Задача 0.1. Розглянемо просту поверхню M^2 в $\mathbb{R}^3$. За визначенням, для кожної точки P на поверхні M^2 існує окіл U, який є топологічно еквівалентним (гомеоморфним) відкритому диску D в $\mathbb{R}^2$.

Окіл U разом з гомеоморфізмом φ: $D \to U$ утворюють *карту* на поверхні M^2 . Набір карт $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$, який покриває усю поверхню M^2, тобто $\bigcup_{j \in J} U_j \supset M$, утворює *атлас* поверхні M^2.

Яку найменшу кількість карт повинен мати атлас, якщо:

1) M^2 – це сфера

2) M^2 – це сфера з однією ручкою, тобто, M^2 – тор

**3)* M^2 – це сфера з двома ручками, тобто, M^2 – крендель

4) M^2 – це сфера з однією виколотою точкою

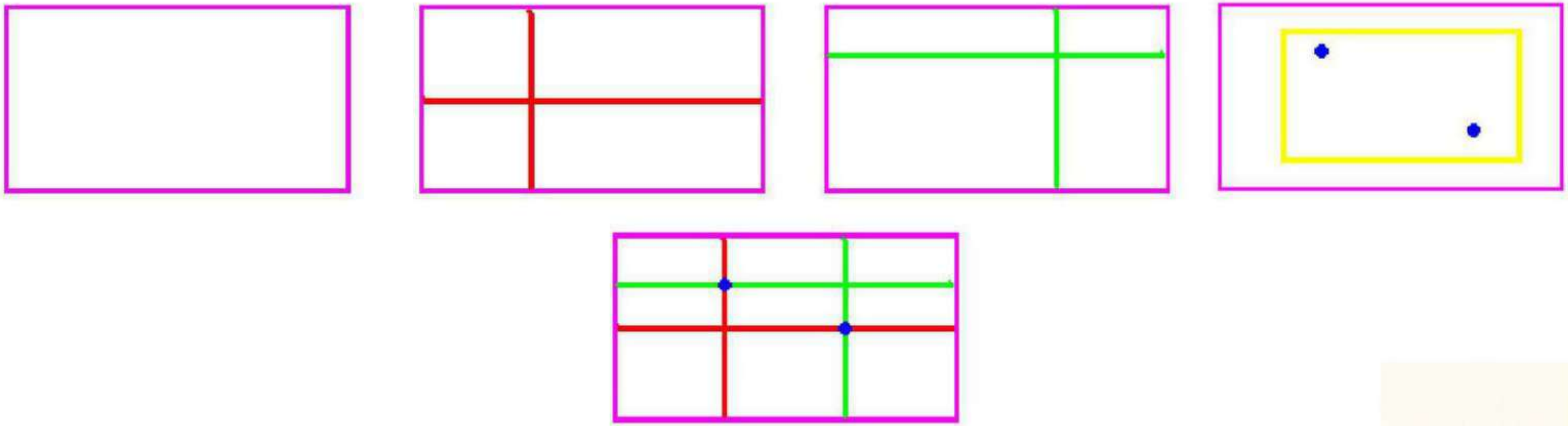
5) M^2 – це сфера з двома виколотими точками

***** *6)* M^2 – це сфера з m ручками та n виколотими точками ?

Зауваження. Інтуїтивно, щоб отримати карту, потрібно взяти диск (круг) на площині і про деформувати його – дозволяється розтягувати, стискувати, викривляти, вигинати, закручувати і т.д., але не можна нічого розривати і не можна нічого склеювати…

Побудова простої поверхні схожа на побудову моделі з пап'є-маше: вирізаємо клаптики (топологічно еквівалентні диску/кругу/квадрату) і поступово наклеюємо їх один на інший так, щоб разом вони утворили якусь складну поверхню.

Top



Задача 0.2.2. Розглянемо поверхню $\widetilde{F}$ в $I\!R^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \qquad \begin{array}{l} -\infty<\widetilde{u}^1<\infty \\ -\infty<\widetilde{u}^2<\infty \end{array}$$

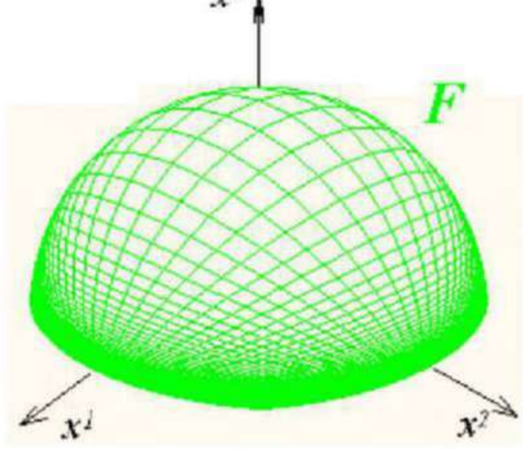
1) Якою є область задання $\widetilde{D}$ поверхні $\widetilde{F}$?

2) Покажіть, що $\widetilde{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $I\!R^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що $\widetilde{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

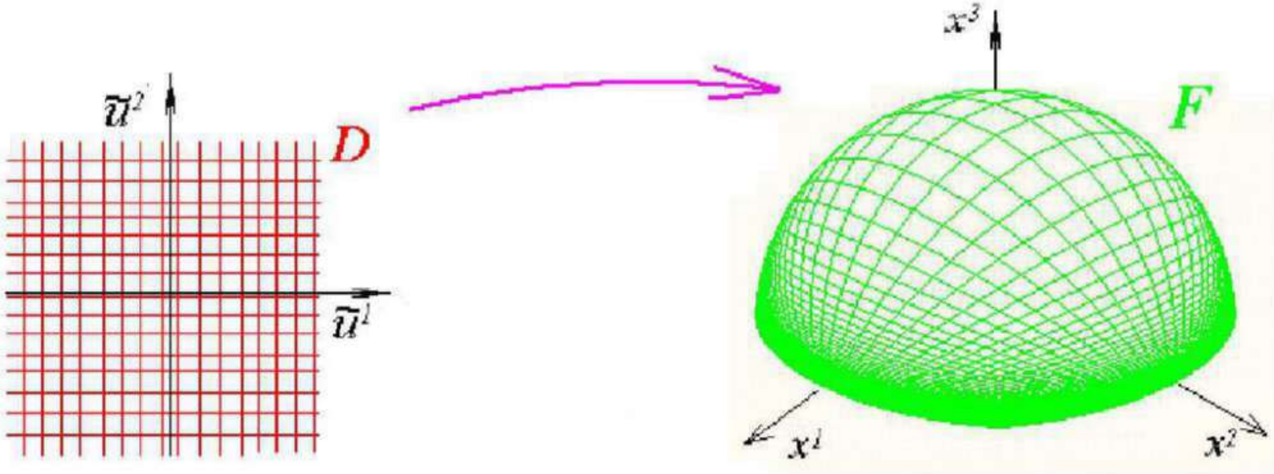
4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\widetilde{F}$?

Розв'язання. Задана поверхня F представляє собою відкриту верхню півсферу



$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2,\ x^3>0.$$

Область задання D поверхні F – це вся площина параметрів $\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2$



Радіус-вектор поверхні F

$$\vec{f}(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \begin{pmatrix} R\dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ R\dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційованою вектор-функцією.

Обчислимо похідні вектор-функції $\vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і перевіримо виконання умови регулярності.

Маємо:

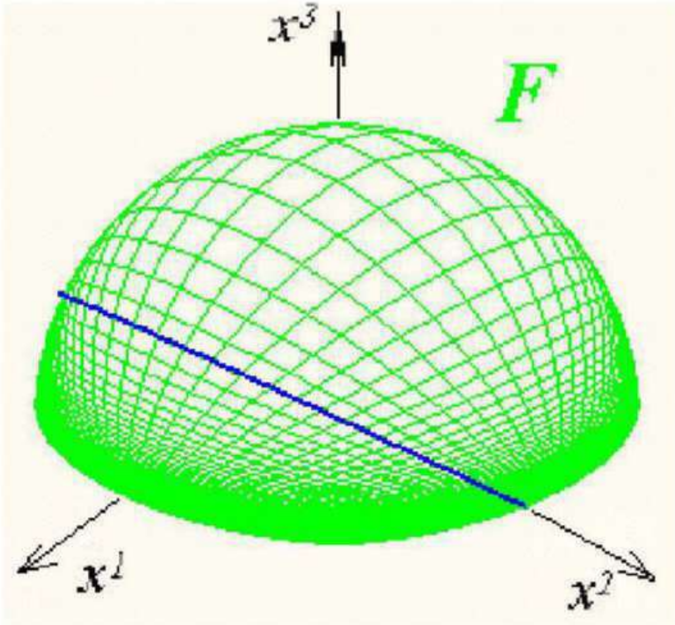
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} = \frac{R}{(\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} 1+(\tilde{u}^2)^2 \\ -\tilde{u}^1\tilde{u}^2 \\ -\tilde{u}^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} = \frac{R}{(\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} -\tilde{u}^1\tilde{u}^2 \\ 1+(\tilde{u}^1)^2 \\ -\tilde{u}^2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2}\right] = \frac{R^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2}\right] \neq \vec{0}$, робимо висновок, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Координатна лінія $\begin{cases} \tilde{u}^1 = c \\ \tilde{u}^2 = t \end{cases}$ на поверхні F задається в просторі $I\!R^3$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \\ R\dfrac{t}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \end{pmatrix}$$

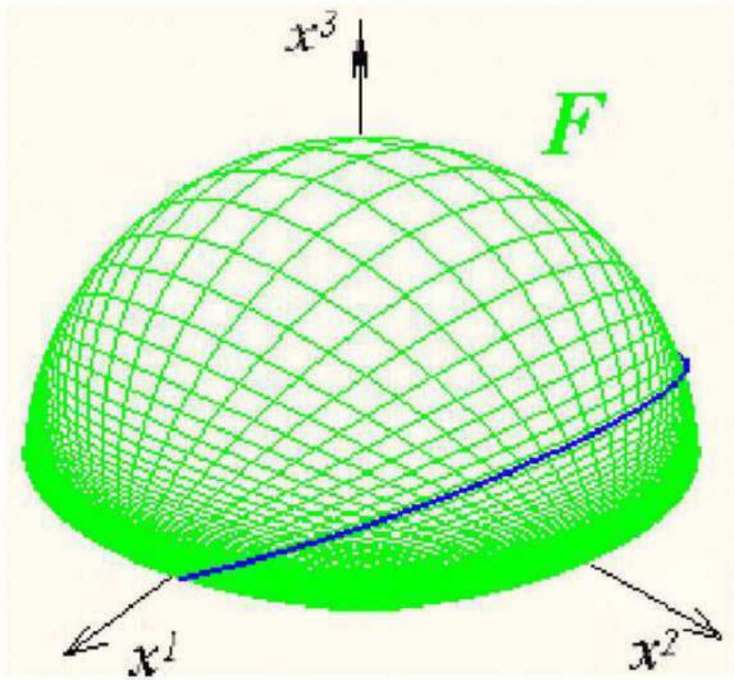


Вказана крива лежить в площині Π: $x^1 - c\,x^3 = 0$ і тому представляє собою півколо – перетин півсфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить координатну пряму x^2. Жмуток площин, що містять координатну пряму x^2, в перетині з півсферою породжують сімейство координатних ліній на півсфері F.

Координатна лінія $\begin{cases} \tilde{u}^1 = t \\ \tilde{u}^2 = c \end{cases}$ на поверхні F задається, як крива в просторі $\mathbb{R}^3$, радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \\ R\dfrac{c}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

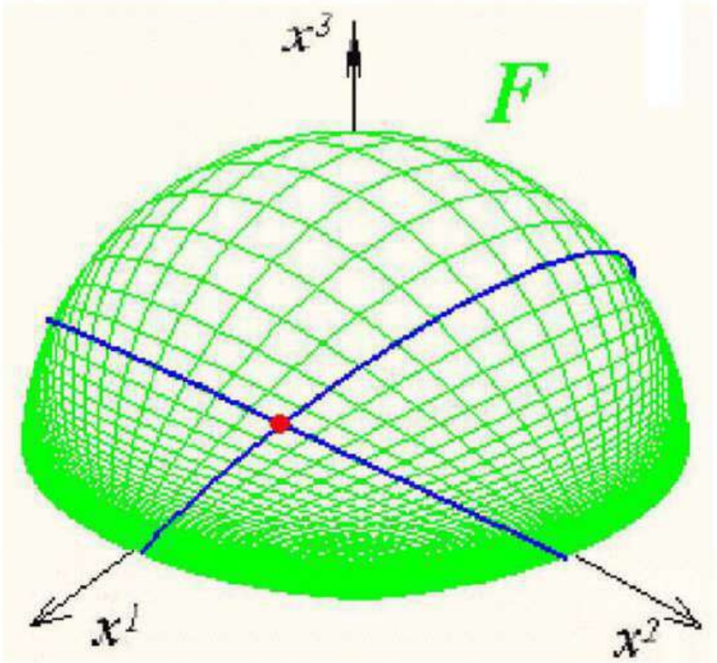


Вказана крива лежить в площині Π: $x^2 - c\,x^3 = 0$ і тому представляє собою півколо – перетин півсфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить координатну пряму x^1. Жмуток площин, що містять координатну пряму x^1, в перетині з півсферою породжують сімейство координатних ліній на півсфері F.

Отже, маємо координатну сітку на півсфері F, утворену з двох сімейств півкіл.

Через кожну точку регулярно параметризованої поверхні F проходить по одній координатній кривій з кожного з двох сімейств координатних ліній.



Зауваження. Якщо через точку півсфери F провести промінь з центра сфери – точки O, то цей промінь перетне горизонтальну площину $x^3=1$ в точці $(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2,1)$

***Задача 0.2.3.** Розглянемо поверхню $\hat{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^1}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty<\hat{u}^1<\infty \\ -\infty<\hat{u}^2<\infty \end{matrix}$$

1) Якою є область задання $\hat{D}$ поверхні $\hat{F}$?

2) Покажіть, що $\hat{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?

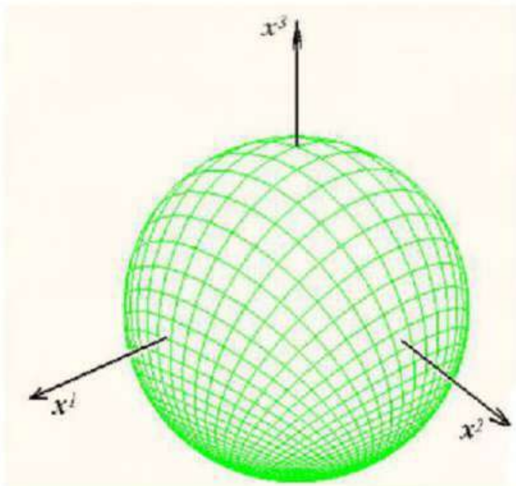
3) Доведіть, що $\hat{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\hat{F}$.

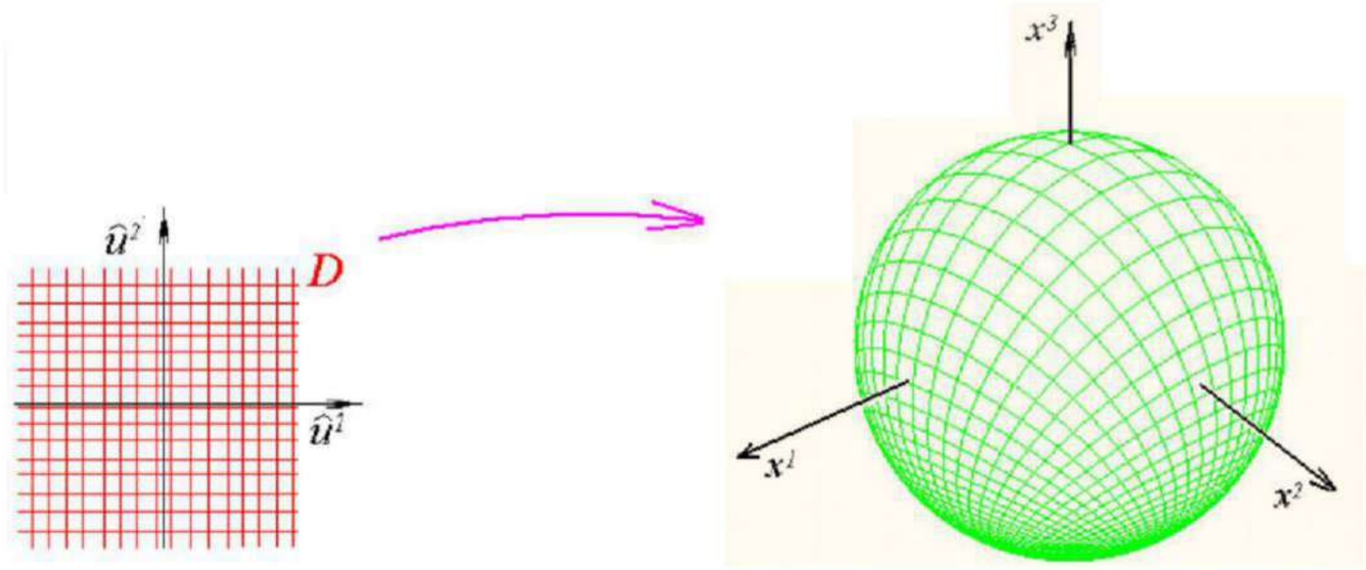
Розв'язання. Задана поверхня F представляє собою сферу

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2$$

без південного полюса $(0,0,-R)$.



Область задання D поверхні F – це вся площина параметрів $\hat{u}^1, \hat{u}^2$



Радіус-вектор поверхні F

$$\vec{f}(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4\hat{u}^1}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ R \cdot \dfrac{4\hat{u}^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційованою вектор-функцією.

Обчислимо похідні вектор-функції $\vec{f}(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ і перевіримо виконання умови регулярності.

Маємо:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \hat{u}^1} = \frac{4R}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4-(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2 \\ -2\hat{u}^1\hat{u}^2 \\ -4\hat{u}^1 \end{pmatrix},$$

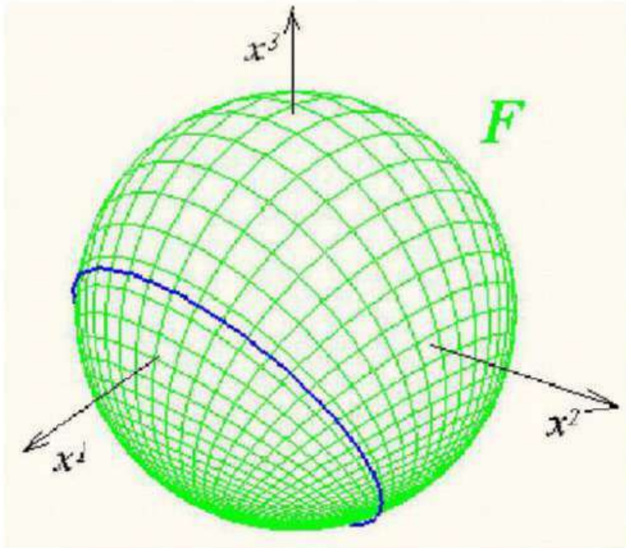
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \hat{u}^2} = \frac{4R}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} -2\hat{u}^1\hat{u}^2 \\ 4+(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2 \\ -4\hat{u}^2 \end{pmatrix}$$

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = \frac{16R^2}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^3} \cdot \begin{pmatrix} 4\hat{u}^1 \\ 4\hat{u}^2 \\ 4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2 \end{pmatrix}$$

Оскільки $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] \neq \vec{0}$, робимо висновок, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Координатна лінія $\begin{cases} \hat{u}^1 = c \\ \hat{u}^2 = t \end{cases}$ на поверхні F задається в просторі $\mathbb{R}^3$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4c}{4 + c^2 + t^2} \\ R \cdot \dfrac{4t}{4 + c^2 + t^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - c^2 - t^2}{4 + c^2 + t^2} \end{pmatrix}$$



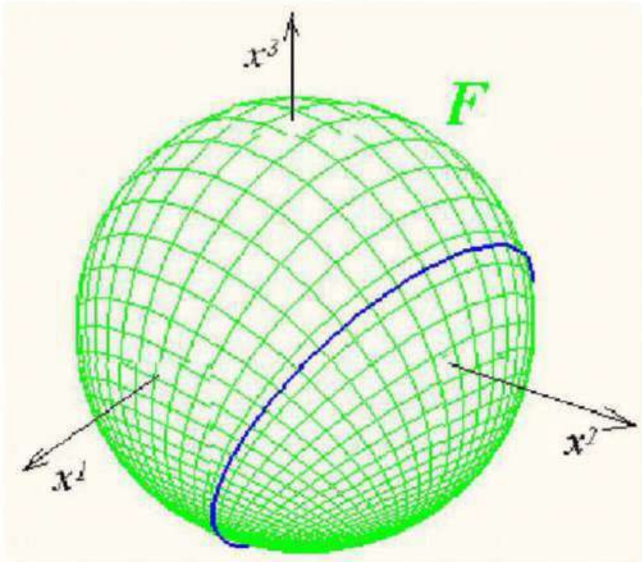
Вказана крива лежить в площині Π: $-2x^1 + c\,x^3 + cR = 0$.

Тому крива представляє собою коло (з виколотою точкою $(0,0,-R)$), що є перетином сфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить пряму $x^1=0$, $x^3 = -R$. Жмуток площин, що містять пряму $x^1=0$, $x^3 = -R$, в перетині зі сферою породжують сімейство координатних ліній на сфері F.

Координатна лінія $\begin{cases} \hat{u}^1 = t \\ \hat{u}^2 = c \end{cases}$ на поверхні F задається, як крива в просторі $I\!R^3$, радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4t}{4 + t^2 + c^2} \\ R \cdot \dfrac{4c}{4 + t^2 + c^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - t^2 - c^2}{4 + t^2 + c^2} \end{pmatrix}$$



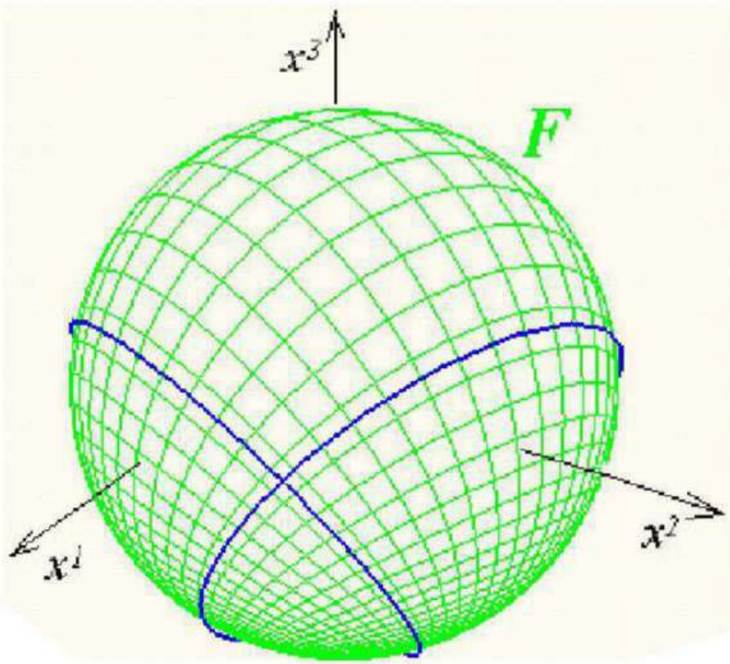
Вказана крива лежить в площині Π: $-2x^2 + c\,x^3 + cR = 0$.

Тому крива представляє собою коло (з виколотою точкою $(0,0,-R)$), що є перетином сфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить пряму $x^2=0$, $x^3 = -R$. Жмуток площин, що містять пряму $x^2=0$, $x^3 = -R$, в перетині зі сферою породжують сімейство координатних ліній на сфері F.

Отже, маємо координатну сітку на сфері F, утворену з двох сімейств півкіл.

Через кожну точку регулярно параметризованої поверхні F проходить по одній координатній кривій з кожного з двох сімейств координатних ліній.



Зауваження. Якщо через точку сфери F провести промінь з південного полюса *(0,0,-R)*, то він перетне горизонтальну площину $x^3=1$ в точці $(\hat{u}^1,\hat{u}^2,1)$

Задача 0.2.4. Розглянемо поверхні F і $\widetilde{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей F і $\widetilde{F}$.

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат(u^1, u^2) і $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (u^1, u^2) до $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Розв'язання. Порівнюємо

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x^1 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}$$

Отримуємо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ u^2 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}$$

Функції заміни є неперервно диференційованими.
Крім того, маємо

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cdot \dfrac{1+(\widetilde{u}^2)^2}{(\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2})^3} & R \cdot \dfrac{-\widetilde{u}^1\widetilde{u}^2}{(\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2})^3} \\ R \cdot \dfrac{-\widetilde{u}^1\widetilde{u}^2}{(\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2})^3} & R \cdot \dfrac{1+(\widetilde{u}^1)^2}{(\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2})^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R^2}{(1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2)^2} \neq 0$$

Значить, заміна координат є регулярною.

*__Задача 0.2.5.__ Розглянемо поверхні $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область Ω на сфері, що є перетином областей $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$.

В області Ω одночасно діють дві системи внутрішніх координат $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області Ω на сфері?

Чи є перехід від $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Розв'язання.

Згадаємо, що $\widetilde{F}$ – це відкрита верхня півсфера, а $\hat{F}$ – сфера з виколотим південним полюсом. Таким чином, $\widetilde{F}$ належить $\hat{F}$.

На півсфері $\widetilde{F}$ діють відразу дві системи координат $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$. При цьому $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ змінюються на всій площині параметрів, а $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ обмежуються умовою $(\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2 - 4 < 0$.

Порівнюємо

$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^1}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \end{cases}$$

Отримуємо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \dfrac{4\hat{u}^1}{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2} \\ \tilde{u}^2 = \dfrac{4\hat{u}^2}{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2} \end{cases}$$

Функції заміни є неперервно диференційовними в крузі $(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2<4$.

Обчислюємо якобіан:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \hat{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \hat{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \hat{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \hat{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot \dfrac{4 + (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{(4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2)^2} & 8 \cdot \dfrac{\hat{u}^1 \hat{u}^2}{(4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2)^2} \\ 8 \cdot \dfrac{\hat{u}^1 \hat{u}^2}{(4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2)^2} & 4 \cdot \dfrac{4 + (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{(4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= -16 \cdot \frac{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2}{(\ 4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2\ )^3} \neq 0$$

Значить, заміна координат є регулярною.

Задача 0.3. Розглянемо регулярну криву γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \qquad a < s < b,$$

в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – головними нормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Аналогічно, запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – бінормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Розв'язання. Нехай s – натуральний параметр на кривій.

Лінійчата поверхня, утворена головними нормалями кривої γ, задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\,\vec{v}(s), \qquad a < s < b, \ -\infty < t < \infty.$$

Якщо крива є гладкою класу C^m, $m \geq 3$, і не має точок перегину (де кривина $k=0$, то тоді поверхня задається гладкою класу C^{m-2} вектор-функцією.

Обчислюємо похідні:

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\,\vec{v}(s)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau} + t\,(-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = (1 - kt)\vec{\tau} + t\kappa\vec{\beta} \quad , \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$$

Обчислюємо векторний добуток:

$$[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [(1 - kt)\vec{\tau} + t\kappa\vec{\beta}, \vec{v}] = (1 - kt)[\vec{\tau}, \vec{v}] + t\kappa[\vec{\beta}, \vec{v}] = (1 - kt)\vec{\beta} - t\kappa\vec{\tau}$$

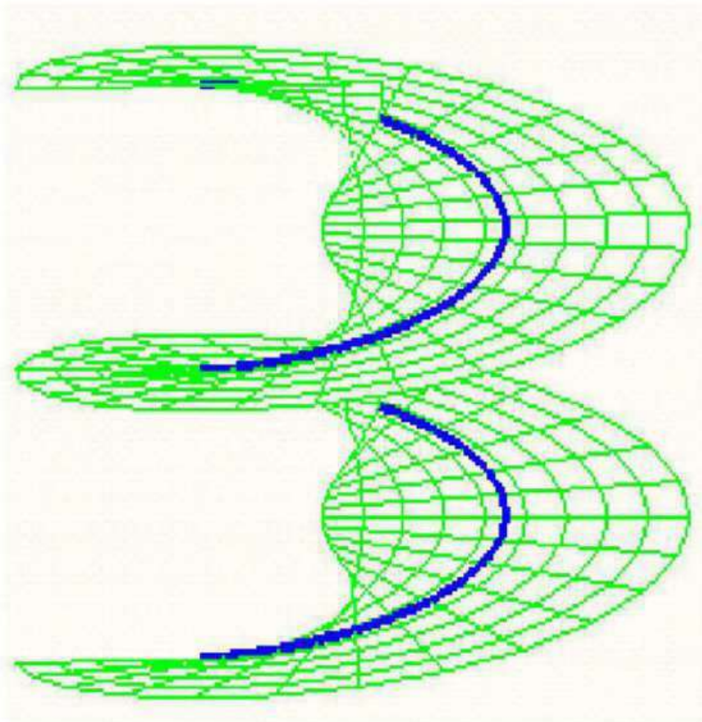
Умова регулярності $[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] \neq \vec{0}$ набуває наступного вигляду:

$$(1 - kt)^2 + (t\kappa)^2 \neq 0$$

Якщо скрут κ кривої γ не обертається в нуль в жодній точці на кривій, тоді лінійчата поверхня головних нормалей кривої γ буде регулярною поверхнею.

Якщо ж в якійсь точці $P(s_0)$ кривої γ скрут $\kappa(s_0)=0$, то тоді на твірній нашої лінійчатої поверхні, що проходить через точку P, при $t = \dfrac{1}{k(s_0)}$ виникне особлива точка поверхні.

Координатна сітка на поверхні утворюється двома сімействами ліній. Одно сімейство, координатні криві $s=const$, це прямолінійні твірні – головні нормалі кривої γ. Інше сімейство, координатні криві $t=const$, це «еквідістантні» криві кривої γ, кожна з яких отримана одночасним зсувом усіх точок кривої γ вздовж відповідних твірних на фіксовану відстань $t=const$.



Зауваження. Якщо γ – плоска крива, то лінійчата поверхня головних нормалей такої кривої – це частина площини. А особливі точки такої параметризованої поверхні (параметризації області площини) – це еволюта кривої γ.

Аналогічно, лінійчата поверхня, утворена бінормалями кривої γ, задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\ \vec{\beta}(s), \qquad a < s < b, \ -\infty < t < \infty.$$

Якщо крива є гладкою класу C^m, $m \geq 3$, і не має точок перегину (де кривина $k=0$, то тоді поверхня задається гладкою класу C^{m-2} вектор-функцією.

Обчислюємо похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau} + t\,(-\kappa\vec{\nu}) = \vec{\tau} - t\kappa\vec{\nu} \quad , \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\beta}$$

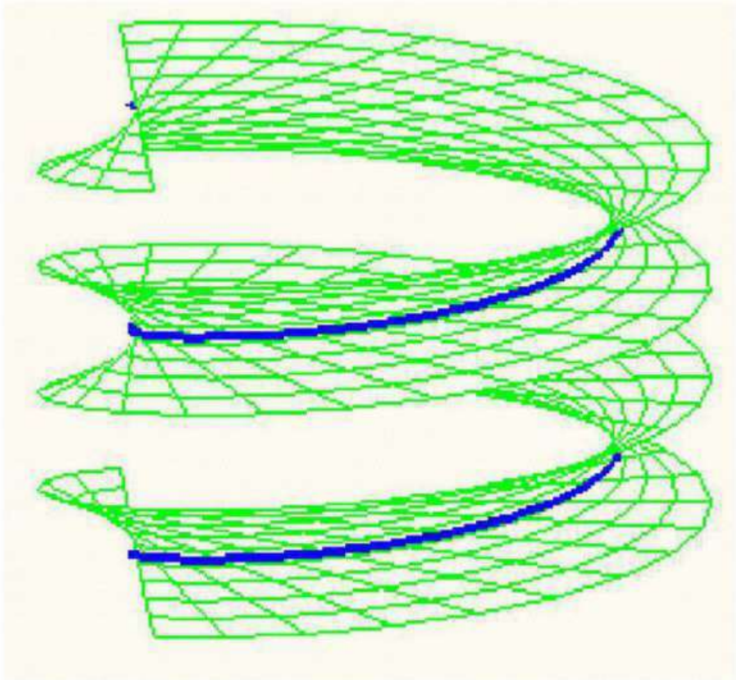
Обчислюємо векторний добуток:

$$[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau} - t\kappa\vec{\nu}, \vec{\beta}] = [\vec{\tau}, \vec{\beta}] - t\kappa[\vec{\nu}, \vec{\beta}] = -\vec{\nu} - t\kappa\vec{\tau}$$

Умова регулярності $[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] \neq \vec{0}$ виконується автоматично.

Таким чином, лінійчата поверхня бінормалей кривої γ буде регулярною поверхнею.

Координатна сітка на поверхні утворюється двома сімействами ліній. Одно сімейство, координатні криві $s=const$, це прямолінійні твірні – бінормалі кривої γ. Інше сімейство, координатні криві $t=const$, це «еквідістантні» криві кривої γ, кожна з яких отримана одночасним зсувом усіх точок кривої γ вздовж відповідних твірних на фіксовану відстань $t=const$.



Зауваження. Якщо γ – плоска крива, то лінійчата поверхня бінормалей такої кривої – це циліндрична поверхня, оскільки всі бінормалі плоскої кривої перпендикулярні площині кривої γ.

Задача 1. Розглянемо круговий циліндр F в $\mathbb{R}^3$ заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \cdot \cos u^1 \\ x^2 = r \cdot \sin u^1, \\ x^3 = u^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{array}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої циліндра F в точці P з внутрішніми координатами $(\frac{\pi}{4}, 7)$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор циліндра F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos u^1 \\ r \cdot \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Підставивши $u^1 = \frac{\pi}{4}$, $u^2 = 7$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 7 \end{pmatrix}$$

Далі, обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin u^1 \\ r \cdot \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх значення в точці $P(\frac{\pi}{4}, 7)$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{4}, 7) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{4}, 7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Це вектори, які утворюють базис в дотичній площині $T_P F$. Знайдемо їх векторний добуток – це буде вектор нормалі дотичної площини:

$$\vec{N}_P = [\, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{4}, 7), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{4}, 7) \,] = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини T_PF, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 7 \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$1 \cdot (x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}) + 1 \cdot (x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}) + 0 \cdot (x^3 - 7) = 0,$$

тобто,

$$x^1 + x^2 - \sqrt{2}r = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 7 \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

$$\vec{N}_P = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$\frac{x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^3 - 7}{0}.$$

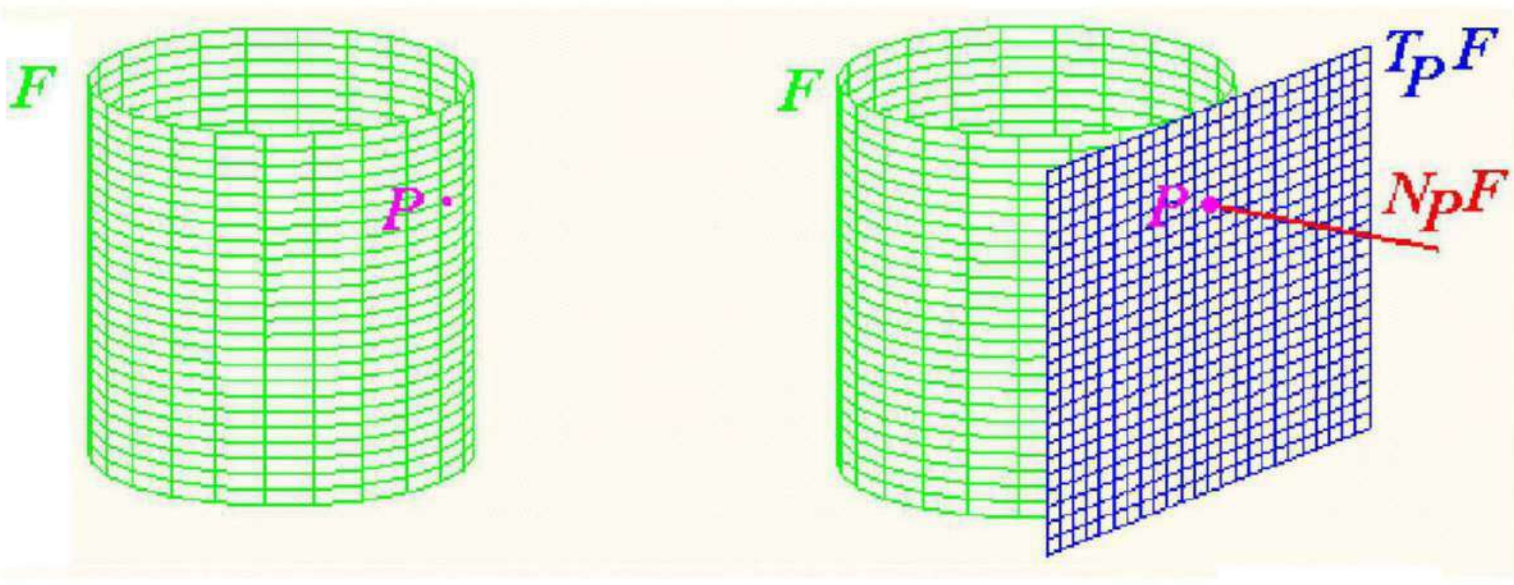
Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$x^1 + x^2 - \sqrt{2}r = 0.$$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^3 - 7}{0}.$$



Задача 2. Розглянемо явно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$x^3 = x^1(x^1 - \sqrt{3}\,x^2)(x^1 + \sqrt{3}\,x^2),\ -\infty < x^1, x^2 < \infty.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці P з $(x^1, x^2) = (0,0)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що для явно заданої поверхні $x^3 = z(x^1, x^2)$ дотична площина в точці $P(x_0^1, x_0^2)$ задається рівнянням

$$x^3 \quad = \; z(x_0^1, x_0^2) + (x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2),$$

а нормальна пряма – рівнянням

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^3 - z(x_0^1, x_0^2)}{1}$$

Підставимо $z(x^1, x^2) = x^1(x^1 - \sqrt{3}\,x^2)(x^1 + \sqrt{3}\,x^2)$ і $(x_0^1, x_0^2) = (0,0)$.

Отримаємо рівняння дотичної площини T_PF:

$$x^3 = 0 + (x^1 - 0)\cdot 0 + (x^2 - 0)\cdot 0,$$

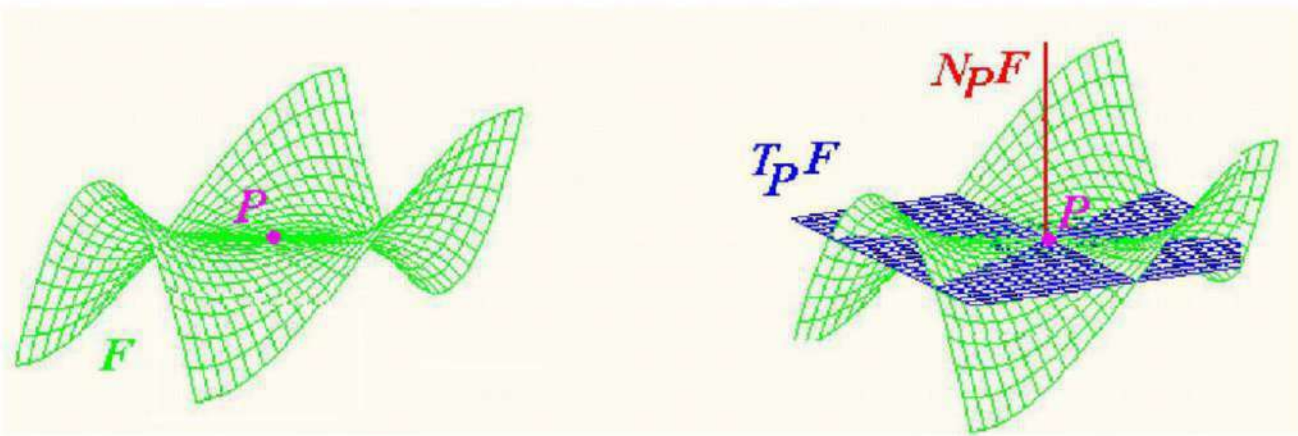
тобто, $x^3 = 0$.

Отримаємо рівняння нормальної прямої N_PF:

$$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - 0}{0} = \frac{x^3 - 0}{1},$$

тобто, $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.

Відповідь: Рівняння дотичної площини T_PF: $x^3 = 0$.
Рівняння нормальної прямої N_PF: $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.



Задача 3. Розглянемо неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$((x^1-1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)\cdot((x^1+1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)-1=0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(\sqrt{2},0,0)$.

*Знайдіть точку $Q(q^1,q^2,q^3)$ на поверхні F таку, що дотична площина T_QF є паралельною площині $x^3=0$.

*Знайдіть точку $A(a^1,a^2,a^3)$ на поверхні F таку, що нормальна пряма N_QF проходить через точку $C(3,1,0)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що для неявно заданої поверхні $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$ дотична площина в довільній точці (x_0^1, x_0^2, x_0^3) задається рівнянням

$$(x^1-x_0^1)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)+(x^2-x_0^2)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)+(x^3-x_0^3)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)=0,$$

а нормальна пряма – рівнянням

$$\frac{x^1-x_0^1}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}=\frac{x^2-x_0^2}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}=\frac{x^3-x_0^3}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}$$

Підставимо $\Phi = ((x^1-1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)\cdot((x^1+1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)-1=0.$

Маємо:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 4x^1\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1\,)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 4x^2\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1\,)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 4x^3\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1\,)$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці поверхні:

$$(x^1-x_0^1)\cdot x_0^1\cdot\frac{(x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2-1}{(x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1}+(x^2-x_0^2)\cdot x_0^2+(x^3-x_0^3)\cdot x_0^3=0$$

Рівняння нормальної прямої в довільній точці поверхні F:

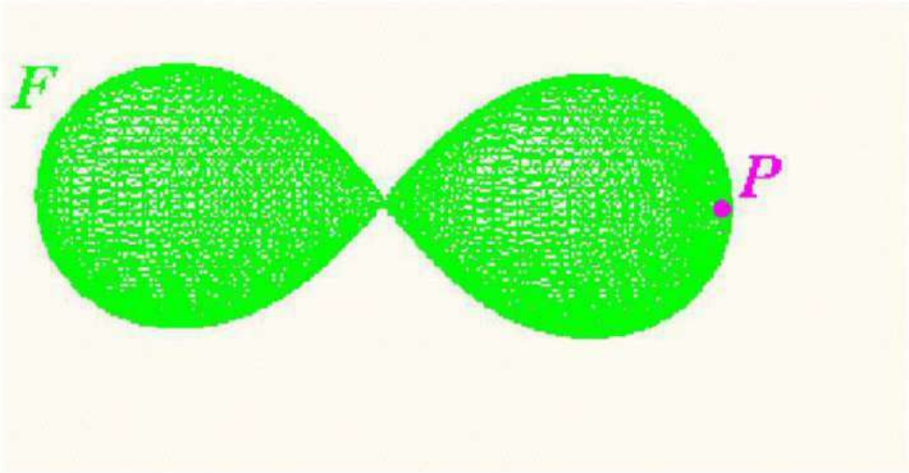
$$\frac{x^1-x_0^1}{x_0^1\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2-1)}=\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1)}=\frac{x^3-x_0^3}{x_0^2\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1)}$$

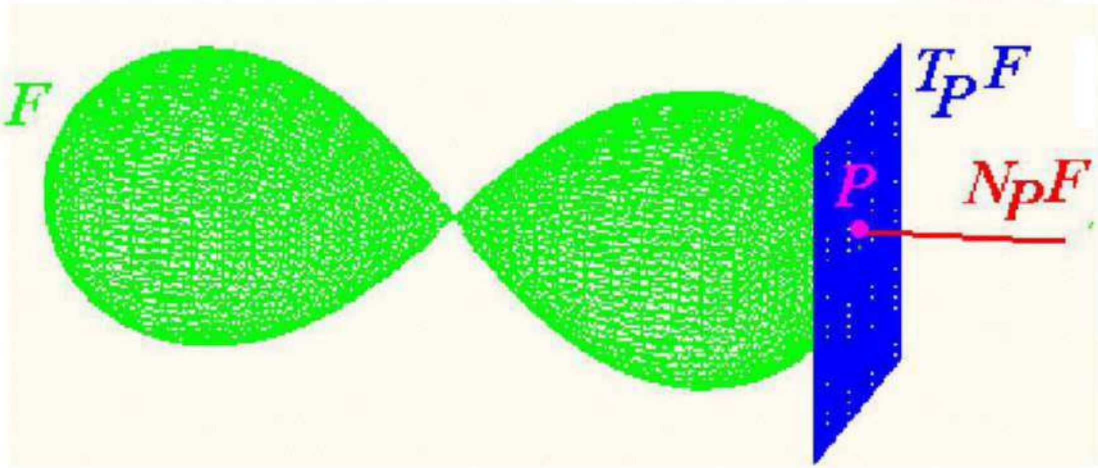
В точці $P(\sqrt{2},0,0)$ отримуємо рівняння дотичної площини $T_P F$

$$x^1 - \sqrt{2} = 0$$

і рівняння нормальної прямої $N_P F$

$$\frac{x^1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x^2 - 0}{0} = \frac{x^3 - 0}{0}$$





Для знаходження точки $Q(q^1,q^2,q^3)$ на поверхні F такої, що дотична площина T_QF є паралельною площині $x^3=0$, маємо систему

$$\begin{cases} ((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)\cdot((q^1+1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)-1=0 \\ \dfrac{q^1((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2-1)}{0}=\dfrac{q^2((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)}{0}=\dfrac{q^3((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)}{1} \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{cases} ((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)\cdot((q^1+1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)-1=0 \\ q^1\cdot((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2-1)=0 \\ q^2\cdot((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)=0 \end{cases}$$

Ця система має чотири розв'язки $Q(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0,\pm\frac{1}{2})$

Для знаходження точку $A(a^1,a^2,a^3)$ на поверхні F такої, що нормальна пряма N_QF проходить через точку $C(3,1,0)$, маємо наступну систему:

$$((a^1-1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2)\cdot((a^1+1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2)-1=0$$

$$\frac{3-a^1}{a^1\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2-1)}=\frac{1-a^2}{a^2\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+1)}=\frac{0-a^3}{a^3\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+1)}$$

Ця система має два розв'язки $A(-1.3\ldots, -0.2\ldots, 0)$ і $A(1.3\ldots, 0.2\ldots, 0)$.

Відповідь: Рівняння дотичної площини T_PF: $x^1-\sqrt{2}=0$.

Рівняння нормальної прямої N_PF: $x^2=0$, $x^3=0$.