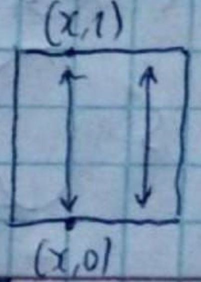
34.4 Побудувати накриття стрічки Мебіуса у циліндром

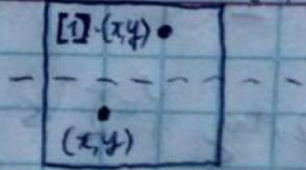
$X = I \times S^1$

$X = I^2/\sim$, де $\sim$: $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x \in I$:



Подіємо на I^2 групою $\mathbb{Z}_2$: $[0] = id$,

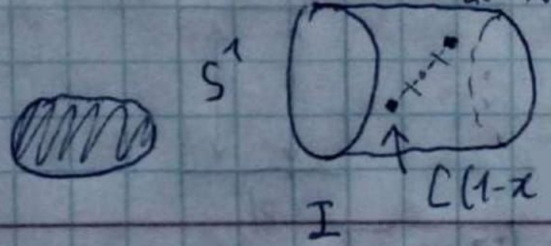
$$[1]\cdot(x,y) = \begin{cases} (1-x,\ y+\frac{1}{2}), & y \le \frac{1}{2} \\ (1-x,\ y-\frac{1}{2}), & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Насправді це не дія, бо $\forall x$ $[1]^2 \cdot (x,0) = [1]\cdot(1-x, \frac{1}{2}) = (x,1) \neq$ $\neq (x,0)$, а $[1]^2 = [0]$. Але $[0]$ і $[1]$ коректно факторизуються:

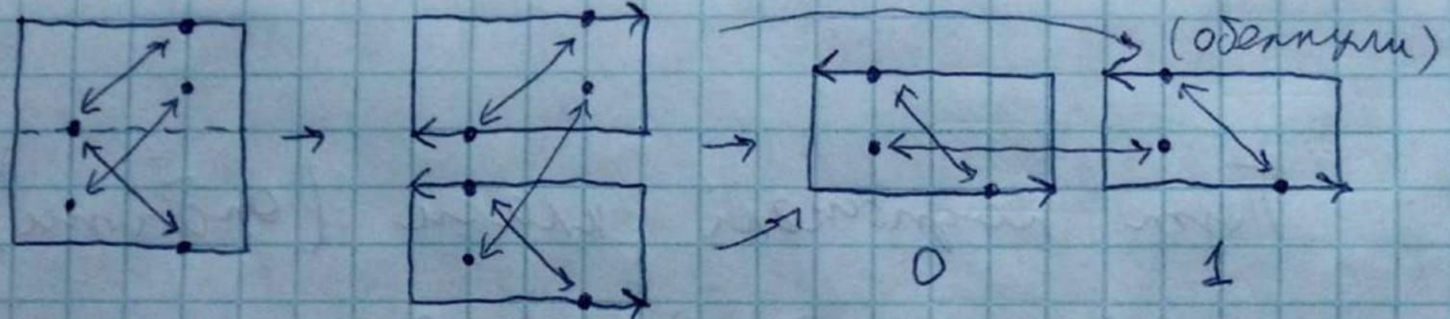
$[1]\cdot(x,0) = (1-x, \frac{1}{2}) = [1]\cdot(x,1)$ $\forall x$, тому визначені на $I\times S^1 = I^2/\sim$, і там вже $[1]^2\cdot[(x,0)] = [(x,1)] = [(x,0)]$, тому це дія. Вона неперервна (факт. неперервного), вільна ($[1]\cdot[(x,y)] \neq [(x,y)]$) на хаусд $I\times S^1$ $\Rightarrow$ цілком розривна, бо $\mathbb{Z}_2$ скінченна.

Тому $(S^1\times I, \underset{[(x,y)]}{S^1\times I}/\mathbb{Z}_2, p)$ – накриття.



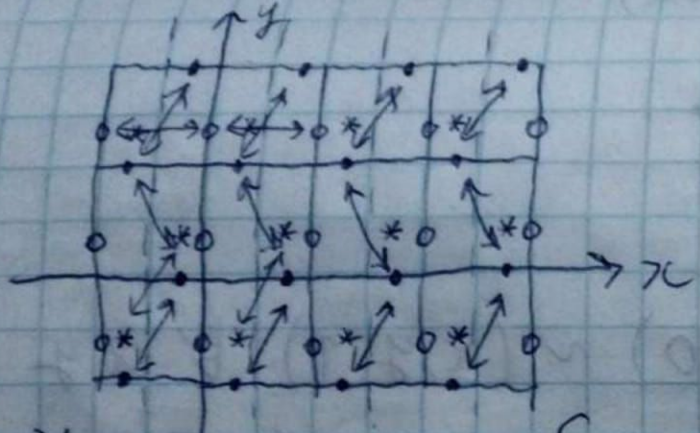
$[1]$ діє на $I\times S^1$ як $(x,y) \mapsto (1-x, -y)$.

При цьому $Y = I\times S^1/\mathbb{Z}_2 = (I^2/\sim)/\mathbb{Z}_2$ гомеоморфна стрічці Мебіуса!



Тобто тепер $Y = I^2 \sqcup I^2 / \sim$, де $(x, y, 0) \sim (x, y, 1)$ $\forall\, x, y$ і $(x, 0, i) \sim (1-x, 1, i)$ $\forall\, x, i = \overline{0,1}$. Склеїмо їх: $Y = I^2/\sim$, де $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ $\forall\, x$, тобто Y – стрічка Мебіуса.
Накриття двохлистове ($\forall\, y$ $|p^{-1}(y)| = 2$).

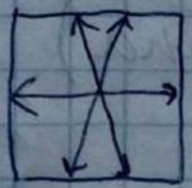
<u>34.7.8</u> Знайти накриття $(\mathbb{R}^2, K^2, p)$ (універсальне накриття пляшки Клейна)



Тут розглянуті класи (орбіти) трьох точок: $\bullet$, $\circ$, $*$.

Це дія групи G, що породжена паралельними перенесеннями на $(k,0)$, $k\in\mathbb{Z}$: $(x,y)\mapsto(x+k,y)$, уздовж Ox та ковзними симетріями відносно вертикальних прямих $x = \frac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$: $(x,y)\mapsto(k-x,\ y+1)$.

Вона перер., цілком розр. $(U = B_{\frac{1}{2}}(x,y))$ діє, і факторпростір ізоморфний



$I^2/\sim \;\cong K^2$.

~~Тому $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2/G, p) \cong (\mathbb{R}^2, K^2, \hat{p})$ - універсальне накр. $\Rightarrow \pi_1(K^2)\cong G$.~~

Покажіте, твірними G є $a: (x,y) \mapsto (1-x, y+1)$ та $b: (x,y) \mapsto (x+1, y)$ (тоді $b^k: (x,y) \mapsto (x+k, y)$ і $b^{k-1} \circ a: (x,y) \mapsto (k-x, y+1)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$). Для них виконане співвідношення $a \circ b \circ a^{-1} \circ b = id$. Дійсно, $(x,y) \overset{b}{\mapsto} (x+1,y) \overset{a^{-1}}{\mapsto} (-x, y-1) \overset{b}{\mapsto} (1-x, y-1) \overset{a}{\mapsto} (x,y)$.

<u>35.7.</u> $\exists$ (X, Y, p) - накр.: X, Y - лін зв., покриття неоднолистове,

тобто $|p^{-1}(y)| > 1$ [$\exists y \Leftrightarrow \forall y$ в силу лін. зв-сті і 34.11)
Тоді Y неоднозв'язний.

$\exists\, x, z:\ x \neq z,\ p(x) = p(z) = y$. Лін зв-сть $X \Rightarrow \exists$ шлях $f:$
$I \to X:\ f(0) = x,\ f(1) = z$. Тоді $p \circ f$ – петля в y:
$[p\circ f] \in \pi_1(Y, y)$. $\nearrow$ $[p \circ f] = [e_y]$, тобто $p \circ f \sim e_y$. За
Теор. про накриваючу гомотопію, тоді $f \sim e_x$, бо вони
накривають $p \circ f$ і e_y відп.: $p \circ e_x = e_y$ і мають початок у $f(0) = e_x(0) = x$. Зокрема, тоді у них спільний
кінець: $f(1) = e_x(1) = x \neq z$ $\lightning$. Отже, $[p\circ f] \neq [e_y] \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi_1(Y, y) \neq \{[e_y]\}$.
(Насправді це просто Тв. 9.2. лекції).

35.6 Для накриття $(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, p)$, де $p(z) = e^z$, знайти
піднятя шляху $f: t \mapsto 2 - t$.

$f(0) = 2$. $p^{-1}(f(0)) = \{\ln 2 + 2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Нехай $\tilde{f}(t) = u(t) + i\,v(t)$ задає підняття f:
$(\tilde{F} \in C(I, \mathbb{C}))$.

$\forall t \in I \quad z-t = f(t) = (p \circ \tilde{f})(t) = e^{u(t)} e^{i v(t)} = e^{u(t)} (\cos v(t) +$
$+ i \sin v(t))$, тобто $e^{u(t)} \cos v(t) = z-t$, $e^{u(t)} \sin v(t) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin v(t) = 0$.

При цьому $\tilde{f}$ – з початком у $\ln z + 2\pi i k \in p^{-1}(z)$, тобто
$u(0) = \ln z$, $v(0) = 2\pi \cancel{i} k$. Оскільки $\sin v(t) = 0 \ \forall t$ і $v: I \to \mathbb{R}$ непер., $v \equiv 2\pi k \Rightarrow \cos v(t) = 1 \ \forall t$. Тоді $e^{u(t)} = z-t$
$\Rightarrow u(t) = \ln(z-t)$, що узгоджується з $u(0) = \ln z$.
Отже, $\tilde{f}(t) = \ln(z-t) + 2\pi i k$ – підняття f з початком у $\ln z + 2\pi i k$. Впр. 12.5. лекції

41.10ж(1) Описати з точністю до ізоморфності усі накриття S^1 з відміченою точкою 1 (з лін. зв. накриваючими просторами) (точніше, класи ізоморфності).
Згідно з теоремою 12.1. лекції, ці накриття

знаходяться у від відповідності з підгрупами $\pi_1(S^1,1)\simeq\mathbb{Z}$ (далі ототожнюємо її з $\mathbb{Z}$): накриттю (X,S^1,p) з відм. точкою $x\in X$: $p(x)=1$ відповідає $p_*(\pi_1(X,x))\subset\mathbb{Z}$ [бо S^1 лін. зв., лок. лін. зв. і напівлок. однозв.).

Нехай $H\subset\mathbb{Z}$ – підгрупа і $n:=\min\{|k| \mid k\in H, k\neq 0\}$. n визначений і $\in\mathbb{Z}$ $\forall H\neq\{0\}$. Тоді $\forall\, l\in\mathbb{Z}$ $ln\in H$ ($\underbrace{n+\ldots+n}_{l}$ при $l>0$, $-(\underbrace{n+\ldots+n}_{-l})$ при $l<0$ або 0). З іншого боку, якщо $H\ni k\neq ln$, $l\in\mathbb{Z}$, то залишок m від ділення k на n належить до H: $m=k-ln$ для деякого l, $m\neq 0$ і $m<n$ ↯. Отже, $H=n\mathbb{Z}=\{ln \mid l\in\mathbb{Z}\}$ (звичайно, і навпаки, $\forall$ $n\mathbb{Z}$ – підгрупа), включно з $\mathbb{Z}$ при $n=1$.

Як бачили у <u>Ex. 9.3</u> лекцій, $H=n\mathbb{Z}$ відповідає накриття (S^1,S^1,p), де $p(z)=z^n$. Отже, $\forall$ накриття $(S^1,1)$ ізоморфне одному з таких (з відм. точкою $1\to 1$), у т.ч. тривіальному при $n=1$ або універсальному $(\mathbb{R},S^1,p)$, де $p(t)=e^{2\pi i t}$ при $H=\{0\}$.

З'ясуємо підпорядкованість: $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \vdots m$, тобто $n = mk$, $k \in \mathbb{N}$ (також можливо $n=0$, тобто це $\{0\}$). Згідно з рез-тами розділу 10, це $\Leftrightarrow$ (S^1, S^1, p_m) підпорядковане (S^1, S^1, p_n), де $p_n(z) = z^n$, або універсальному $(\mathbb{R}, S^1, p)$ при $n=0$. Тобто $\exists$ накриття (S^1, S^1, q) таке, що $p_n = p_m \circ q$ (або $(\mathbb{R}, S^1, q): p = p_m \circ q$).

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p_n"'] & S^1 \arrow[d, "p_m"] \\ & S^1 \end{tikzcd} \quad \text{або} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & S^1 \arrow[d, "p_m"] \\ & S^1 \end{tikzcd}.$$

Дійсно, для $q: z \mapsto z^k$: $p_m(q(z)) = (z^k)^m = z^n = p_n(z)$ $\forall z$ (відп., $q: t \mapsto e^{\frac{2\pi i t}{m}}$: $p_m(q(t)) = (e^{\frac{2\pi i t}{m}})^m = e^{2\pi i t} = p(z)$ - це теж унів. накриття S^1). Усі підпорядковані універсалькому, а тривіальне – цім. Це частковий порядок, але не повний (не лінійний).

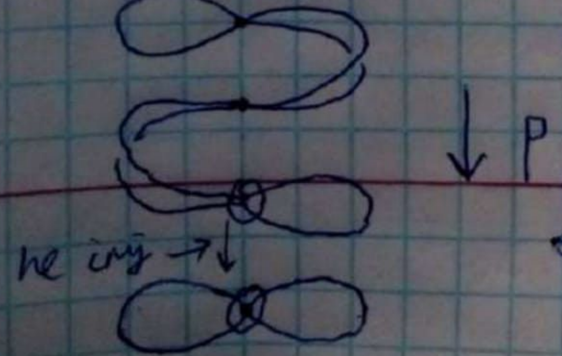
41.11ж (41.15ж, Впр. 11.7 лекцій)

Побудувати трилистове накриття $S^1 \vee S^1$ з лін. зв'язним накриваючим простором, що не має нетривіальних автоморфізмів $\Rightarrow$ не регулярне.

За результатами розділу 11, накриття (X, Y, p) з лін. зв. і лок. лін. зв. X і Y регулярне $\Leftrightarrow$ група автоморфізмів $Aut(X, Y, p)$ діє на $p^{-1}(y)$ транзитивно ($\exists y \in Y \Leftrightarrow \forall y \in Y$) $\Leftrightarrow$ $p_*(\pi_1(X,x))$ нормальна у $\pi_1(Y,y)$ ($\exists x \in p^{-1}(y) \Leftrightarrow \forall x \in p^{-1}(y)$). (Зокрема, усі накриття S^1 регулярні, бо $\pi_1(S^1,x)$ абелева)

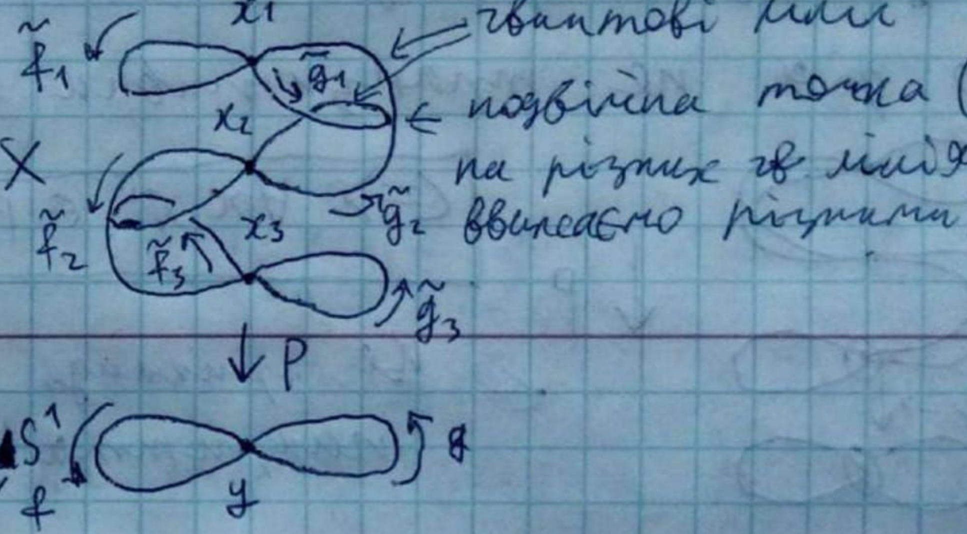
$\boxed{\Leftrightarrow \forall x, x' \in p^{-1}(y) \quad p_*(\pi_1(X,x)) = p_*(\pi_1(X,x'))}$

Якщо автоморфізм лише тривіальний, а шар з 3 точок, то дія не транзитивна $\Rightarrow$ накриття не регулярне.



$\leftarrow$ Це приклад з відповідей, але це не накриття!

Насправді приклад виглядає так:



Тут $\tilde{f}_i, \tilde{g}_i$ — піднятття f, g відп. з початком у x_i, $i=\overline{1,3}$.

Автоморфізм накриття — це $\varphi: X \to X$ — гомеоморфізм:

$p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить точки $\forall$ шару в точки

того ж шару. Розглянемо шар $\{x_1, x_2, x_3\} = p^{-1}(y)$.

$\uparrow$ $\exists$ нетривіальний (нетотожний) автоморфізм φ. Тоді

$\varphi(x_2) \neq x_2$ (бо $\varphi(x_2) = x_2 \Rightarrow \varphi = id_X$ в силу лін зв-ті, див.

лекції), тобто $\varphi(x_2) = x_1$ або x_3. Нехай $\varphi(x_2) = x_1$. Тоді

$\varphi \circ \tilde{f}_2$ — шлях з початком у $\varphi(x_2) = x_1$, і $p \circ \varphi \circ \tilde{f}_2 = p \circ \tilde{f}_2 = f$,

тобто $\varphi \circ \tilde{f}_2$ — піднятття f. З єдиності, оскільки $\tilde{f}_1$ — теж під-

няття f з початком у x_1, $\varphi \circ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1$. Ан-но, $\varphi \circ \tilde{\bar{f}}_3$ — піднятття

$\bar{f}$ з початком у $x_1 \Rightarrow \varphi \circ \tilde{\bar{f}}_3 = \tilde{\bar{f}}_1$. Це суперечить ін'єктивності

φ: $\forall t \in I$ $\varphi(\tilde{f}_2(t)) = \tilde{f}_1(t) = \tilde{\bar{f}}_1(1-t) = \varphi(\tilde{f}_3(1-t))$, але

$\tilde{f}_2(t) \neq \tilde{f}_3(1-t)$ при $t \in (0,1)$. $\downarrow$. Отже, (X, Y, p) нерегулярне.

Для $\varphi(x_2) = x_3$ аналогічно

або бо $\varphi(x_3) = \varphi(x_2) = x_1$

Або: $[f] \in \pi_1(Y, y)$. Піднятття f у x_1 — це петля $\tilde{f}_1$, тому

петля

$[f] \in p_*(\pi_1(X, x_1))$. Але підн. f у x_2 — це $\tilde{f}_2$, не петля. Тому

$[f] \notin p_*(\pi_1(X, x_2))$ (див. лекції) $\Rightarrow p_*(\pi_1(X, x_1)) \neq p_*(\pi_1(X, x_2)) \Rightarrow$

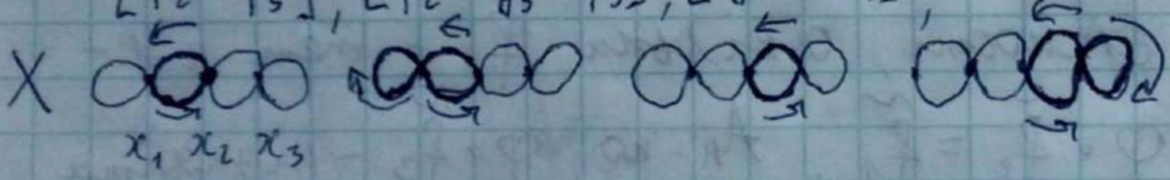
(X, Y, p) нерегулярне.

<u>Або</u>: обчислимо $p_*(\pi_1(X, x_2))$ явно. $X \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$,

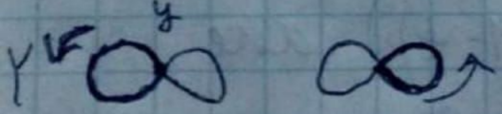
тому $\pi_1(X, x_2)$ – вільна група з 4 твірними. Це, наприклад,

класи петель:

$[\tilde{f}_2 * \tilde{f}_3]$, $[\tilde{f}_2 * \tilde{g}_3 * \tilde{f}_3]$, $[\tilde{g}_2 * \tilde{g}_1]$, $[\tilde{g}_2 * \tilde{\bar{f}}_1 * \tilde{g}_1]$



$\pi_1(Y, y) = \pi_1(S^1 \vee S^1, y) = \langle a, b \rangle$ – вільна гр. з 2 тв., де



$a = [f]$, $b = [g]$

Тому $p_*(\pi_1(X, x_2)) \subset \pi_1(Y, y)$ – підгрупа, що породжена образами

твірних $\pi_1(X, x_2)$. Наприклад, $p_*([\tilde{f}_2 * \tilde{g}_3 * \tilde{f}_3]) = [p \circ (\tilde{f}_2 *$

$* \bar{\tilde{g}}_3 * \tilde{f}_3)] = [(p \circ \tilde{f}_2) * (p \circ \bar{\tilde{g}}_3) * (p \circ \tilde{f}_3)] = [f * \bar{g} * f] =$

$= [f][g]^{-1}[f] = ab^{-1}a$. Ан-но інші. Тому $H := p_*(\pi_1(X, x_2))$ - підгрупа, що породжена $a^2, ab^{-1}a, b^2, ba^{-1}b$ і вона нормальна. Тоді $a \cdot ab^{-1}a \cdot a^{-1} = a^2 b^{-1} \in H \Rightarrow [a^2 \in H] \Rightarrow b^{-1} \in H$. Але це не так, бо $b^{-1} = [\bar{g}]$, а піднятням петлі $\bar{g}$ у $x_2 \in \bar{\tilde{g}}_1$ - не петля $\Rightarrow b^{-1} \notin p_*(\pi_1(X, x_2))$. ↯