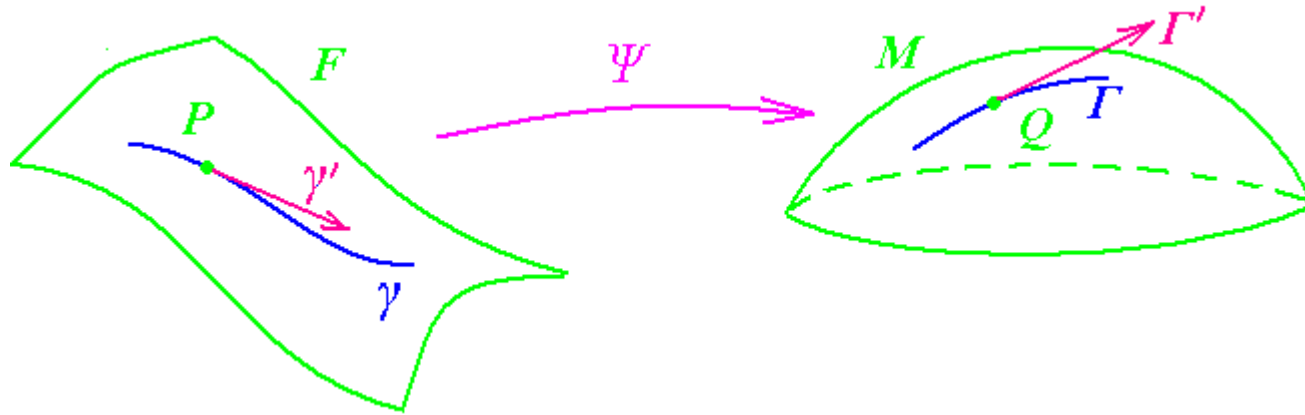
Розглянемо криву  $\gamma: (a,b) \rightarrow F$ , що проходить через точку  $P$ .

Розглянемо відповідну криву  $\Gamma = \Psi \circ \gamma: (a,b) \rightarrow M$ , що проходить через точку  $Q$ .



Розглянемо вектор швидкості  $\gamma'$  кривої  $\gamma$  в точці  $P$  і поставимо йому у відповідність вектор швидкості  $\Gamma'$  кривої  $\Gamma$  в точці  $Q$ :

$$\gamma'(P) \rightarrow \Gamma'(Q)$$



Оскільки будь-який вектор в дотичній площині  $T_P F$  реалізується як вектор швидкості деякої кривої  $\gamma$ , що проходить через точку  $P$ , на поверхні  $F$ , виникає відображення

$$d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M ,$$

яке називається *диференціалом* відображення  $\Psi$  в точці  $P$ .

Запишемо, як виглядає відображення  $d\Psi_P$  в локальних координатах і проаналізуємо коректність його визначення.

Нехай  $(u^1, u^2)$  – локальні координати в околі точки  $P$  на поверхні  $F$ , і  $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$  – радіус-вектор поверхні  $F$ .

Нехай  $(v^1, v^2)$  – локальні координати в околі точки  $Q$  на поверхні  $M$ , і  $\vec{x} = \vec{h}(v^1, v^2)$  – радіус-вектор поверхні  $M$ .

Відображення  $\Psi: F \rightarrow M$  задається в локальних координатах у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Крива  $\gamma$  задається в локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases},$$

її вектор швидкості в точці  $P$  має вигляд

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^2}{dt}(t_0).$$

Відповідна крива  $\Gamma$  задається в локальних координатах

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(\xi^1(t), \xi^2(t)) \\ v^2 = \psi^2(\xi^1(t), \xi^2(t)) \end{cases}$$

її вектор швидкості в точці  $Q$  має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}_\Gamma}{dt}(t_0) &= \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \frac{dv^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{dv^2}{dt}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \left( \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right) + \\ &+ \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right) \end{aligned}$$

Відображення  $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$ , яке ставить у відповідність вектори швидкостей  $\gamma'(P) \rightarrow \Gamma'(Q)$ , представляється у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_P F \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_Q M$$

Як наслідок, отримуємо наступну формулу (аналітичне представлення в локальних координатах) для відображення  $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

## *Інваріантність відносно регулярних замін координат*

Якщо зробити регулярну заміну координат  $u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ ,  $u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  на поверхні  $F$  і регулярну заміну координат  $v^1 = v^1(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$ ,  $v^2 = v^2(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$  на поверхні  $M$ , то тоді координати дотичних векторів змінюються згідно з відповідним тензорним законом:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Зауваження.*

Відображення  $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$  є лінійним відображенням дотичних площин.

Регулярність відображення  $\Psi: F \rightarrow M$  в точці  $P$  означає, що лінійне відображення  $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$  є невиродженим (ранг цього лінійного відображення дорівнює  $\dim T_P F = \dim T_Q M = 2$ ).

### 3. Перша фундаментальна форма поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню  $F$  в  $\mathbb{R}^3$ , представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку  $P$  з внутрішніми координатами  $(u_0^1, u_0^2)$  на поверхні  $F$ .

Візьмемо в дотичній площині  $T_P F$  пару векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

і обчислимо їх скалярний добуток.

Маємо:

$$\begin{aligned} X &= X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \\ Y &= Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{aligned}$$

Обчислюємо скалярний добуток (всі обчислення – в точці  $P(u_0^1, u_0^2)$ ) :

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle = \\ &= X^1 Y^1 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \rangle + X^1 Y^2 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle + X^2 Y^1 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \rangle + X^2 Y^2 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle = \\ &= X^1 Y^1 g_{11} + X^1 Y^2 g_{12} + X^2 Y^1 g_{21} + X^2 Y^2 g_{22}, \end{aligned}$$

де

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Отже, скалярний добуток векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

в дотичній площині  $T_P F$  в точці  $P$  обчислюється за формулою

$$\langle X, Y \rangle = X^1 Y^1 g_{11} + X^1 Y^2 g_{12} + X^2 Y^1 g_{21} + X^2 Y^2 g_{22}$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j$$

або

$$\langle X, Y \rangle = (X^1 X^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix},$$

коефіцієнти  $g_{ij}$  обчислені в точці  $P(u_0^1, u_0^2)$

**Визначення.** Білінійна диференціальна форма

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2$$

з коефіцієнтами

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

називається *першою фундаментальною формою* регулярної параметрично заданої поверхні  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ .

*Приклад.* Нехай  $F$  – площина з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{c} + u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2$ , натягнута на ортонормовані вектори  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ , координати  $u^1, u^2$  – декартові.

Тоді  $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ , тобто,

$$g = du^1du^1 + du^2du^2, \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle X, Y \rangle = (X^1 X^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = (X^1 X^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = X^1 Y^1 + X^2 Y^2$$

## Властивості першої фундаментальної форми

### 1) Симетричність:

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = g_{21}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\langle X, Y \rangle = (X^1 X^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = (Y^1 Y^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \langle Y, X \rangle$$

### 2) Додатна визначеність:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right|^2 > 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right|^2 > 0,$$

$$\begin{aligned} \det g &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \\ &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = \left| \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|^2 > 0 \end{aligned}$$

Додатна визначеність першої фундаментальної форми еквівалентна регулярності параметрично заданої поверхні.

$$3) \quad \langle d\vec{f}, d\vec{f} \rangle = \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2 \rangle = g,$$

тобто,  $g = df^2$

4) *Тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми*

Зробимо регулярну заміну координат на поверхні  $F$ :

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

запишемо радіус-вектор поверхні  $F$  в новій системі координат

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \tilde{\vec{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

і обчислимо коефіцієнти першої фундаментальної форми в нових координатах:

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^j} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} + \\ &+ \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} = \\ &= g_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + g_{12} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} + g_{21} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + g_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми поверхні:

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

В матричній формі той же закон записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g} = J^t \cdot g \cdot J$$

Додатна визначеність і симетричність першої фундаментальної форми не залежать від вибору локальних координат на поверхні (зберігаються при регулярних замінах координат).

Інваріантність скалярного добутку – узгодженість тензорних законів зміни координат для дотичних векторів і для першої фундаментальної форми (як білінійної диференціальної форми):

$$\begin{aligned}
 & \left( \tilde{X}^1 \tilde{X}^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} = \\
 & = \left( X^1 X^2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \\
 & = \left( X^1 X^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5) Вектори в дотичній площині поверхні представляються своїми *внутрішніми* координатами відносно канонічного базису  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$  в дотичній площині і *зовнішніми* координатами відносно фіксованого базису в евклідовому просторі  $\mathbb{R}^3$ . Обчислення скалярного добутку дотичних векторів в термінах внутрішніх координат за допомогою першої фундаментальної форми поверхні і в термінах зовнішніх координат за допомогою евклідового скалярного добутку в  $\mathbb{R}^3$  призводить до однакового результату.

Тому інколи застосовують термін, що перша фундаментальна форма поверхні *породжується* із евклідового скалярного добутку в обхопному просторі  $\mathbb{R}^3$ .

6) Канонічний базис  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$  в дотичній площині поверхні не є, взагалі кажучи, ортонормованим. Величини  $g_{ij}$  – це елементи відповідної матриці Грама для базисних векторів  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ .

7) Перша фундаментальна форма поверхні не залежить від її розташування в просторі  $\mathbb{R}^3$ .

Дійсно, нехай в нас є поверхня  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ .

Застосуємо до неї ортогональне перетворення (обертання, симетрію) та паралельний перенос в  $\mathbb{R}^3$ . Отримаємо нову поверхню  $F^*$  з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}^*(u^1, u^2) = W \vec{f}(u^1, u^2) + \vec{c},$$

де  $W \in O(3)$ ,  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ .

Маємо:

$$df^* = Wdf$$

$$g^* = \langle df^*, df^* \rangle = \langle Wdf, Wdf \rangle = \langle df, df \rangle = g$$

оскільки ортогональне перетворення  $W \in O(3)$  зберігає скалярний добуток.

## Підсумок

Для будь-якої регулярної параметрично заданої поверхні  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$  обчислюється перша фундаментальна форма:

$$g = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2$$

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Геометричний сенс – перша фундаментальна форма визначає скалярний добуток векторів в дотичній площині в кожній точці на поверхні.

**Перспектива.** Перша фундаментальна форма використовується при обчисленні геометричних величин поверхні, де задіяний скалярний добуток векторів:

- 1) довжина кривих, розташованих на поверхні,
- 2) кут між кривими, що розташовані на поверхні,
- 3) площа області на поверхні.

## Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

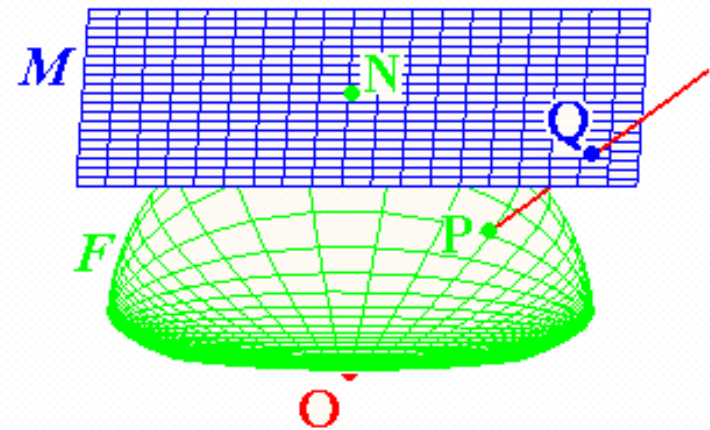
**Задача 12.1.** Перевірити, що центральна проекція відкритої півсфери на дотичну площину сфери в полюсі дійсно представляється описаними в *Прикладі 1* функціями:

Півсфера:

$$\begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & 0 < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

Площина: 
$$\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2, & -\infty < v^1 < \infty \\ x^3 = r & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

Відображення: 
$$\begin{cases} v^1 = r \cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r \cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$$



Перевірити бієктивність відображення.

Перевірити регулярність відображення.

Дослідити, які лінії на півсфері є прообразами прямих ліній на площині.

Зробити заміну координат  $u^1 = u^1(v^1, v^2)$ ,  $u^2 = u^2(v^1, v^2)$  на півсфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на півсфері після заміни координат.

**Задача 12.2.** Розглянемо вертикальну проекцію відкритої півсфери на горизонтальну координатну площину.

Півсфера в «географічних» координатах: 
$$\begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & 0 < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

Площина в полярних координатах: 
$$\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2, & -\infty < v^1 < \infty \\ x^3 = 0 & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

Перевірити бієктивність відображення.

Записати аналітичне представлення заданого відображення відносно вказаних координат.

Перевірити регулярність відображення.

Зробити заміну координат  $u^1 = u^1(v^1, v^2)$ ,  $u^2 = u^2(v^1, v^2)$  на півсфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на півсфері після заміни координат.

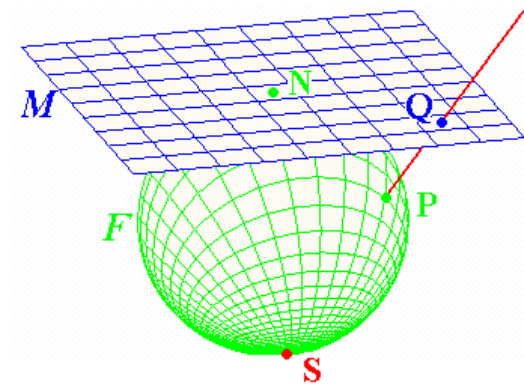
**Задача 12.3.** Перевірити, що стереографічна проекція сфери на дотичну площину сфери в полюсі дійсно представляється описаними в *Прикладі 2* функціями:

$$\text{Сфера: } \begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2, & -\infty < v^1 < \infty \\ x^3 = r & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

Відображення:

$$\begin{cases} v^1 = 2r \frac{\cos u^1}{1 + \sin u^1} \cos u^2 \\ v^2 = 2r \frac{\cos u^1}{1 + \sin u^1} \sin u^2 \end{cases}$$



Перевірити бієктивність відображення.  
Перевірити регулярність відображення.

Дослідити, які лінії на сфері є прообразами прямих ліній та кіл на площині.

Зробити заміну координат  $u^1 = u^1(v^1, v^2)$ ,  $u^2 = u^2(v^1, v^2)$  на сфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

Дослідити, які лінії на площині є образами паралелелей і меридіанів на сфері.

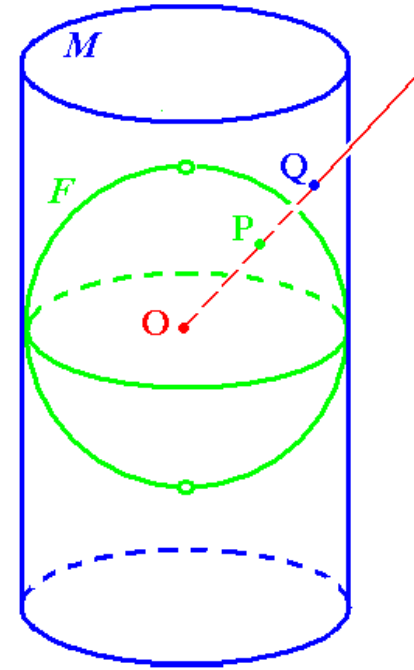
Зробити заміну координат  $v^1 = v^1(u^1, u^2)$ ,  $v^2 = v^2(u^1, u^2)$  на площині, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

**Задача 12.4.** Перевірити, що центральна проекція сфери на дотичний вздовж екватора циліндр дійсно представляється описаними в *Прикладі 3* функціями:

$$\text{Сфера: } \begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2, & -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ x^3 = r \sin u^1 & 0 < u^2 < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r \cos v^1 \\ x^2 = r \sin v^1, & 0 < v^1 < 2\pi \\ x^3 = v^2 & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r \tan u^1 \end{cases}$$



Перевірити визначеність і бієктивність відображення.

Записати аналітичне представлення заданого відображення відносно вказаних координат.

Перевірити регулярність відображення.

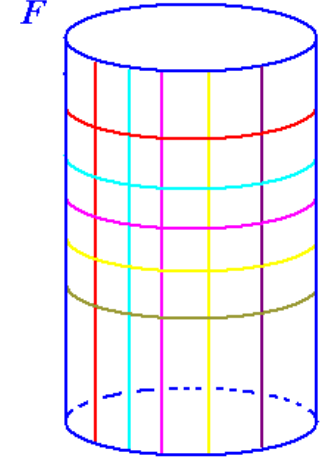
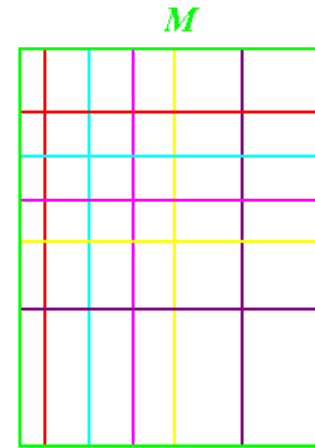
Зробити заміну координат  $u^1 = u^1(v^1, v^2)$ ,  $u^2 = u^2(v^1, v^2)$  на сфері, так, щоб відображення задавалось за рівністю координат. Дослідити, яка сітка координатних ліній виникне на сфері після заміни координат.

**Задача 12.5.** Розглянемо відображення нагортання (накриття) площини на циліндр, описане в *Прикладі 4*.

$$\text{Площина: } \begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = 0, & 0 < u^1 < 2\pi \\ x^3 = u^2 & -\infty < u^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Циліндр: } \begin{cases} x^1 = r \cos v^1 \\ x^2 = r \sin v^1, & 0 < v^1 < 2\pi \\ x^3 = v^2 & -\infty < v^2 < \infty \end{cases}$$

$$\text{Відображення: } \begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$



Перевірити визначеність і бієктивність відображення.

Описати прообраз довільної точки циліндра.

Перевірити регулярність відображення.

**Задача 12.6.** Обчислити першу фундаментальну форму площини  $F$  з радіус-вектором (афінні координати)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1^1 u^1 + a_2^1 u^2 + c^1 \\ a_1^2 u^1 + a_2^2 u^2 + c^2 \\ a_1^3 u^1 + a_2^3 u^2 + c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \cdot u^1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \cdot u^2 + \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = \vec{a}_1 \cdot u^1 + \vec{a}_2 \cdot u^2 + \vec{c}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

**Задача 12.7.** Обчислити першу фундаментальну форму кругового циліндра  $F$ , заданого параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cos u^1 \\ x^2 = R \sin u^1 \\ x^3 = u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

**Задача 12.8.** Обчислити першу фундаментальну форму сфери  $F$  з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos u^1 \cos u^2 \\ R \cos u^1 \sin u^2 \\ R \sin u^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{aligned}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, що поверхня є регулярно параметризованою.

**Задача 12.9.** Обчислити першу фундаментальну форму наступних поверхонь, заданих параметрично:

1) катеноїд

$$\begin{cases} x^1 = R \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R \cosh u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R u^1 \end{cases}$$

3) поверхня Бельтрамі

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) \end{cases}$$

2) гелікоїд

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \omega u^2 \end{cases}$$

4) поверхня Діні

$$\begin{cases} x^1 = \frac{R}{\cosh u^1} \cos u^2 \\ x^2 = \frac{R}{\cosh u^1} \sin u^2 \\ x^3 = R(u^1 - \tanh u^1) + \omega u^2 \end{cases}$$

За допомогою першої фундаментальної форми пересвідчитись, чи поверхня є регулярно параметризованою.

### Задача 12.10.

1) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = f(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}$$

2) Обчислити першу фундаментальну форму загальної поверхні гвинтового обертання, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = f(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) + \omega u^2 \end{cases}$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

**Задача 12.11.** Обчислити першу фундаментальну форму загальної циліндричної поверхні  $F$  з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{c} .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

**Задача 12.12.** Обчислити першу фундаментальну форму загальної конічної поверхні  $F$  з радіус-вектором

$$\vec{x} = u^2 \cdot \vec{\rho}(u^1) .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

**Задача 12.13.** Обчислити першу фундаментальну форму загальної торсової поверхні  $F$  з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\rho}'(u^1) .$$

Проаналізувати регулярність поверхні за допомогою першої фундаментальної форми.

**Задача 12.14.** Розглянемо площину  $F$ , параметризовану декартовими координатами  $(u^1, u^2)$  так, що перша фундаментальна форма поверхні має вигляд

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні  $F$  при переході від декартових координат  $(u^1, u^2)$  до полярних координат  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases} \quad ?$$

**Задача 12.15.** Розглянемо катеноїд  $F$  (або якусь іншу поверхню), перша фундаментальна форма якого має вигляд

$$g = \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2.$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма катеноїда  $F$  заміни координат за формулами

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \sinh u^1 \\ \tilde{u}^2 = u^2 \end{cases} \quad ?$$

**Задача 12.16.** Розглянемо поверхню  $F$ , перша фундаментальна форма якої має вигляд

$$g = \frac{1}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2} (du^2)^2$$

Як буде виглядати перша фундаментальна форма поверхні  $F$  при переході від декартових координат  $(u^1, u^2)$  до полярних координат  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  за формулами

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^2 \\ u^2 = e^{\tilde{u}^1} \end{cases} \quad ?$$

**Задача 12.17.** Доведіть, що якщо до поверхні  $F$  застосувати гомотетію з коефіцієнтом  $\lambda > 0$  у просторі  $\mathbb{R}^3$ , то її перша фундаментальна форма (усі її коефіцієнти одночасно) домножиться на  $\lambda^2$ .