

Мінімальні підмноговиди

(і підмноговиди з паралельним полем середньої кривини)

Варіації об'єму і мінімальності
орієнтованості

лев. Творають, що підмноговид (M, χ) у $(\bar{M}, \bar{g})$ мінімізує об'єм, якщо $\forall$ кубовної $D \subset M$ і $\forall$ підмноговида $(\tilde{M}, \tilde{\chi})$ у $\bar{M}$ разом з кубовною $\tilde{D} \subset \tilde{M}$ такою, що $\chi(\partial D) = \tilde{\chi}(\partial \tilde{D})$
 $Vol_g(D) \leq Vol_{\tilde{g}}(\tilde{D})$



(це рівності об'єму відносно певних
функц. форм $g = \chi^* \bar{g}$ і $\tilde{g} = \tilde{\chi}^* \bar{g}$ відр.)

лев. Варіацією (з компактним носієм) підмноговида (M, χ) у $(\bar{M}, \bar{g})$ будемо називати $B \in C^\infty(M \times (-\epsilon, \epsilon), \bar{M})$ ($\epsilon > 0$)
таким, що

- $\exists$ кубовна $D \subset M$ така, що $B(p, s) = \chi(p) \quad \forall p \notin \text{int } D$
(зокрема, $p \in \partial D$) і $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

$$- G(p, 0) = \chi(p) \quad \forall p \in M.$$

$$- \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \chi_s : M \rightarrow \bar{M} : p \mapsto G(p, s) - \text{затуплення}$$

Рем. Показано $\forall s \quad (M, \chi_s)$ - римановий (і $\chi_0 = \chi$). Нехай

$g_s := \chi_s^* \bar{g}$ - нові метрики. Розглянемо функцію

$$s \mapsto \text{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad (*)$$

$$\int_{\mathcal{D}} dV_{g_s} \quad (\text{це } dV_{g_s} - \text{різн. ф. об'єму } g_s).$$

За побудовою, форма мажорантна (це випливає, наприклад, з нерівності у лок. коорд.). Як і для варіацій довжин кривої, можна розглянути першу і другу варіації об'єму

$$\mathcal{D} : \quad \delta \text{Vol}(\mathcal{D}) := \frac{d}{ds} \text{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \Big|_{s=0} \quad \text{і}$$

$$\delta^2 \text{Vol}(\mathcal{D}) := \frac{d^2}{ds^2} \text{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \Big|_{s=0}$$

(для фікс. G). За лем., якщо (M, χ) мінімізує об'єм, то $\forall s \quad \text{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \geq \text{Vol}_{g_0}(\mathcal{D})$, тобто 0 - точка мінімуму ф-ції (*).

Сол. Якщо (M, γ) мінімізує об'єм, то $\forall$ варіації (i, VQ)
 $\delta \text{Vol}(Q) = 0$ і $\delta^2 \text{Vol}(Q) \geq 0$.

Якщо для деякої варіації $G : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}$ ($u_0 = \gamma$
за нескінченно γ та Q для кривої Q) $\delta \text{Vol}(Q) = 0$ і $\delta^2 \text{Vol}(Q) \geq 0$,
то $\exists \epsilon' > 0 : \forall s \in (-\epsilon', \epsilon') \quad \text{Vol}_{g_s}(Q) \geq \text{Vol}_{g_0}(Q)$.

Рем. Також якщо для $\forall$ варіації $\delta \text{Vol}(Q) = 0$ і $\delta^2 \text{Vol}(Q) \geq 0$,
то (M, γ) мінімізує об'єм "серед ~~ближніх~~ ^{підпорядкованих}", що
утворюються з γ за допомогою варіації з достатньо
маленьким ϵ . Пер. з задачею пошуку найкоротшого γ
рід. геометрії: навіть якщо група варіацій 
 ≥ 0 , кожен з них може не бути найкоротшим "мобільно"
(зв'язні лінії на циліндрі). $\sqrt{\epsilon^3}$

Рем. Проблема мінімізації об'єму фігури має пов'язані
(узв'язані) мильні плівки. Зокрема:

Th. (Задача Тлато; Дунлас, Рого, 1930 -ті). ^(a) В вкладенні замкненої кривої $\gamma: S^1 \rightarrow E^3$ $\exists$ поверхня $\gamma(S^1)$ з ~~меншою~~ (D, ψ) у E^3 , що мінімізує площу $\psi(D)$ і $\psi(\partial D) = \gamma(S^1)$. Rem. Це вірно і для неперіодичних кривих і пов-щ. Rem. Демонструє габ., наприклад,

А. Пунсани, А. Раренко. Елементи геометрії та топології кривих і поверхонь; Т. Colding, W. Minicozzi. A course in minimal surfaces.

Рл. (M, ψ) у $(\bar{M}, \bar{g})$ мінімізує об'єм $\Rightarrow$ його поле середньої кривини $H = 0$.

► M орієнтований, дає лок. коорд. у кожному пункті з атласів, що відповідають орієнтації.

Зауважимо: $\forall$ варіації $\sigma: M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}$ у лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на $U \subset M$ якщо позначити $u^i \psi_z G_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{i,j}^T$ лок. n -ю $T_x M$ g_z , то $\varphi_z := \sqrt{\det G_{ij}} / \sqrt{\det g_{ij}^0}$ не

змінюється при переході до інших лок. коорд. $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ на $\tilde{u}$:
 на $u \cap \tilde{u}$ $\tilde{G}_3 = C^T G_3 C \quad \forall s$, де $C = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^{\bar{j}}} \right)_{i, \bar{j}=1}^n$ ($\det C > 0$ з
 орієнт.), маємо $\sqrt{\det \tilde{G}_3} = \det C \sqrt{\det G_3}$, і $\tilde{G}_0^{-1} = C^{-1} G_0^{-1} (C^{-1})^T$,
 маємо $\sqrt{\det \tilde{G}_0^{-1}} = \det C^{-1} \sqrt{\det G_0^{-1}}$. Отже, $\varphi_s : M \rightarrow \mathbb{R}$ —

коректно визначена, значна (у м.ч. за s), і $\boxed{\int_D \sqrt{\det G_3} \sqrt{\det G_0^{-1}} = \sqrt{\det G_3} \sqrt{\det G_0^{-1}}}$

$dV_{g_3} = \sqrt{\det G_3} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\det G_3} \sqrt{\det G_0^{-1}} \sqrt{\det G_0} du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \varphi_s dV_{g_0}$.
 (на $\forall$ коорд. оклі, а отже на M). Тому

$$\delta \text{Vol}(\mathcal{D}) = \frac{d}{ds} \int_{\mathcal{D}} dV_{g_3} \Big|_{s=0} = \int_{\mathcal{D}} \frac{d}{ds} \varphi_s \Big|_{s=0} dV_{g_0}.$$

$\forall p \in M$ оберемо лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на U $\exists p$ так, що
 на U заданий лок. ортонорм. базис норм. полів $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^q$, і
 $\psi(U) \subset B_\delta^N(\psi(p))$ — кузовий норм. окіл з норм. координатами
 $(x^1, \dots, x^{n+q})$. Зокрема, ψ має с.кр. $\bar{\Gamma}_{ab}^c(\psi(p)) = 0 \quad \forall a, b, c$.
 (гійсно, ψ норм. коорд. $\psi v \mapsto (tv^1, \dots, tv^{n+q})$ —

- геодезичні, тому для нас важливим є рівняння

$$0 + \bar{\Gamma}_{bc}^a(t v^1, \dots, t v^{n+q}) v^b v^c = 0, \quad a = \overline{1, n+q}$$

При $t=0$: $\bar{\Gamma}_{bc}^a(0, \dots, 0) v^b v^c = 0 \quad \forall (v^1, \dots, v^{n+q})$, тобто

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = 0 \quad \forall a, b, c = \overline{1, n+q}, \quad \text{це } i \in \text{точка } \gamma(p)$$

$(0, \dots, 0)$

(Відхилення)

У області $\mathcal{D}$ ($p \in \mathcal{D} \subset U$) оберемо якийсь кубічний сніп p
(наприклад, прообраз під цієї коорд. відобр. евл. криві в $\mathbb{R}^n$)

Нехай $w \in C^\infty(M)$ - якась гладка ф-ція Лисса на $p \in$

$M \setminus \mathcal{D}$, тобто $\exists$ відкр. $W \subset V$ такі що $p \in W, \bar{W} \subset V, \bar{V} \subset \mathcal{D}$,

і $w=1$ на $\bar{W}$, $w=0$ на $M \setminus \bar{V}$. $\overline{w(M)} \subset [0, 1]$ Визначимо варіацію

$$\sigma(p', s) := \begin{cases} \psi^{-1}(x^1(p') + s w(p') \xi_2^1(p'), \dots, x^{n+q}(p') + s w(p') \xi_2^{n+q}(p')) & p' \in U; \\ \gamma(p'), & p' \notin U \end{cases}$$

ψ - коорд. відобр., що відповідає $(x^1, \dots, x^{n+q})$
Є обрано так, щоб було визначено

для якогось $\alpha = \overline{1, q}$, де $(x^1, \dots, x^{n+q})$ - лок. задання γ

і $\xi_2 = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}$. Тобто локально на U це $\gamma + s w(\xi_2^1, \dots, \xi_2^{n+q})$.
За власт. w , воно коректно визначене і гладке.

Всп. Могла обрати $\varepsilon > 0$, так, що $\forall \vartheta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\psi_\vartheta = \psi(\cdot, \vartheta)$ — замурена.

Значайно, за побудовою, $\psi_0 = \psi(\cdot, 0) = \psi$, і $\psi(\cdot, \vartheta) = \psi$ за нехачи V (зокрема, на ∂D). Отже, це варіація.

Піднесемо φ_ϑ для максі ψ на U $\forall i = \overline{1, n}$

$$(\psi_\vartheta)_i = (\psi_\vartheta)_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i} + \vartheta \frac{\partial w}{\partial u^i} \xi_a + \vartheta w \frac{\partial \xi_a}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Оскільки $\bar{\Gamma}_{ab}^c(\psi(P)) = 0 \quad \forall a, b, c$:

$$(\psi_\vartheta)_i(P) = (\psi_i + \vartheta \frac{\partial w}{\partial u^i} \xi_a + \vartheta w \xi_{a,i})(P)$$

можу познати. $\forall i, j = \overline{1, n}$, оскільки $\bar{g}(\psi_i, \xi_a) = 0 \quad \forall i, a$ за Бейтхармена:

$$(g_\vartheta)_{ij}(P) = \bar{g}_{\psi(P)}((\psi_\vartheta)_i(P), (\psi_\vartheta)_j(P)) = \left(\bar{g}(\psi_i, \psi_j) + \vartheta w \right.$$

$$\bar{g}(\psi_i, \xi_{a,j}) + \vartheta w \cdot \bar{g}(\psi_j, \xi_{a,i}) + \vartheta^2 \dots \left. \right)(P) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow 0} (\bar{g}_{ij} - 2\vartheta w \bar{g}(\psi_i, b_{jk}^\alpha g^{kl} \psi_e) - \vartheta w \bar{g}(\psi_j, b_{ik}^\alpha g^{kl} \psi_e))(P) + \bar{o}(\vartheta) =$$

$$= [\bar{g}(\psi_i, b_{jk}^\alpha g^{kl} \psi_e) = b_{jk}^\alpha g^{kl} g_{li} = b_{ji}^\alpha - \text{сум. за } i, j] =$$

$$\xrightarrow{\vartheta \rightarrow 0} (\bar{g}_{ij}(P) - 2\vartheta w(P) b_{ij}^\alpha(P) + \bar{o}(\vartheta)). \quad \text{Значайно, що } w(P) = 1$$

Але цей вираз не залежить від лок. коорд на $\bar{M}$. Отже, і для будь-якої точки U , обравши норм. коорд. на околі U отримаємо те ж:

$$(g_{ij})_{ij} \xrightarrow{z \rightarrow 0} g_{ij} - 2\beta w b_{ij}^2 + O(\beta) \quad \text{на } U \quad \forall i, j = 1, n.$$

Звідси і за властивостями $\det$ на U

$$\det g_{ij} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \det \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} - 2\beta w \left(\det \begin{pmatrix} b_{11}^2 & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^2 & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \right) + O(\beta) = \det g_{i0} - 2\beta w \underbrace{b_{ij}^2 g^{ij}}_{\text{антеннальна поправка до } g^{ij}} \det g_{i0} + O(\beta). \quad \text{Отже,}$$

$$\det g_{ij} \det g_{i0}^{-1} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1 - 2\beta w b_{ij}^2 g^{ij} + O(\beta) = 1 - 2n\beta w \bar{g}(H, \xi_\alpha) + O(\beta).$$

Корисно: $\varphi_{ij} \Big|_{z=0} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1 - n\beta w \bar{g}(H, \xi_\alpha) + O(\beta).$

Погляди на $U \frac{d}{dz} \varphi_{ij} \Big|_{z=0} = -n w \bar{g}(H, \xi_\alpha)$ (і 0 за несприятливих умов). Отже,

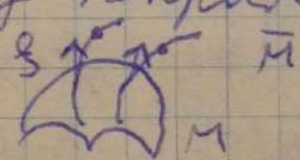
$$\delta \text{Vol}(\mathcal{Q}) = \int_{\mathcal{Q}} \frac{d}{dz} \varphi_{ij} \Big|_{z=0} dV_{g_0} = -n \int_{\mathcal{Q}} w \bar{g}(H, \xi_\alpha) dV_{g_0}.$$

Якщо $H_p \neq 0$. Оскільки $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ - базис $N_p M$, $\exists \alpha: \bar{g}(H, \xi_\alpha) \neq 0$ і зберігає знак на околі $U \ni p$. Зменшувати за необхідності U і побудувати $\mathcal{Q}$ як вище, отримаємо $\delta \text{Vol}(\mathcal{Q}) \neq 0$ (ф.з. $w: M \rightarrow [0, 1]$ і $i=1 \dots p$) $\square$

Рем. Можна було брати варіацію і як для кривих:

$$G(p, \xi) = \exp(p) \left(\int \omega(p) \xi_p \right) \quad (\text{де } \exp - \text{експ. відобр. } (\bar{M}, \bar{g}))$$

для норм. поля ξ , тобто випускаючи у напрямку ξ геодезичні з точки $\gamma(p)$.

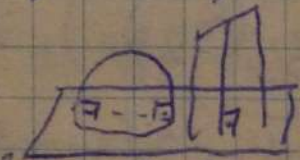


(Впр. Як виглядає тут ρ -ла першої варіації?

($\gamma \in E^{n+q}$ це просто $\gamma + \int \omega \xi$, як у нас).

Лев. Підмноговид (M, γ) зветься мінімальним, якщо $H=0$.

Рем. Це означає застосовує і для неперервних підмноговидів.

Ел. 1. У цілком геодезичних підмноговидах $B=0$, тому і $H=0$. Зокрема, це для підпросторів E^{n+q} , великі сфери у S^{n+q} , підм. баляду  у гіперболічному просторі H^{n+q} (і це усі повні зв. вкладені цілком гео. у них).

2. Гелінсґ у E^3 : $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$: $\gamma(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2)$

(уив. параметризація гелінсґ з E^3 вище)

3. Катеноїд у E^3 : $\gamma: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow E^3$: $(u^1, e^{iu^2}) \mapsto (\cosh u^1 \cos u^2, \cosh u^1 \sin u^2, u^1)$

(пов. обертаюча ланцюгової лінії). Це повні вал. кін. поверхні у E^3 .

4. Тори Кліффорда $\gamma: T^n \rightarrow S^{2n-1} \subset E^{2n}$ - кін. у S^{2n-1} (уив. вище):
 $\gamma \circ \gamma: (e^{iu^1}, \dots, e^{iu^n}) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos u^1, \frac{1}{\sqrt{n}} \sin u^1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \cos u^n, \frac{1}{\sqrt{n}} \sin u^n \right)$, де $\gamma: S^{2n-1} \rightarrow E^{2n}$ -
вкладення - компактні кін. підповерхні у S^{2n-1} (але не у E^{2n})

Попр Клиффорда $\gamma: S^3 \rightarrow E^4$. $\gamma: T^2 \rightarrow S^3$. Дополнительно же
 стандартным вложением $\rho: S^3 \rightarrow E^4$. $T^2 = S^1 \times S^1 = \{e^{iu^1}, e^{iu^2}\}$
 в этих локал. координатах

$$(\rho \circ \gamma)(u^1, u^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u^1, \sin u^1, \cos u^2, \sin u^2).$$

Поскольку в точке $(\rho \circ \gamma)(T^2)$ $\sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1$, где явно

задан $\gamma: T^2 \rightarrow S^3$.

Дадн отождествление $T_p \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$. Заметим, что $i=1, 2$

и $p \in T^2$ и коорд. (u^1, u^2)

$$d_{\gamma(p)} \rho(\gamma_i^{\downarrow p}) = d_{u(p)} \rho(d_p \gamma(\frac{\partial}{\partial u^i})) = d_p(\rho \circ \gamma)(\frac{\partial}{\partial u^i}) = (\rho \circ \gamma)_i,$$

$$d\varphi(\gamma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin u^1, \cos u^1, 0, 0),$$

$$d\varphi(\gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, -\sin u^2, \cos u^2).$$

Якщо g і $\bar{g}$ — I функ. форми (T^2, γ) і (S^3, φ) рівн.,

то для $i, \bar{j} = 1, 2$:

$$g_{i\bar{j}} = \bar{g}(\gamma_i, \gamma_{\bar{j}}) = \langle d\varphi(\gamma_i), d\varphi(\gamma_{\bar{j}}) \rangle. \text{ Тому}$$

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{2}, \quad g_{12} = 0 (= g_{21}).$$

Зокрема, T^2 з метрикою $g = \frac{1}{2}((du^1)^2 + (du^2)^2)$ плоский (ізометричний скалярно E^2). Крім того, оскільки γ_1 і γ_2 лін. незалежні, це занурення (і вкладення, бо $i\gamma_j$ а T^2 компактний).

Оскільки при ототожненні гом. просторів $\mathbb{R}^m$ з $\mathbb{R}^m$ для станд. інерсформи $S^{m-1} \xrightarrow{p} E^m$ маємо $d_q p(T_q S^{m-1}) = p(q)^\perp \quad \forall q \in S^{m-1}$ (бо, диференціюючи $\langle p, p \rangle = 1$, отримуючи $\langle d\varphi(x), p \rangle = 0 \quad \forall$ вект x на сфері),

для $p(u^1, u^2) \in T^2$.

$$d_{\psi(p)} \rho(T_{\psi(p)} S^3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u^1, \sin u^1, \cos u^2, \sin u^2)^\perp$$

ортогонально касательная $d\rho(\xi)$

Значения норм. поля ξ попарно перпендикулярны, кривую γ , $\langle d\rho(\xi), d\rho(\xi) \rangle = \bar{g}(\xi, \xi) = 1$, и $\langle d\rho(\xi_i), d\rho(\xi) \rangle = \bar{g}(\xi_i, \xi) = 0$ для $i=1, 2$. Тогда у функции γ (мажоранты) норма постоянна везде, следовательно,

$$d\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u^1, \sin u^1, -\cos u^2, -\sin u^2).$$

Несомненно $\nabla, \bar{\nabla}, \bar{\bar{\nabla}}$ — рим. зв'язности $g, \bar{g}$ и евкл. м-ка E^4 соответственно; $\psi, \bar{\psi}$ — (скалярные) II функ. форм (T^2, ψ) и $(S^3, \bar{\psi})$ соответственно. Для полей X и Y на T^2 оба разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\nabla}}_X Y &= d\bar{\psi}(\bar{\bar{\nabla}}_X Y) + \bar{\psi}(d\psi(X), d\psi(Y))_{\bar{\psi}} = d\bar{\psi}(d\psi(\nabla_X Y)) + \\ &+ d\bar{\psi}(\psi(X, Y)\xi) + \bar{\psi}(d\psi(X), d\psi(Y))_{\bar{\psi}}, \end{aligned}$$

где ξ — векторное поле норм. поля S^3 в E^4 . Тогда

$$b(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, d\mathcal{P}(\xi) \rangle.$$

Для $X = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^2}$ $\bar{\nabla}_X Y = (P \circ \gamma)_{;2}$ (Со зв'язність маса).

$$(P \circ \gamma)_{;1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos u^1, -\sin u^1, 0, 0), (P \circ \gamma)_{;2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, -\cos u^2, -\sin u^2),$$

$$(P \circ \gamma)_{;12} = (P \circ \gamma)_{;21} = 0. \text{ Демонструючи на } d\mathcal{P}(\xi), \text{ отримуючи,}$$

$$b_{11} = -\frac{1}{2} = -b_{22}, \quad b_{12} = b_{21} = 0.$$

Оскільки $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тому середня кривана

$$H = \frac{1}{2} b_{i\bar{j}} g^{i\bar{j}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = 0. \text{ Поверхня мінімальна.}$$

Впр. Чи буде мінімальним тор Кліффорда $\gamma: T^n \rightarrow S^{2n-1}$.

$$(P \circ \gamma)(u^1, \dots, u^n) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos u^1, \sin u^1, \dots, \cos u^n, \sin u^n)$$

$$(\text{де } T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n = \{ (e^{iu^1}, \dots, e^{iu^n}) \}, \quad S^{2n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}^{2n}).$$

Тн. (Тімотеа Лейсона; Бренгле, 2012) Єдине (з точністю до еквівалентності підпорядкувань і рухів $\mathbb{R}^3$) мінімальне вблання T^2 у S^3 - це тор Кліффорда.

Реш. Эквивалентность (M, γ) и $(\tilde{M}, \tilde{\gamma})$ - се гомеоморфизм F :

$M \rightarrow \tilde{M}$ такий, що $\tilde{\gamma} \circ F = \gamma$.

Впр. Показати, що $\gamma: T^2 \rightarrow S^3$, що задається (у
координатах, як у Еск. 1.)

$$(\gamma \circ \gamma)(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2) -$$

тобто метрику Кліффорда у цьому сенсі.

Вв. Нехай (M, g) - рим. многовид, його лапласіаном (оператором
Лапласа-Бельтрамі) наз. $\Delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, що визначено

$$\Delta f := g^{i\bar{j}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^{\bar{j}}} - \Gamma_{i\bar{j}}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

$\forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Якщо $\Delta f = 0$, f наз. гармонічним.

Впр. Перевірити коректність (незалежність від вибору лок. коорд.)

Ек. При $(M, g) = \mathbb{E}^n$ $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$.

Тн. (Принципи максимума і мінімуму). Якщо f - гарм. на $M \in \text{DSM}$:

$\bar{D}$ -компакт, то $\max_{\bar{D}} f = \max_D f$ і $\min_D f = \min_{\bar{D}} f$. Зокрема, якщо M -компакт, то f помітна.

Рк. $(M, \gamma) \in E^{n+q}$ з $\gamma = (x^1, \dots, x^{n+q})$ мін. $\Leftrightarrow 0 = \Delta \gamma := (\Delta x^1, \dots, \Delta x^{n+q})$

$\Rightarrow$ Використаємо позн. Γ у лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на M :

$$H = \frac{1}{n} g^{ij} \partial_{ij}^2 \gamma_k = \frac{1}{n} \left(\gamma_{ij} - \Gamma_{ij}^k \gamma_k \right) = \frac{1}{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \gamma^a}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \gamma^a}{\partial u^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{n} \Delta x^a \frac{\partial}{\partial x^a}. \text{ Тому } H=0 \Leftrightarrow \Delta x^a = 0 \text{ для } \forall a=1, n+q. \triangle$$

Рем. З цього і Тн. вище ще раз отримуємо (бо $\Delta x^a = 0 \Rightarrow x^a = \text{const}$).

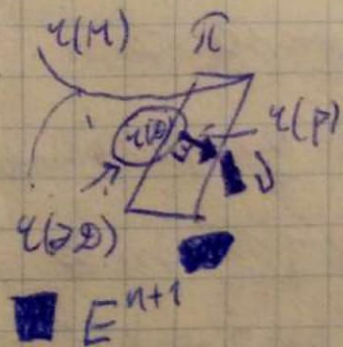
Сот. у E^{n+q} не існує компактних мінімальних гіперповерхонь.
Рем. Звичайно, всі приклади мінімальних у E^{n+q} - компактні.

Мінімальні гіперповерхні у E^{n+1}

Рк. Нехай (M, γ) - мін. гіперповерхня у E^{n+1} . Тоді γ компактної $D \subset M$ $\gamma(D) \subset \text{conv}(\gamma(\partial D))$ (опукла оболонка)

$\Rightarrow \forall \gamma(p) \in \gamma(\partial D) \forall$ опорної гіперплощини Π касе. $\gamma(\partial D)$ у $\gamma(p)$ з норм. вектором ν $k := \langle \gamma - \gamma(p), \nu \rangle \in C^\infty(M)$, і $\Delta k = \langle \Delta \gamma, \nu \rangle = 0$, k -гарм.

Оскільки Π опорна, k зберігає знак на ∂D (насправді, $k \geq 0$), причому $k(p) = 0$.



За припущенням мінімуму,

$$\min_{\mathcal{Q}} h = \min_{\partial \mathcal{Q}} h = 0, \text{ тобто } h \geq 0 \text{ на } \mathcal{Q} \text{ (тому ж, що } i \in \mathcal{Q}(\partial \mathcal{Q}) \text{)},$$

Тоді $\mathcal{Q}(\mathcal{Q})$ також лежить у одному набір-просторі $\text{sign. } \pi$. Оскільки само $\mathcal{Q}(\partial \mathcal{Q})$ - перетин таких набірпросторів, вона містить $\mathcal{Q}(\mathcal{Q})$. $\triangle$

Рем. ця умова дозволяє зрозуміти, які інтер-поверхні точно не мінімальні. Крім того, задаємо,

що середня кривина $H(p) = \frac{1}{n} \text{Tr } A_p$, де A_p - оператор Вейнгартена у точці p відносно $\nu \in N_p M : A_p(\nu) = (A_p)_\nu(\nu)$ для $\nu \in T_p M$ (тобто $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$), тут $|\nu| = 1$.

Або: $H(p) = \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n)$, де $\{k_i\}$ - головні кривини -

власні значення A_p . Ми називали $(M, \mathcal{Q})$ лок. опуклою у REM , якщо аф. потімня інтерплонуна $\mathcal{Q}(p) + \mathcal{Q}(T_p M)$ була опуклою для $\mathcal{Q}(u)$ для всіх $u \ni p$. Зокрема,

Якщо (M, γ) опукла, тобто $\gamma(M) = \exists D$ для опуклої $D \subset E^{n+1}$, вона лок. опукла у $\forall$ точці. Лок. опуклість у $p \Leftrightarrow A_p$ у p певного знаковозначення, тобто усі $k_i \geq 0$ або усі $k_i \leq 0$. ~~Випр.~~ (Випр.) Отже, $H(p) = 0 \Rightarrow k_i = 0 \forall i$.

Сол. Якщо (M, γ) лок. опукла у $p \in H(p) = 0$, то $b_p = 0$.
Якщо зв'язна (M, γ) опукла, це інтегрувана (афіна).

Рем. При $n=2$ мінімальна гауссова кривина $K = k_1 k_2 = -k_1^2 \leq 0$.

Рем. Розглянемо ядро задані інтегровальні, тобто $\gamma: U \rightarrow E^{n+1}$, де $U \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита:

$$\gamma(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))$$

для $f \in C^\infty(U)$. Вони виражені ^{співч.} $(x^1, \dots, x^n)$ - ~~як і інтегральні локально має такий вигляд за T_n про рані~~ ^{модальні координати}. При цьому $\forall i, j = 1, n$

$$\gamma_i = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_i)$$

$$\gamma_{i\bar{j}} = (0, \dots, 0, f_{i\bar{j}})$$

(як і раніше, ототожнено)
 $T_q \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1} \forall q$
і q несе

мы $g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} + f_i f_j$. (Таблица) очевидно

норм. век :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} (-f_1, \dots, -f_n, 1)$$

мы $\forall i, j$

$$b_{ij} = \langle \varphi_{ij}, \xi \rangle = \frac{f_{ij}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \quad (\text{где } \nabla f = (f_1, \dots, f_n))$$

Окислени

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_1^2 & f_1 f_2 & \dots & f_1 f_n \\ f_1 f_2 & 1+f_2^2 & \dots & f_2 f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 f_n & f_2 f_n & \dots & 1+f_n^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \begin{pmatrix} 1+f_2^2+\dots+f_n^2 & -f_1 f_2 & \dots & -f_1 f_n \\ -f_1 f_2 & 1+f_1^2+f_3^2+\dots+f_n^2 & \dots & -f_2 f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_1 f_n & -f_2 f_n & \dots & 1+f_1^2+\dots+f_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{n} b_{ij} g^{ij} = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n f_{ii} (1+f_1^2+\dots+f_{i-1}^2+f_{i+1}^2+\dots+f_n^2) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} f_i f_j \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) \quad (\text{значит, } i\text{-ый член равен: } \frac{f_{ii}(1+f_1^2+\dots+f_n^2) - f_i(f_1 f_{ii} + \dots + f_n f_{ni})}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}})$$

Согласно Тинерс-на $\alpha^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)$ минимальна $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0$$

Рем. Тим губерния евадига. Также ривана

звуть рівняння на лінійно поверхні у гевіректіній
формі.

Ех. 1. Адр. лінійно поверхні: $x^{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i x^i + a_{n+1}$ (невірно)

2. Телісній (локально): $z = \frac{1}{a} \arctg \frac{y}{x} + \pi k$ } невірний (Впр.)

3. Катенісній (локально): $z = \pm \frac{1}{a} \operatorname{arccch} \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Поверхня Мерка: це од'єднання замкнутої поверхні

$z = \ln \frac{\cos \frac{1}{2}(y-l)}{\cos \frac{1}{2}(x-k)}$, де $\max \{|x-k|, |y-l|\} < \frac{\pi}{2}$ для $k, l \in \mathbb{Z}\pi$
таких, що $k+l \in \mathbb{Z}\pi$. Для цих

$$f_x = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(x-k)}, \quad f_y = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(y-l)},$$

$$f_{xx} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(x-k)}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(y-l)}, \quad f_{xy} = 0, \text{ тож}$$

рівняння

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1+f_x^2) = 0$$

виконується.

Наступний слайд - поверхня Мерка, автор: Enrica Maccarato (Міріана) власна робота,
CC BY-SA 3.0.

