

Лекція 11. Дотична площина регулярної поверхні

1. Дотична площина поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

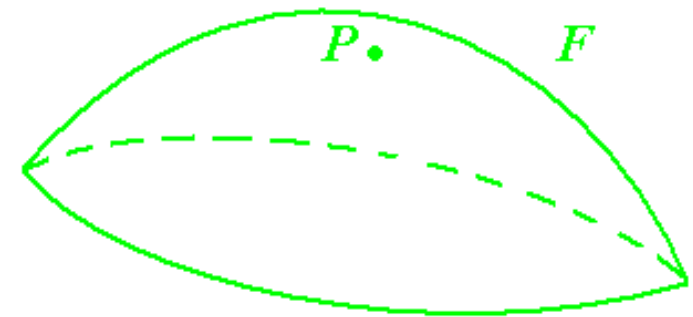
$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

За умовою регулярності, вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ є неперервно диференційовною, і при цьому $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ лінійно незалежні в кожній точці:

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \neq \vec{0}.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

З точки зору простору $\mathbb{R}^3$ точка P має радіус-вектор $\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$



Розглянемо регулярну криву γ на поверхні F в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P . У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

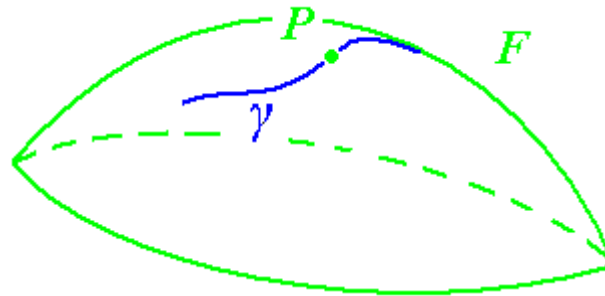
$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b),$$

так, що при деякому t_0 маємо

$$\begin{cases} u_0^1 = h^1(t_0) \\ u_0^2 = h^2(t_0) \end{cases}.$$

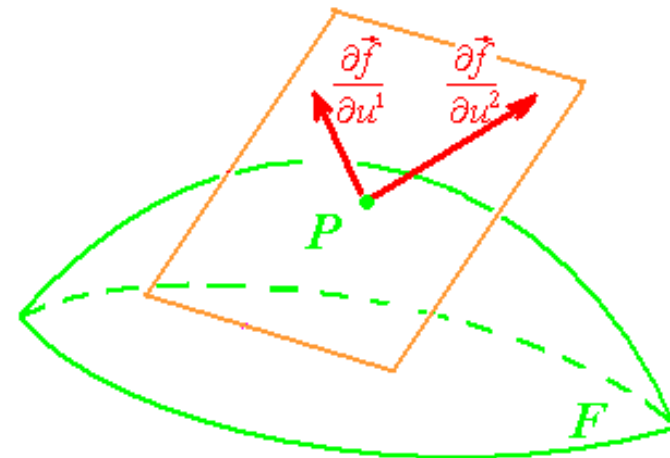
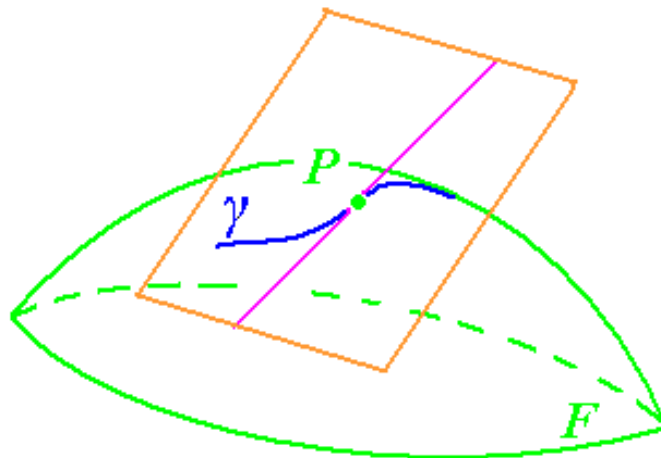
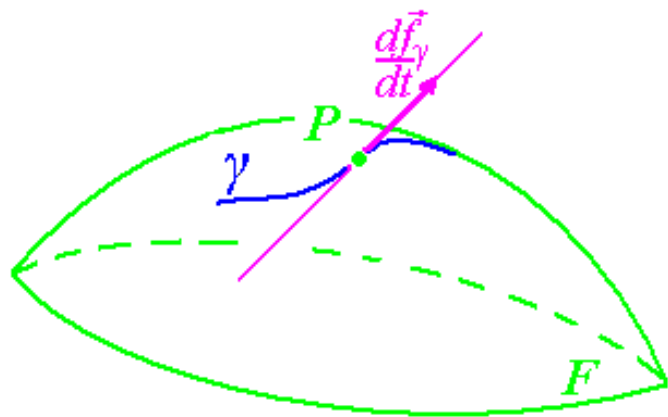
З точки зору простору $\mathbb{R}^3$ крива γ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)) = \vec{f}_\gamma(t)$$



Твердження. Дотична пряма кривої γ в точці P належить двомірній площині в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$



Доведення. Вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ є лінійно незалежними, оскільки поверхня F є регулярною. Тому вони однозначно визначають деяку площину Π в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P і є натягнутою на $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Для напрямного вектора кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$ є лінійною комбінацією векторів $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Як наслідок, дотична пряма кривої γ в точці P , яка проходить через точку P в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$, належить площині, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, що і вимагалось довести.

Твердження. *Будь-яка пряма, що проходить через точку P в площині, натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, є дотичною прямою для деякої регулярної кривої, що проходить через точку P , на поверхні F .*

Доведення. Візьмемо довільну пряму L , що проходить через точку P , в площині Π , натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$. Напрямний орт $\vec{\xi}$ цієї прямої L є лінійною комбінацією базисних векторів площини Π :

$$\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2$$

Розглянемо криву γ на поверхні F , що у внутрішніх локальних координатах задається у вигляді:

$$\begin{cases} u^1 = u_0^1 + \xi^1(t - t_0) \\ u^2 = u_0^2 + \xi^2(t - t_0) \end{cases}$$

Ця крива проходить через точку P .

Оскільки $\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

При цьому дотичний вектор цієї кривої в точці P має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial t}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2, \end{aligned}$$

тобто, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \vec{\xi}$. Отже, пряма L співпадає з дотичною прямою побудованої кривої γ в точці P , що і вимагалось довести.

Висновок-визначення. Якщо на регулярній параметрично заданій поверхні F зафіксувати точку P і розглядати довільні регулярні криві, які лежать на поверхні F і проходять через точку P , то дотичні прямі таких кривих будуть утворювати двовірну площину.

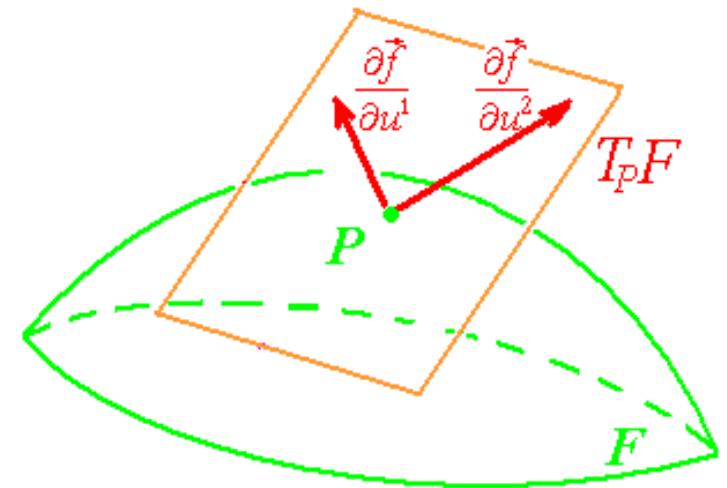
Ця площина називається *дотичною площиною* поверхні F в точці P і позначається $T_P F$.

За визначенням, дотична площина проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$



Перевіримо, що дотична площина визначена коректно – вона не змінюється при регулярних замінах локальних координат на поверхні F .

Коректність визначення дотичної площини

На регулярній параметрично заданій поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

зробимо регулярну заміну координат в околі точки P ,

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

і запишемо радіус-вектор поверхні в новій системі координат:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \tilde{\vec{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2).$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \end{aligned}$$

тобто,

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \right).$$

Зауваження.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \right] &= \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \right] = \\ &= \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \right] + \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \right] + \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \right] + \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \right] = \\ &= \vec{0} + \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right] + \vec{0} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \right) \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \end{aligned}$$

Як результат, регулярна зміна координат на поверхні F в околі точки P призводить до зміни базису в дотичній площині $T_P F$. Але сама дотична площина $T_P F$ при цьому залишається незмінною.

Таким чином, дотична площина $T_P F$ поверхні F в точці P визначена коректно, вона не залежить від вибору параметризації.

Висновок. В кожній точці P на регулярній параметрично заданій поверхні F однозначно визначається дотична площина $T_P F$.

Дотична площина – аналітичне задавання

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

дотична площина $T_P F$ в точці $P(u_0^1, u_0^2)$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^1 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^2 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \quad -\infty < \lambda^1, \lambda^2 < \infty.$$

В координатній формі (неявне задавання лінійним рівнянням):

$$\begin{vmatrix} x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Дотична площина – наближення першого порядку регулярної поверхні

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

запишемо перші доданки розкладання Тейлора в точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) + \\ + \vec{o}(\sqrt{(u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2})\end{aligned}$$

Якщо обмежитись лише доданками першого порядку, отримаємо радіус-вектор дотичної площини $T_P F$:

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Висновок. Таким чином, дотична площина $T_P F$ є наближенням першого порядку (лінійною апроксимацією) регулярної параметрично заданої поверхні F в точці P .

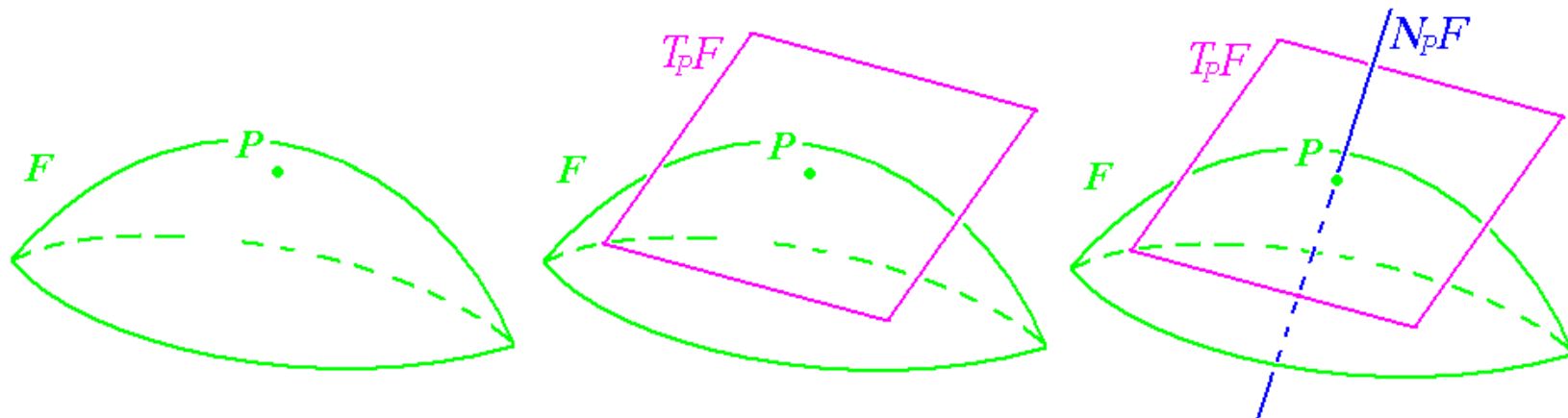
2. Нормальна пряма регулярної поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F і розглянемо дотичну площину $T_P F$ поверхні F в точці P .

Визначення. Пряма в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P ортогонально до дотичної площини $T_P F$, називається *нормальною прямою* поверхні F в точці P і позначається $N_P F$.



Оскільки в кожній точці регулярної поверхні коректно визначено дотичну площину, то, як наслідок, в кожній точці регулярної поверхні коректно визначено нормальну пряму. Тобто, в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні існує і є єдиною нормальна пряма.

Нормальна пряма – аналітичне задавання

Нехай точка P має внутрішні координати (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

За визначенням, дотична площина $T_P F$ проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

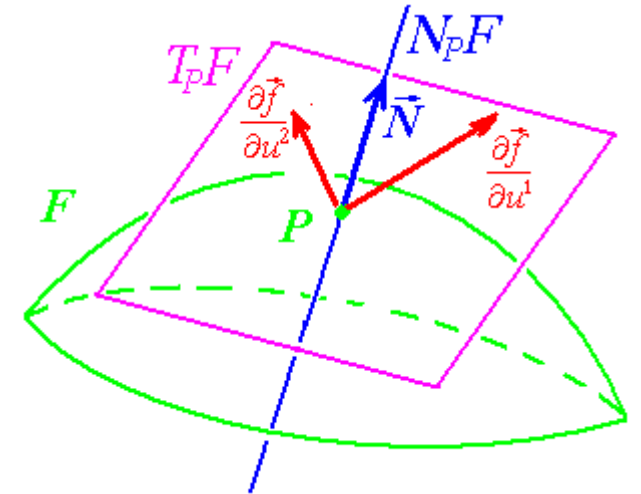
і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$

Нормаль дотичної площини $T_P F$ обчислюється за формулою

$$\vec{N}_P = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right].$$

За визначенням, вектор $\vec{N}_P$, що є нормаллю дотичної площини $T_P F$, є одночасно і напрямним вектором нормальної прямої $N_P F$.



Тому нормальна пряма задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \vec{N}_P, \quad -\infty < t < \infty.$$

тобто,

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right], \quad -\infty < t < \infty,$$

або в координатному вигляді

$$\begin{array}{c} x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array}$$

3. Дотична площина і нормальна пряма явно заданої поверхні

Розглянемо явно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$,

$$x^3 = z(x^1, x^2),$$

що є графіком неперервно диференційованої функції $\varphi(x^1, x^2)$.

Представимо поверхню F як параметрично задану:

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = z(u^1, u^2) \end{cases}.$$

Якщо взяти точку P з координатами $(x_0^1, x_0^2, z(x_0^1, x_0^2))$ на поверхні F , то дотична площина $T_P F$ буде задаватись у вигляді

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & 1 & 0 \\ x^2 - x_0^2 & 0 & 1 \\ x^3 - z(x_0^1, x_0^2) & \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) & \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \end{vmatrix} = 0$$

тобто,

$$x^3 = z(x_0^1, x_0^2) + (x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2).$$

А нормальна пряма $N_P F$ задається рівнянням

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^3 - z(x_0^1, x_0^2)}{1}$$

Зауважимо, що вектор нормалі в точці P має вигляд

$$\vec{N}_P = \left(-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2), -\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2), 1 \right)$$

4. Дотична площина і нормальна пряма неявно заданої поверхні

Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо точку $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ на поверхні F . В досить малому околі точки P поверхня F задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

так, що

$$\Phi(f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2)) \equiv 0$$

Продиференціювавши, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \frac{\partial f^3}{\partial u^1} &\equiv 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial f^1}{\partial u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \frac{\partial f^3}{\partial u^2} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Інакше кажучи, маємо

$$\begin{aligned} < \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right), \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1} \right) > \equiv 0 \\ < \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right), \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \right) > \equiv 0 \end{aligned}$$

З огляду на регулярність поверхні F , ненульовий вектор

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right),$$

обчислений в точці P , є ортогональним до векторів

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1} \right) \quad \text{і} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \right),$$

обчисленим в точці P , що є базисними векторами дотичної площини $T_P F$.

Значить, $\nabla \Phi$ є напрямним вектором нормальної прямої $N_P F$.

Таким чином, маємо

$$\vec{N}_P = \nabla \Phi(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)$$

Рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$(x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^3 - x_0^3) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = 0$$

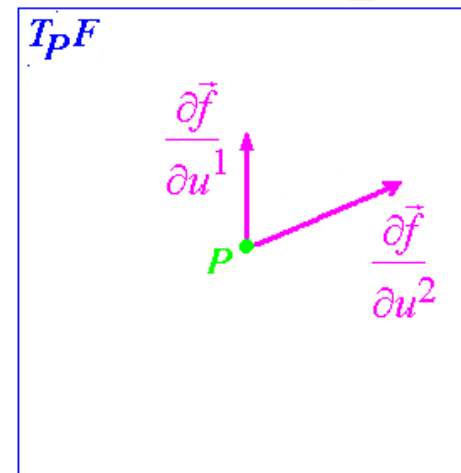
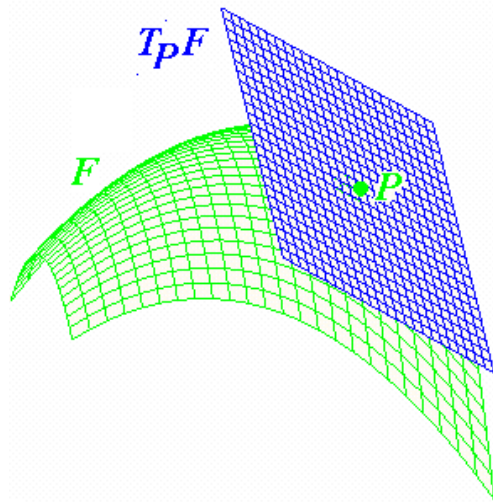
Рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^3 - x_0^3}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)}$$

5. Дотичні вектори поверхні і їх координати

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором: $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D$.

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F і розглянемо дотичну площину $T_P F$. Ця площина проходить через точку P і натягнута на лінійно незалежні вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ які називають *канонічним базисом* в дотичній площині $T_P F$, породженим локальними координатами на поверхні F .



Розглядаємо дотичну площину $T_P F$ як двомірний векторний простір.

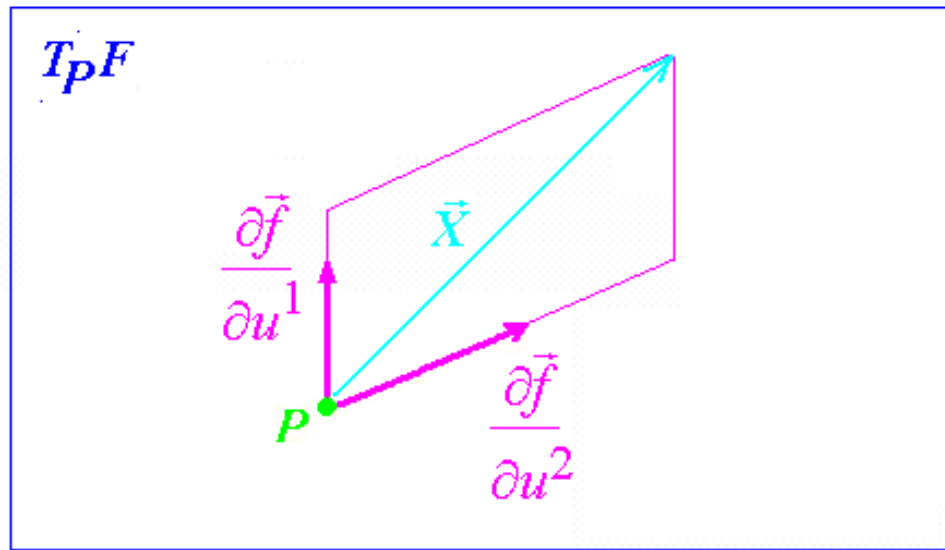
Як тільки в околі точки P на поверхні F вводяться локальні координати (u^1, u^2) , то в дотичній площині $T_P F$ виникає канонічний базис

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

і будь-який елемент $T_P F$ – *дотичний вектор* $\vec{X}$ поверхні F в точці P – записується як лінійна комбінація базисних векторів:

$$\vec{X} = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$

Величини (X^1, X^2) називаються *координатами* дотичного вектора $\vec{X} \in T_P F$



Приклад – вектор швидкості кривої на поверхні

Розглянемо криву γ на поверхні F , що проходить через точку P .

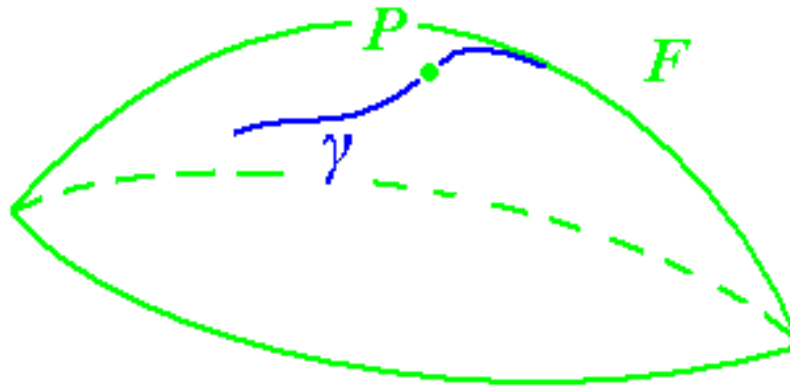
У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b$$

так, що $u_0^1 = h^1(t_0)$, $u_0^2 = h^2(t_0)$.

В об'ємному просторі $\mathbb{R}^3$ крива γ задається вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)) = \vec{f}_\gamma(t)$$



Для напрямного вектора дотичної прямої кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$ є лінійною комбінацією векторів $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ і має координати $(\frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0), \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0))$.

Крива γ на поверхні F :

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b$$

Вектор швидкості кривої γ в $T_P F$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) \\ \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0) \end{pmatrix}$$

Зауваження. Базисні вектори канонічного базису в $T_P F$ – це вектори швидкості (дотичні вектори) пари координатних ліній, що проходять через точку P , на поверхні F .

Дотичні векторні поля на регулярній поверхні

Якщо на регулярній поверхні F в $\mathbb{R}^3$ задати в кожній її точці $P \in F$ якийсь вектор в дотичній площині $T_P F$, то отримаємо *дотичне векторне поле* $\vec{X}$ на поверхні F .

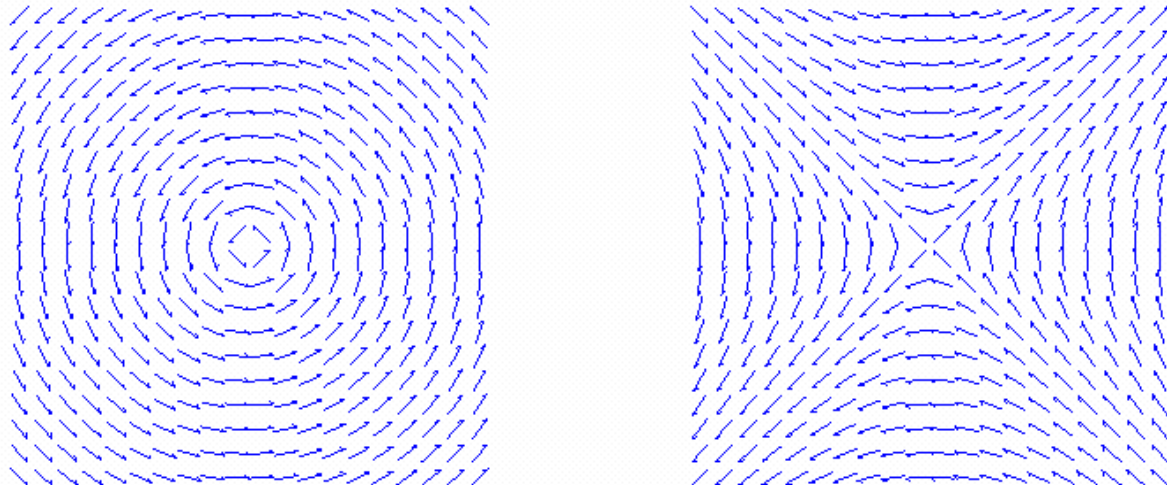
Коли поверхня F задається вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, то дотичне векторне поле представляється у вигляді

$$\vec{X} = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2},$$

де $X^1 = X^1(u^1, u^2)$, $X^2 = X^2(u^1, u^2)$ – координати векторного поля $\vec{X}$.

Дотичне векторне поле $\vec{X}$ на поверхні F називається *регулярним*, якщо $\vec{X}$ не приймає нульового значення в жодній точці на поверхні, а його координати $X^1 = X^1(u^1, u^2)$, $X^2 = X^2(u^1, u^2)$ є неперервно диференційованими функціями.

Ілюстрація



6. Тензорний закон зміни координат дотичних векторів

На регулярній параметрично заданій поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

зробимо регулярну заміну координат в околі точки P ,

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

і запишемо радіус-вектор поверхні в новій системі координат:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \tilde{\vec{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2).$$

Продиференціювавши, отримаємо (в точці P):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \end{aligned}$$

Таким чином, заміна координат в околі точки P на поверхні F породжує заміну канонічного базису в дотичній площині $T_P F$:

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right)_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \right)_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} .$$

Як при цьому зміняться координати дотичних векторів?

Маємо (все — в точці P):

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \tilde{X}^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} = \\ &= \tilde{X}^1 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \right) + \tilde{X}^2 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \right) = \\ &= \left(\tilde{X}^1 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \right) \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + \left(\tilde{X}^1 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \right) \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{aligned}$$

Отримуємо наступні формули – *тензорний закон зміни координат дотичних векторів* в $T_p F$ при заміні локальних координат на поверхні F :

$$\begin{cases} X^1 = \tilde{X}^1 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ X^2 = \tilde{X}^1 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Зауваження. Вказаний закон використовується, наприклад, при побудові дотичних векторних полів на простих регулярних поверхнях, атлас яких містить більше ніж одну карту.

7. Диференціальні лінійні форми на регулярних поверхнях

Розглянемо лінійну форму $\omega: T_P F \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(\vec{X}) = \omega\left(X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right) = X^1 \omega\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\right) + X^2 \omega\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right) = X^1 \omega_1 + X^2 \omega_2$$

$$\begin{array}{c} \text{Вектор} \\ \vec{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Лінійна форма

$$\omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$\omega(\vec{X}) = (\omega_1, \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

Лінійні форми утворюють спряжений векторний простір, що називається *кодотичною площиною* $T_P^* F$ поверхні F в точці P .

В якості базисних лінійних форм в $T_P^* F$ розглянемо

$$\varepsilon^1: T_P F \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon^2: T_P F \rightarrow \mathbb{R}$$

такі, що

$$\varepsilon^1(\vec{X}) = X^1, \quad \varepsilon^2(\vec{X}) = X^2,$$

Тобто, маємо

$$\varepsilon^i\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j}\right) = \delta_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Тоді можемо записати

$$\omega(\vec{X}) = \omega_1 \varepsilon^1(\vec{X}) + \omega_2 \varepsilon^2(\vec{X}), \quad \forall \vec{X} \in T_P F$$

Тобто, отримуємо:

$$\omega = \omega_1 \varepsilon^1 + \omega_2 \varepsilon^2.$$

Лінійні форми ε^1 і ε^2 назвемо *канонічним базисом* в кодотичній площині $T_P^* F$.

Цей базис породжується канонічним базисом $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ в дотичній площині $T_P F$.

Як зміниться канонічний базис $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ в $T_P^* F$, якщо змінити локальні координати в околі точки P на поверхні F і, як наслідок, змінити канонічний базис $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ в дотичній площині $T_P F$?

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Заміна канонічного базиса
в дотичному просторі $T_P F$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{aligned}$$

Заміна канонічного базиса
в кодотичному просторі $T_P^* F$:

$$\tilde{\varepsilon}^1 = A_1^1 \varepsilon^1 + A_2^1 \varepsilon^2$$

$$\tilde{\varepsilon}^2 = A_1^2 \varepsilon^1 + A_2^2 \varepsilon^2$$

Маємо (при будь-яких $1 \leq i, j \leq 2$):

$$\begin{aligned}\delta_j^i &= \tilde{\varepsilon}^i \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^j} \right) = \tilde{\varepsilon}^i \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \right) = \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \tilde{\varepsilon}^i \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \tilde{\varepsilon}^i \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \left(A_1^i \varepsilon^1 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right) + A_2^i \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right) \right) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \cdot \left(A_1^i \varepsilon^1 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) + A_2^i \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} \cdot (A_1^i \delta_1^1 + A_2^i \delta_1^2) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \cdot (A_1^i \delta_2^1 + A_2^i \delta_2^2) = \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} \cdot A_1^i + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \cdot A_2^i\end{aligned}$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

Заміна канонічного базиса в кодотичному просторі T_P^*F :

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^1 &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} \varepsilon^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \varepsilon^2 \\ \tilde{\varepsilon}^2 &= \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \varepsilon^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \varepsilon^2\end{aligned}$$

Згадаємо формулу з математичного аналізу

$$\begin{aligned}d\tilde{u}^1 &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} du^2 \\d\tilde{u}^2 &= \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} du^2\end{aligned}$$

Отже, можемо покласти

$$\varepsilon^1 = du^1, \quad \varepsilon^2 = du^2 \quad \text{та} \quad \tilde{\varepsilon}^1 = d\tilde{u}^1, \quad \tilde{\varepsilon}^2 = d\tilde{u}^2$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Заміна канонічного базиса
в дотичному просторі $T_P F$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2}\end{aligned}$$

Заміна канонічного базиса
в кодотичному просторі $T_P^* F$:

$$\begin{aligned}d\tilde{u}^1 &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} du^2 \\ d\tilde{u}^2 &= \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} du^2\end{aligned}$$

Як змінюються координати лінійної форми при заміні локальних координат на поверхні F ?

$$\begin{aligned}\omega &= \tilde{\omega}_1 d\tilde{u}^1 + \tilde{\omega}_2 d\tilde{u}^2 = \tilde{\omega}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} du^2 \right) + \tilde{\omega}_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} du^2 \right) = \\ &= \left(\tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \right) du^1 + \left(\tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \right) du^2 = \omega_1 du^1 + \omega_2 du^2\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \omega_2 &= \tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}\end{aligned}$$

тобто,

$$(\omega_1, \omega_2) = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)}$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Тензорний закон зміни координат
дотичних векторів з $T_P F$:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Тензорний закон зміни координат
лінійних форм з $T_P^* F$:

$$(\omega_1, \omega_2) = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)}$$

Наслідок:

$$\begin{aligned}
 \omega(\vec{X}) &= (\omega_1, \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \\
 &= (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} \\
 &= (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Тобто, значення лінійної диференціальної форми ω з T_p^*F на векторі $\vec{X}$ з T_pF не залежить від вибору локальних координат на поверхні F (від вибору канонічних базисів в дотичній площині T_pF і в кодотичній площині T_p^*F).

Зауваження.

Разом з лінійними формами $T_P F \rightarrow \mathbb{R}$ і векторами, як лінійними відображеннями $T_P^* F \rightarrow \mathbb{R}$, розглядають також

білінійні форми $T_P F \times T_P F \rightarrow \mathbb{R}$

трилінійні форми $T_P F \times T_P F \times T_P F \rightarrow \mathbb{R}$

полілінійні форми $T_P F \times T_P F \times \dots \times T_P F \rightarrow \mathbb{R}$

оператори $T_P F \times T_P^* F \rightarrow \mathbb{R}$

...

і інші лінійні (по кожному аргументу) відображення

$$T_P F \times T_P F \times \dots \times T_P F \times T_P^* F \times T_P^* F \times \dots \times T_P^* F \rightarrow \mathbb{R}$$

що називаються *тензорами* в точці P на поверхні F .

Якщо задати тензор (білінійну форму, оператор і т.д.) в кожній точці на поверхні F , то отримаємо *тензорне поле* (білінійну диференціальну форму, полілінійну диференціальну форму, поле операторів, і т.д.)

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 11.1. Розглянемо круговий циліндр F в $\mathbb{R}^3$ заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \cdot \cos u^1 \\ x^2 = r \cdot \sin u^1, \\ x^3 = u^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої циліндра F в точці P з внутрішніми координатами $(\frac{\pi}{4}, 7)$.

Задача 11.2. Розглянемо явно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 = x^1(x^1 - \sqrt{3} x^2)(x^1 + \sqrt{3} x^2), \quad -\infty < x^1, x^2 < \infty.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці P з координатами $(x^1, x^2) = (0, 0)$.

Задача 11.3. Розглянемо неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$((x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \cdot ((x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) - 1 = 0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(\sqrt{2}, 0, 0)$.

*Знайдіть точку $Q(q^1, q^2, q^3)$ на поверхні F таку, що дотична площина $T_Q F$ є паралельною площині $x^3 = 0$.

*Знайдіть точку $A(a^1, a^2, a^3)$ на поверхні F таку, що нормальна пряма $N_Q F$ проходить через точку $C(3, 1, 0)$.

Задача 11.4. Розглянемо круговий конус F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = r u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r u^2 \sin u^1, \\ x^3 = h u^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Задача 11.5. Розглянемо гіперболоїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ x^3 = h u^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Перевірте регулярність поверхні F . Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої гіперболоїда F в точці $P(\pi, -2)$.

****** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F , дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Задача 11.6. Розглянемо катеноїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ x^3 = u^1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P(0, \frac{\pi}{3})$.

Задача 11.7. Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричній поверхні F , то її дотична площина $T_P F$ не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини поверхонь).

Задача 11.8. Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні або перетинає вісь обертання, або є паралельною осі обертання, або співпадає з віссю обертання.

Задача 11.9. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

1) Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(1,0,0)$.

2) Запишіть рівняння дотичної площини поверхні F , що проходить через точку $A(0,0,-1)$.

3) Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні F , що проходить через точку $B(0,0,1)$.

Задача 11.10. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$
$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1, a^2, a^3)$, що не лежить на поверхні F .

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1, p^2, p^3)$ на поверхні F є найближчою або найдалшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A , то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P .