Підмноговиди евклідового простору

Нехай $r\colon M \to E^{n+q}$ – ізометричне занурення. Як завжди, ототожнюємо для кожної $p \in M$ дотичний простір $T_{r(p)}\mathbb{R}^{n+q}$ з $\mathbb{R}^{n+q}$. Тоді $dr(X)$ для поля X на M – поле зі значеннями в $\mathbb{R}^{n+q}$, тобто гладке відображення $M \to \mathbb{R}^{n+q}$. Нехай $r = (x^1, \ldots, x^{n+q})$, де $x^a\colon M \to \mathbb{R}$, $a = \overline{1, n+q}$. Для локальних координат $(u^1, \ldots, u^n)$ на M нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, тоді

$$dr(X) = X^i \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^a} = X(x^a) \frac{\partial}{\partial x^a} = (X(x^1), \ldots, X(x^{n+q})),$$

де ми використали наше ототожнення. Позначимо це поле через $X(r)$. Нехай $\overline{X} = \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ та $\overline{Y} = \overline{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ продовжують $dr(X)$ та $dr(Y)$ відповідно (на деякий окіл точки, що розглядається), тобто в точках M

виконується $\overline{X}^a = X(x^a)$ та $\overline{Y}^a = Y(x^a)$ для усіх $a = \overline{1, n+q}$. Тоді, оскільки зв'язність E^{n+q} пласка, формула коваріантного диференціювання дає

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{X}^a \frac{\partial \overline{Y}^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}.$$

У точках M аналогічно до конструкцій розкладень Гаусса і Вейнгартена (як само?) маємо:

$$\overline{\nabla}_X Y = X(x^a)\frac{\partial(Y(x^b))}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} = X(Y(x^b))\frac{\partial}{\partial x^b} =$$

$$= (X(Y(x^1)), \dots, X(Y(x^{n+q}))),$$

що позначаємо через $X(Y(r))$.

<u>Ex.</u> Повернемося до афінної гіперсфери $S^n_R(x_0) = \{x \mid |x - x_0| = R\} \subset E^{n+1}$. У цьому випадку $r\colon S^n \to E^{n+1}$ –

вкладення (тобто включення), що задовольняє умові $\langle r - x_0, r - x_0\rangle = R^2$. Продиференціюємо цю функціональну рівність у напрямку довільного поля X на S^n. За властивостями скалярного добутку маємо

$$2\langle X(r) - 0, r - x_0\rangle = 0.$$

Тобто $dr(X) \perp r - x_0$ (у E^{n+1}) для будь-якого X. Звідси, $r - x_0$ – нормальне поле, і

$$\xi := \pm\frac{r - x_0}{|r - x_0|} = \pm\frac{r - x_0}{R}$$

є (глобальним) одиничним нормальним полем. Продифференцюємо ще раз за полем Y на M:

$$\langle Y(X(r)), r - x_0\rangle + \langle X(r), Y(r)\rangle = 0;$$

$$\langle \overline{\nabla}_Y X, \pm R\xi\rangle = -\langle dr(X), dr(Y)\rangle = -g(X, Y)$$

за означенням першої ф.ф. В силу розкладення Гаусса зліва тут стоїть $\pm R\, b(Y,X)$, тобто (враховуючи симетричність) знову ж маємо $b = \mp\frac{1}{R}g$, отже $S_R^n(x_0)$ – цілком омбілічний із середньою кривиною $H = \mp\frac{1}{R}$ (зовнішня сфера).

Впр. Перевірити, що для довільної ковимірності q афінна n-вимірна сфера $S_R^{n+q-1}(x_0)\bigcap\sigma^{n+1} \subset E^{n+q}$ – теж цілком омбілічна, а отже повинна бути зовнішньою сферою, знайти її поле середньої кривини і переконатися у його паралельності. Тут σ^{n+1} – довільний афінний $(n+1)$-вимірний підпростір, що проходить через x_0 (наприклад, можна використати пару вкладень $S^n \to \sigma^{n+1} \to E^{n+q}$, друге з яких цілком геодезичне, або додаткові умови на r).

Th. Нехай (M, r) – цілком омбілічна гіперповерхня в E^{n+1}. Тоді образи зв'язних компонент M містяться у афінних гіперплощинах або афінних гіперсферах.

▶ З Pr.1., (M, r) – зовнішня сфера, тобто має постійну середню кривину H (на зв'язних компонентах) відносно одиничного нормального поля ξ (нам воно важливе з точністю до множення на -1, тому його локальний характер несуттєвий). Розглянемо довільну зв'язну компоненту (тому далі без обмеження загальності вважаємо M зв'язним) і два випадки для неї:

1. Якщо $H = 0$, то з цілком омбілічності маємо $b = 0$, тобто (M, r) – цілком геодезичний, а тому $r(M)$,

як ми знаємо, є областю гіперплощини. Перевіримо також це аналітично. Використаємо позначення як вище. Оскільки $\overline{\nabla}$ пласка, для $\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (що теж в силу ототожнення вважаємо полем зі значеннями у $\mathbb{R}^{n+1}$) і довільного поля X на M аналогічно до міркувань вище маємо (перевірте це)

$$\overline{\nabla}_X \xi = X(\xi^a)\frac{\partial}{\partial x^a} = (X(\xi^1), \ldots, X(\xi^{n+1})),$$

що позначаємо через $X(\xi)$. Розкладення Вейнгартена тоді має вигляд

$$X(\xi) = \overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X) = -dr(H\, X) = 0.$$

Тобто ξ – постійне. Оскільки для будь-якого X

$$X(\langle r, \xi\rangle) = \langle X(r), \xi\rangle + \langle r, X(\xi)\rangle = \langle dr(X), \xi\rangle = 0,$$

функція $\langle r, \xi \rangle$ постійна, а отже $r(M)$ міститься у гіперплощині з рівнянням вигляду $\langle x, \xi \rangle = C$.

2. Аналогічно, якщо $H \neq 0$, то для будь-якого X розкладення Вейнгартена виглядає як

$$X(\xi) = \overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X) = -H\, dr(X).$$

Покладемо $\rho := r + \frac{\xi}{H} \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Тоді

$$X(\rho) = X(r) + \frac{1}{H} X(\xi) = dr(X) - \frac{1}{H} H\, dr(X) = 0.$$

Тобто відображення ρ постійне. При цьому

$$|r - \rho| = |-\frac{\xi}{H}| = \frac{1}{|H|}$$

постійне, тобто $r(M)$ міститься у гіперсфері $S^n_{\frac{1}{|H|}}(\rho)$ з центром у ρ радіуса $\frac{1}{|H|}$. ◀

Кривина і опуклість гіперповерхонь евклідового простору

Критичні точки і форма Гессе

Нехай M – гладкий многовид, f – гладка функція на M. Згадаємо, що $p \in M$ є критичною точкою f тоді й тільки тоді, коли $d_p f = 0$, що еквівалентне $v(f) = d_p f(v) = 0$ для будь-якого $v \in T_p M$. У локальних координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ це рівносильно умові $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ для $i = \overline{1, n}$. Зокрема, усі точки локальних мінімумів та максимумів f (у тому числі глобальних) є критичними.

def. Нехай p – критична точка f. Формою Гессе (гессіаном) f у p називається

$$\mathrm{Hess}_p\, f \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \colon\ \mathrm{Hess}_p\, f(v, w) := v(Y(f)),$$

де Y – векторне поле, що продовжує w на деякий окіл $U \ni p$ (тобто $Y_p = w$).

Pr. $\mathsf{Hess}_p\, f$ коректно визначена і є симетричною білінійною формою на T_pM.

► Нехай $v, w \in T_pM$, а X, Y продовжують v, w відповідно на відкриту $U \ni p$ (перевірте, що вони існують).

$$v(Y(f)) - w(X(f)) = (X(Y(f)) - Y(X(f)))(p) =$$

$$= ([X, Y](f))(p) = [X, Y]_p(f) = 0,$$

оскільки p – критична для f. Т.ч., $v(Y(f)) = w(X(f))$. Оскільки ліва частина тут не залежить від X, а права – від Y, вони обидві не залежать від X та Y (тільки від f, p, v і w). Це й означає коректність. Звідси і з означення:

$$\mathrm{Hess}_p\, f(v,w) = \mathrm{Hess}_p\, f(w,v).$$

Білінійність очевидно випливає з властивостей диференціювання. ◀

<u>Rem.</u> У локальних координатах для $i,j=\overline{1,n}$:

$$(\mathrm{Hess}_p\, f)_{ij} = \mathrm{Hess}_p\, f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(p).$$

Тобто локальна матриця форми – це матриця Гессе локального задання f (а її визначник – його гессіан). З відомих фактів про функції на $\mathbb{R}^n$, що застосовуються до локального завдання f, тоді випливає:

Cor. Функція f має у p (строгий) локальний максимум тоді й тільки тоді, коли p – критична точка f і $\mathrm{Hess}_p f$ недодатно (відповідно, від'ємно) визначена.

Функція f має у p (строгий) локальний мінімум тоді й тільки тоді, коли p – критична точка f і $\mathrm{Hess}_p f$ невід'ємно (відповідно, додатно) визначена.

Це, зокрема, відноситься до глобальних екстремумів, що є окремими випадками локальних.

Pr. Нехай (M, r) – (гладкий) компактний підмноговид у евклідовому просторі E^{n+q}. Тоді існують такі $p \in M$ і $\nu \in N_pM$, що оператор A_ν строго знаковизначений (відносно першої ф.ф. (M, r) у p).

▶ Визначимо $f\colon M \to \mathbb{R}$: $f(p) := \langle r(p), r(p)\rangle$. Очевидно, вона гладка. Оскільки M – компакт, існує p – точка глобального максимума f. Оскільки p критична, для будь-якого $v \in T_pM$ аналогічно до міркувань у попередньому розділі маємо

$$0 = v(f) = 2\langle v(r), r(p)\rangle = 2\langle d_p r(v), r(p)\rangle.$$

Тобто $r(p) \in N_pM$. Покладемо $\nu := -r(p)$ (це не нуль, бо інакше підмноговид вироджується в точку). Оскільки p – точка максимума, для будь-якого $v \in T_pM$ за попереднім Cor.

$$0 \geqslant \mathrm{Hess}_p\, f(v, v) = [\text{продовжуємо } v \text{ полем } X] =$$

$$= v(X(f)) = v(2\langle dr(X), r\rangle) = [\text{див. попередній розділ}] =$$

$$= 2(\langle \overline{\nabla}_X X, r\rangle + \langle dr(X), dr(X)\rangle)(p) =$$

$$= 2(\langle B_p(v,v), -\nu\rangle + \langle d_p r(v), d_p r(v)\rangle) =$$

$$= 2(-g_p(A_\nu v, v) + g_p(v,v))$$

за розкладенням Гаусса, зв'язком другої ф.ф. з оператором Вейнгартена і означенням першої ф.ф. Тобто $g_p(A_\nu v, v) \geqslant g_p(v,v)$. Оскільки g_p додатно визначена, A_ν – теж: $g_p(A_\nu v, v) \geqslant g_p(v,v) > 0$ для будь-якого вектора $0 \neq v \in T_pM$. ◀

<u>Cor.</u> В евклідовому просторі не існує компактних мінімальних підмноговидів.

▶ Для p і ν з попереднього <u>Pr.</u>

$$\langle H_p, \nu\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{Tr} A_\nu \neq 0,$$

тому $H_p \neq 0$. ◀

Rem. Як ми бачили, у інших многовидах компактні мінімальні підмноговиди існують: наприклад, тори Кліффорда у сферах.

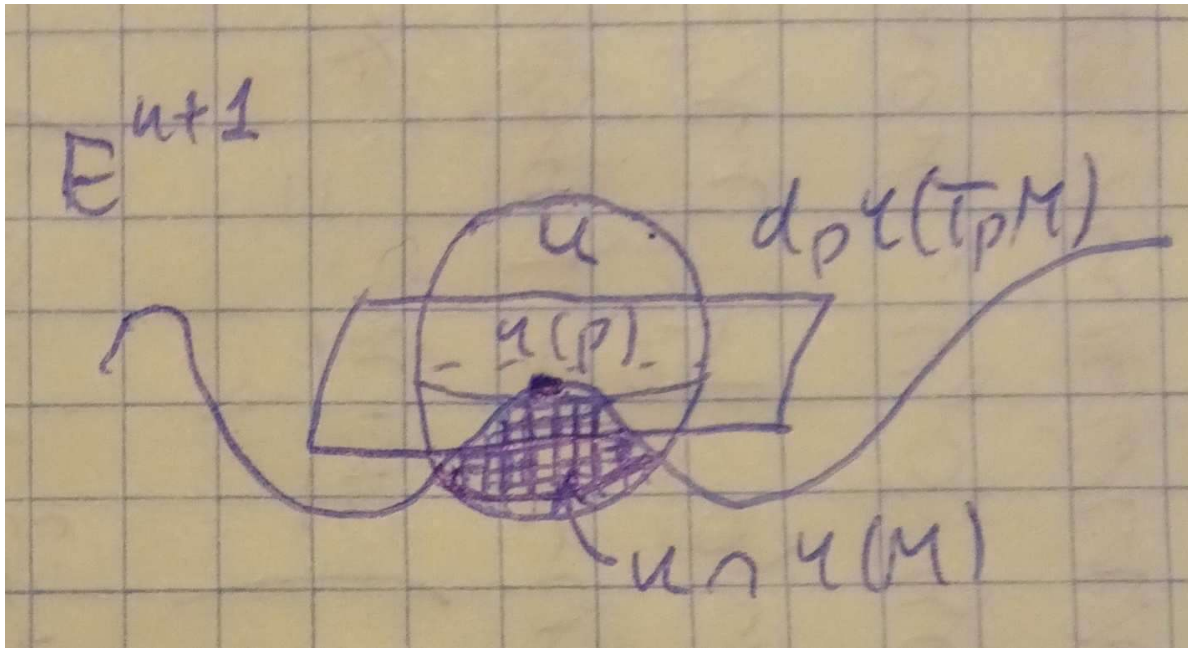
Існує зв'язок між топологією многовида та індексами форм Гессе критичних точок функцій на ньому, що встановлюється теорією Морса. Див., наприклад, Хірш, Мілнор – Уоллес або Дж. Мілнор, Теорія Морса.

Локальна опуклість

Далі у цьому розділі (M, r) – (гладка) гіперповерхня в евклідовому просторі E^{n+1}, усі позначення стандартні. Як і раніше, для $p \in M$ вважаємо $d_p r(T_p M)$

підпростором $\mathbb{R}^{n+1}$, але тепер перенесемо його в $r(p)$ (тобто розглянемо афінну дотичну гіперплощину $T_p(M,r)$). Також далі ми вважаємо, що для деякої $p \in M$ перетини $r(M) \cap U$ для відкритих $U \ni r(p)$ є образами відкритих околів p у M, тобто M є принаймні ''локально'' вкладеною (у загальному випадку можемо замінити ці перетини на образи відкритих підмножин M).

def. Назвемо гіперповерхню (M,r) локально опуклою в $p \in M$, якщо $d_p r(T_p M)$ – опорна гіперплощина множини $r(M) \cap U$ для деякої відкритої $U \ni r(p)$ (тобто $r(M) \cap U$ лежить в одному замкненому напівпросторі відносно $d_p r(T_p M)$). Якщо при цьому $r(M) \cap U \cap d_p r(T_p M) = r(p)$, будемо звати (M,r) строго локально опуклою в p.



<u>Pr.</u> Нехай $\nu \neq 0$ – нормальний вектор гіперповерхні (M, r) в p. (M, r) (строго) локально опукла в p тоді й тільки тоді, коли A_ν (строго) знаковизначений (відносно першої ф.ф. гіперповерхні у p).

► Отже, ν – вектор нормалі $d_p r(T_p M)$. Тоді з попереднього <u>def.</u>, (M, r) (строго) локально опукла в p

тоді й тільки тоді, коли функція $f := \langle r - r(p), \nu \rangle$ (що, очевидно, є гладкою) має в p точку (строгого) екстремума (також див. рис. нижче). Відповідно до результатів попереднього підрозділу, це еквівалентне тому, що для будь-якого $v \in T_pM$

$$0 = v(f) = \langle v(r) - 0, \nu \rangle = \langle d_p r(v), \nu \rangle$$

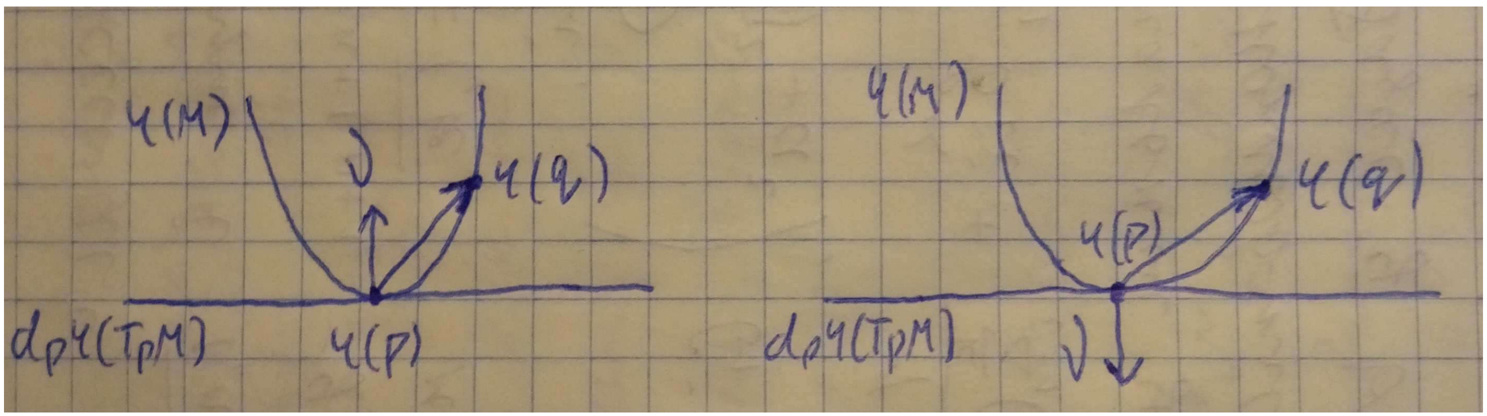
(це завжди вірно, бо ν нормальний), а вираз

$$\mathrm{Hess}_p\, f(v, v) = v(X(f)) = v(\langle dr(X), \nu \rangle) =$$

$$= \langle \overline{\nabla}_X X, \nu \rangle (p) = \langle B_p(v, v), \nu \rangle = g_p(A_\nu v, v)$$

зберігає знак (відповідно, строго зберігає знак при $v \neq 0$), де, як і раніше, X – це поле, що продовжує v. Це і є потрібна умова знаковизначеності. ◀

Rem. Зокрема, строга локальна опуклість означає, що точка p еліптична. Геометричний сенс знаку A_ν умовно проілюстровано на рисунках:



Тобто: $A_\nu \geqslant 0 \Leftrightarrow 0$ – локальний мінімум f у $p \Leftrightarrow f \geqslant 0$ на околі $V \ni p \Leftrightarrow \nu$ напрямлений ''усередину опуклості'', тобто $r(M) \cap U$ лежить у напівпросторі, що задається вектором ν.

$A_\nu \leqslant 0 \Leftrightarrow 0$ – локальний максимум f у $p \Leftrightarrow f \leqslant 0$ на околі $V \ni p \Leftrightarrow \nu$ напрямлений ''назовні опуклості'', тобто $r(M) \cap U$ лежить у напівпросторі, що задається вектором $-\nu$.

І аналогічно для випадків строгої локальної опуклості у точці.

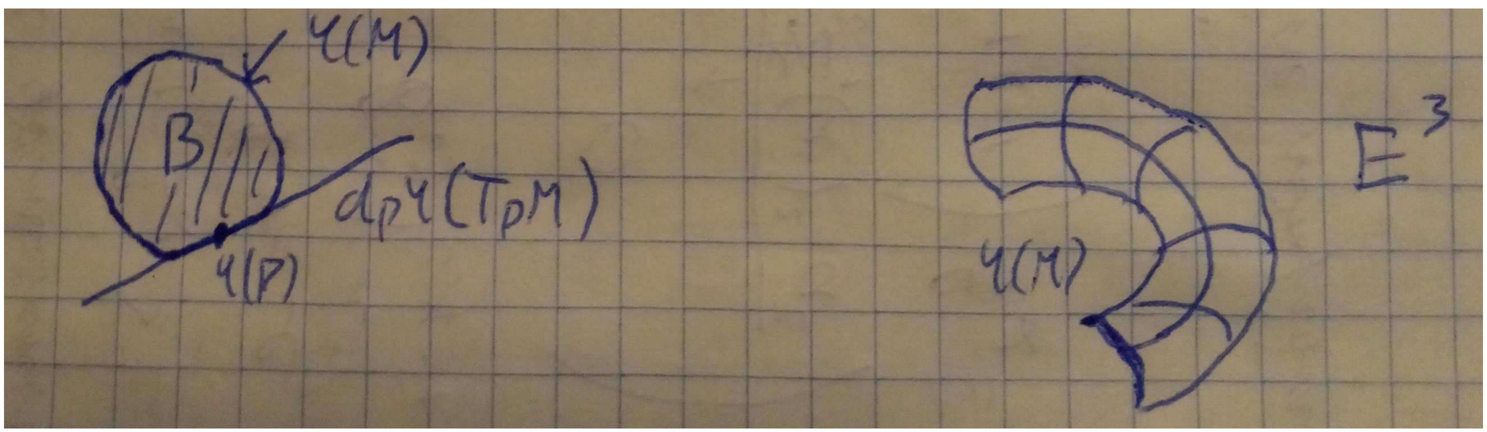
<u>Глобальна опуклість</u>

<u>def.</u> Гіперповерхня (M, r) називається (глобально) опуклою, якщо $r(M) = \partial B$, де $B \subset E^{n+1}$ – опукла підмножина: для будь-яких $x, y \in B$ відрізок $[x, y]$ з кінцями в цих точках міститься у B.

Pr. Якщо гіперповерхня (M, r) опукла, то для будь-якої $p \in M$ (M, r) локально опукла в p.

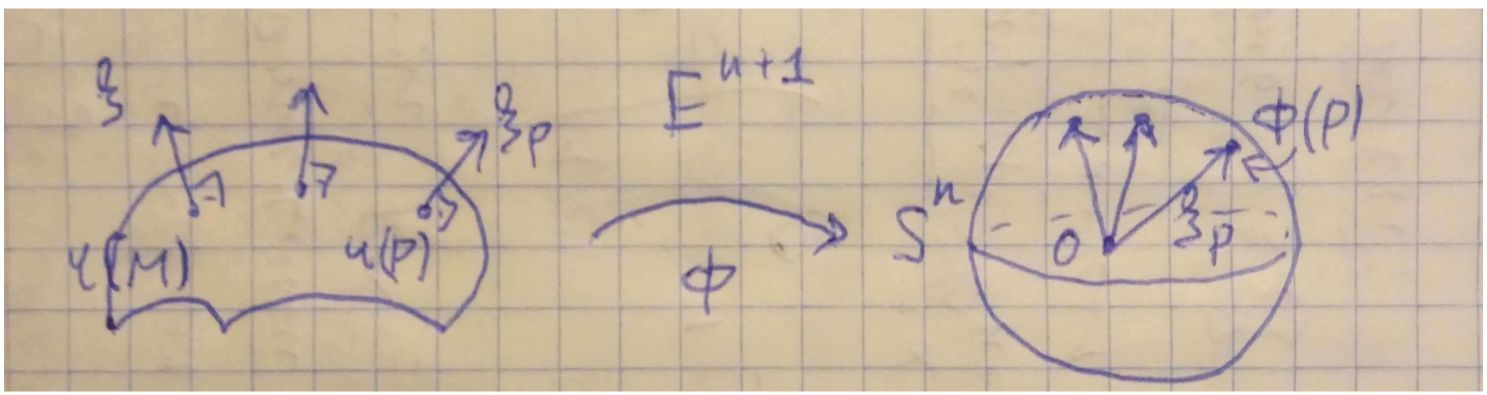
► Отже, $r(M) = \partial B = \partial \overline{B}$, де B опукла, а отже й $\overline{B}$ опукла. Тоді для будь-якої $p \in M$ існує опорна гіперплощина $\overline{B}$ у $r(p)$ (це випливає з теореми Хана – Банаха для скінченновимірного випадку). Зокрема, це опорна гіперплощина $r(M) \subset \overline{B}$. Тобто, як вище, $0 = f(p)$ – глобальний екстремум гладкої функції $f := \langle r - r(p), \nu \rangle$, де ν – вектор нормалі опорної гіперплощини. Звідси, $0 = v(f) = \langle d_p r(v), \nu \rangle$ для будь-якого $v \in T_pM$ як у доведенні попереднього Pr., тобто опорна гіперплощина збігається з дотичною, а це й означає опуклість у p. ◄

Rem. Локальна опуклість не обов'язково буде строгою (див. перший з рисунків знизу). З локальної опуклості в будь-якій точці (навіть строгої), взагалі кажучи, не випливає опуклість, потрібні додаткові умови. На другому з рисунків наведено приклад строго локально опуклої в кожній точці неопуклої поверхні в E^3, що утворена перенесенням дуги кола уздовж спіралі (або просто кола):



Rem. Далі будемо розглядати гіперповерхні, у яких існує неперервне одиничне нормальне поле (можна показати, що тоді існує й гладке). В E^{n+1} ця умова рівносильна орієнтовності. Фіксуємо таке поле ξ.

def. Нехай гіперповерхня (M, r) орієнтовна, $\xi\colon M \to E^{n+1}$ – її одиничне (тобто $|\xi| = 1$) нормальне поле. Переносячи початки векторів ξ_p, $p \in M$, у 0, визначимо $\Phi\colon M \to S^n\colon \Phi(p) := \xi_p \in S^n$. Φ зветься гауссовим відображенням (M, r).



Rem. Тут $\xi_p \in S^n$, бо $|\xi| = 1$. Іншими словами, за побудовою $\xi = \rho \circ \Phi$, де $\rho\colon S^n \to E^{n+1}$ – стандартне вкладення (включення) сфери. Теорема Гаусса про площу сферичного образу у багатовимірному випадку узагальнюється наступним чином:

Th. (Гаусса про об'єм гауссового образу) Для орієнтованої гіперповерхні (M, r) і кубовної (тобто з компактним замиканням і границею міри 0 за Жорданом) $D \subset M$

$$\int\limits_D \Phi^* dV_h = \int\limits_D |K| dV_g,$$

де $\Phi^* dV_h$ – дія кодиференціала гауссового відображення Φ на ріманову форму об'єму dV_h стандартної метрики (першої ф.ф.) h сфери S^n, dV_g – ріманова форма об'єму першої ф.ф. g гіперповерхні, K – її кривина Гаусса – Кронекера.

▶ Впр. ◀

Rem. Якщо $\Phi\colon D \to \Phi(D)$ – дифеоморфізм, то

$$\int\limits_D \Phi^* dV_h = \int\limits_{\Phi(D)} dV_h = Vol(\Phi(D)),$$

тобто зліва у формулюванні Th. стоїть саме об'єм гауссового образу множини D у сфері (Впр.). Зокрема, ця теорема пояснює геометричний сенс модуля кривини Гаусса – Кронекера (геометричний сенс її знаку розкриває, наприклад наступна теорема).

<u>Lem.</u> Φ – локальний дифеоморфізм у $p \in M$ тоді й тільки тоді, коли A_{ξ_p} невироджений.

► Отже, $\xi = \rho \circ \Phi$, де $\rho \colon S^n \to E^{n+1}$ – вкладення. Оскільки ρ має максимальний ранг n у всіх точках, Φ – локальний дифеоморфізм у p тоді й тільки тоді, коли ξ має максимальний ранг n у p (як відображення в $\mathbb{R}^{n+1}$). Це еквівалентне тому, що $d_p\xi(v) \neq 0$ для будь-якого $0 \neq v \in T_pM$. Нехай у локальних координатах $v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ та $\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тоді

$$0 \neq d_p\xi(v) = v^i \frac{\partial \xi^a}{\partial u^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^a} = v(\xi) =$$

$$= [\text{див. попередній розділ}] = \overline{\nabla}_v \xi =$$

$$= [\text{розкладення Вейнгартена}] = -d_p r(A_{\xi_p} v).$$

Оскільки r – занурення, $d_p r$ – лінійна ін'єкція, тому це еквівалентне умові $A_{\xi_p} v \neq 0$ для будь-якого $v \neq 0$, тобто невиродженості A_{ξ_p}. ◀

Rem. Для неорієнтовної гіперповерхні гауссове відображення можна визначити як відображення у проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$, розглядаючи нормальні прямі замість одиничних нормальних векторів. Існує також його узагальнення на підмноговиди довільної ковимірності – відображення Грассмана.

Th. (Адамар) Нехай (M, r) – орієнтовна компактна зв'язна гіперповерхня в E^{n+1}, де $n \geqslant 2$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. (M, r) строго локально опукла в кожній точці.

2. Гауссове відображення $\Phi\colon M \to S^n$ – дифеоморфізм.

3. Кривина Гаусса – Кронекера $K(p) \neq 0$ для будь-якої $p \in M$.

Якщо виконана будь-яка з цих умов, то гіперповерхня опукла.

Rem. Як ми знаємо з попереднього підрозділу, умова 1. еквівалентна тому, що для будь-яких $p \in M$ і $0 \neq \nu \in N_pM$ оператор A_ν строго знаковизначений, тобто визначений додатно чи від'ємно. Більш того, для неперервного одиничного нормального поля ξ відображення $p \mapsto \operatorname{sign} A_{\xi_p}$ неперервне (чому?).

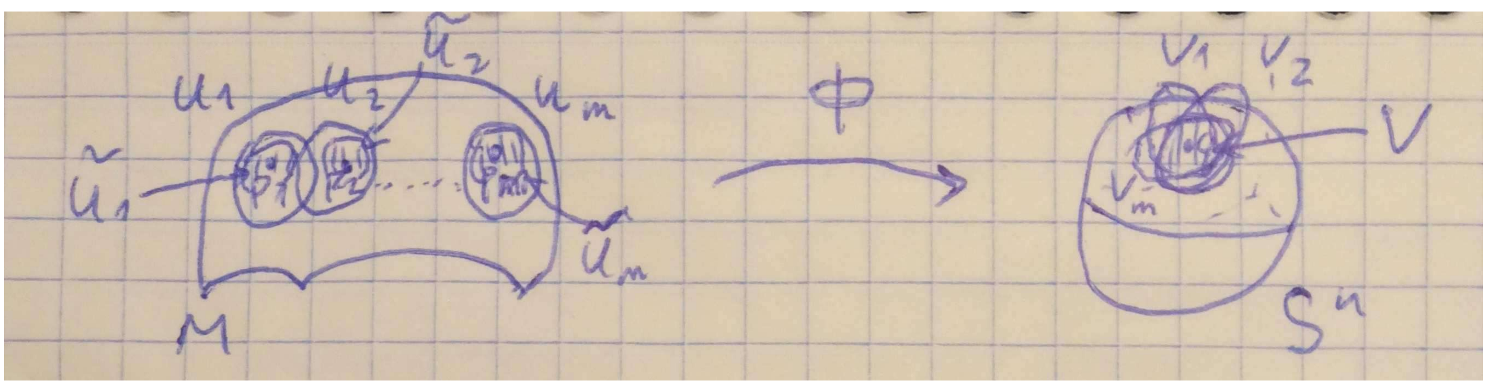
Зі зв'язності тоді випливає, що знак зберігається на усьому M: $A_{\xi_p} > 0$ для будь-якого p або $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якого p. Аналогічно, в 3. зі зв'язності витікає, що $K > 0$ на M або $K < 0$ на M. При парновимірному M зі знаковизначеності усіх A_ν тоді випливає, що $K > 0$. Зокрема, при $n = 2$ три перші умови еквівалентні тому, що гауссова кривина поверхні додатна.

▶ 1. $\Rightarrow$ 2. Отже, нехай ξ – одиничне нормальне поле. В силу міркувань з Rem., A_ξ зберігає знак. Нехай для визначеності $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якої $p \in M$. В силу Lem., Φ – локальний дифеоморфізм у кожній $p \in M$, тобто існують відкриті $U \ni p$ (у M) і $V \ni \Phi(p)$ (у S^n) такі, що $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм. Зокрема, $\Phi(p)$ – внутрішня точка $\Phi(M)$. Тобто $\Phi(M)$ відкрита в S^n. З іншого боку, оскільки M – компакт, $\Phi(M)$ – компакт, тому $\Phi(M)$ замкнена. Отже, $\Phi(M)$ – непорожня відкритозамкнена підмножина зв'язної S^n, тому $\Phi(M) = S^n$, тобто Φ – сюр'єкція.

Нехай тепер $q \in S^n$. Покажемо, що її прообраз $\Phi^{-1}(q)$ скінченний. Дійсно, припустимо, що $\Phi^{-1}(q)$ – нескінченна множина. Оскільки M – компакт, у $\Phi^{-1}(q)$ тоді існує гранична точка $p_0 \in \Phi^{-1}(q)$ (вона належить $\Phi^{-1}(q)$, оскільки ця множина замкнена). Тобто $(U \setminus \{p_0\}) \cap \Phi^{-1}(q) \neq \varnothing$ для будь-якої відкритої $U \ni p_0$. Більш того, $U \setminus \{p_0\}$ містить нескінченну кількість точок з $\Phi^{-1}(q)$ (наприклад, використаємо локальні координати й розглянемо в якості околів прообрази евклідових куль, радіуси яких прямують до нуля).

Тоді Φ на U – не ін'єкція. Але з локальної дифеоморфності Φ в p_0 випливає, що існує її окіл U такий, що $\Phi\colon U \to \Phi(U)$ – дифеоморфізм, протиріччя.

Отже, для будь-якої $q \in S^n$ маємо прообраз $\Phi^{-1}(q) = \{p_1, ..., p_m\}$. І для кожного $i = \overline{1,m}$ існують відкриті $U_i \ni p_i$, $V_i \ni q$ такі, що $\Phi\colon U_i \to V_i$ – дифеоморфізм. Покладемо $V := \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i$, і $\widetilde{U_i} := \Phi^{-1}(V) \cap U_i$ для кожного $i = \overline{1,m}$.



Тоді $\Phi^{-1}(V) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} \widetilde{U_i}$ – диз'юнктне об'єднання відкритих множин, і для кожного i $\Phi\colon \widetilde{U_i} \to V$ – гомеоморфізм. Отже, $\Phi\colon M \to S^n$ – (сюр'єктивне) накриття. Оскільки M зв'язна, а S^n однозв'язна (бо $n \geqslant 2$), Φ – бієкція (більш того, гомеоморфізм). Звідси і з локальної дифеоморфності в кожній точці випливає, що Φ – дифеоморфізм.

<u>2.</u> $\Rightarrow$ <u>3.</u> Якщо Φ – дифеоморфізм, то з <u>Lem.</u> для будь-якої $p \in M$ маємо, що A_{ξ_p} невироджений, а тоді $K(p) = \det A_{\xi_p} \neq 0$.

<u>3.</u> $\Rightarrow$ <u>1.</u> Знову ж, оскільки $\det A_{\xi_p} = K(p) \neq 0$ для кожної $p \in M$, A_{ξ_p} невироджений. В силу одного з <u>Pr.</u>

вище, існує p така, що A_{ξ_p} знаковизначений (ξ_p колінеарний ν з цього Pr., оскільки $\dim N_pM = 1$). Тоді в силу зв'язності знаковизначеність зберігається на усьому M (Впр. – використати, наприклад, локальні координати та критерій Сільвестра).

Опуклість. Отже, нехай тепер виконані умови 1.-3.

Знову ж для визначеності можемо вважати, що $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якої $p \in M$ (з 1. і Rem.). Тоді з результатів попереднього підрозділу випливає, що для кожної $p \in M$ (M, r) строго локально опукла в p, і $f := \langle r - r(p), \xi_p \rangle$ має в p строгий локальний максимум 0. Нехай q – якась точка локального максимума цієї функції. Тоді для будь-якого $v \in T_qM$

$$0 = v(f) = \langle v(r) - 0, \xi_p \rangle = \langle d_q r(v), \xi_p \rangle,$$

тобто $d_q r(T_q M) \perp \xi_p$, а тоді $\xi_q = \pm\xi_p$. І далі,

$$0 \geqslant \mathsf{Hess}_q\, f(v,v) = v(X(f)) = \langle (\overline{\nabla}_X X)_q, \xi_p\rangle =$$

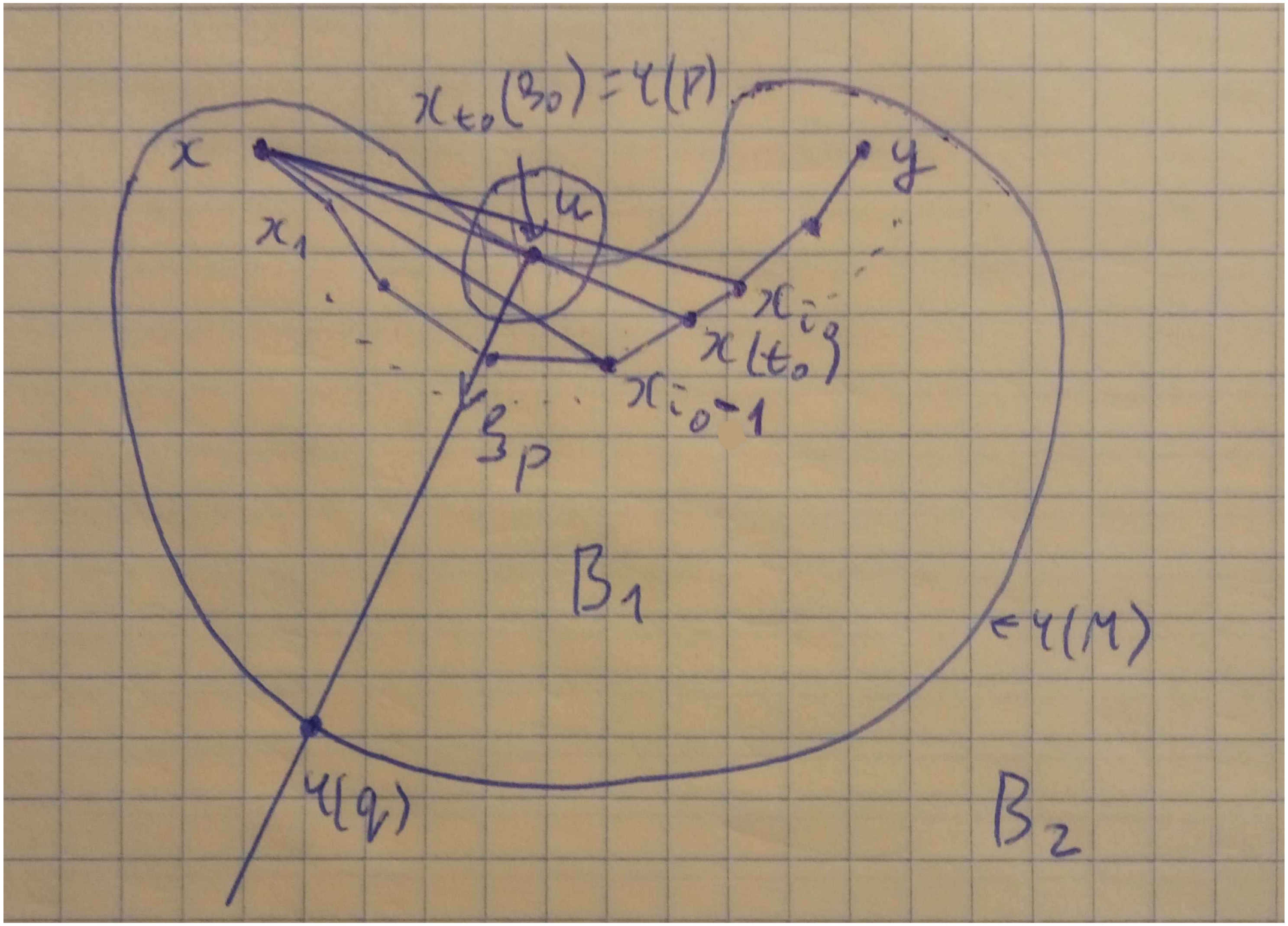
$$= \pm\langle B_q(v,v), \xi_q\rangle = \pm g_q(A_{\xi_q} v, v)$$

для будь-якого $v \in T_q M$ (тут, як і раніше, поле X продовжує v на деякий окіл q). Оскільки $A_{\xi_q} < 0$, тут повинен бути знак $+$. Тобто $\xi_q = \xi_p$, отже $\Phi(q) = \Phi(p)$, і в силу бієктивності Φ (з 2.) $q = p$. Таким чином, p – єдина точка максимума, тобто 0 – строгий глобальний максимум f. Зокрема, якщо $r(q) = r(p)$, то $f(q) = 0$, і тому $q = p$, тобто r ін'єктивне.

Оскільки r – ін'єктивне занурення і M – компакт, r – вкладення. З 2. випливає, що M гомеоморфний S^n. Використаємо (n-вимірну) теорему Жордана:

Th. (Жордан) Нехай (топологічний) многовид M гомеоморфний S^n, і $r\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ – топологічне вкладення (тобто $r\colon M \to r(M)$ – гомеоморфізм). Тоді $\mathbb{R}^{n+1}\backslash r(M) = B_1 \sqcup B_2$, де B_1 і B_2 – відкриті лінійно зв'язні множини, $r(M) = \partial B_1 = \partial B_2$, і B_1 – обмежена множина (вона зветься внутрішністю $r(M)$), а B_2 – ні (зовнішність $r(M)$).

Доведемо, що у нашому випадку B_1 опукла (за означенням, це й буде опуклість (M, r)). Припустимо, що це не так, тобто існують $x, y \in B_1$ такі, що $[x, y] \not\subset B_1$. В силу лінійної зв'язності B_1, існує набір точок $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = y$ такий, що $[x_{i-1}, x_i] \subset B_1$ для кожного $i = \overline{1, m}$ (чому?). Тоді існує i_0 таке, що $[x, x_{i_0-1}] \subset B_1$, але $[x, x_{i_0}] \not\subset B_1$.



$x_{t_0}(s_0) = \psi(p)$
x
y
u
x_1
x_{i_0}
$x(t_0)$
x_{i_0-1}
ξ_p
B_1
$\leftarrow \psi(M)$
$\psi(q)$
B_2

Позначимо $x(t) := (1-t)x_{i_0-1} + tx_{i_0}$. Тоді між 0 і 1 існує $t_0 := \inf\{t \mid [x, x(t)] \not\subset B_1\}$. Аналогічно, позначимо $x_{t_0}(s) := (1-s)x + sx(t_0)$, тоді між 0 і 1 існує $s_0 := \inf\{s \mid x_{t_0}(s) \notin B_1\}$. За побудовою, $x_{t_0}(s_0)$ – точка $\partial B_1 = r(M)$, тобто $x_{t_0}(s_0) = r(p)$ для деякої $p \in M$.

За побудовою, існує окіл $U \ni r(p)$ такий, що усі точки $r(M) \cap U$ лежать в одному замкненому напівпросторі відносно опорної $d_p r(T_p M)$ (в силу локальної опуклості), і перетин U з доповнюючим відкритим напівпростором складається з точок B_1. Більш того, оскільки $A_{\xi_p} < 0$, ξ_p напрямлений саме в цей напівпростір (див. попередній підрозділ), тобто $r(p) +$

$\lambda\xi_p \in B_1$ для достатньо малих $\lambda > 0$. З іншого боку, B_1 (і $r(M)$ в силу компактності) обмежена, тому $r(p) + \lambda\xi_p \in B_2$ для достатньо великих λ. Тоді у цьому відкритому промені міститься точка межі $\partial B_1 = \partial B_2 = r(M)$, тобто існує $\lambda_0 > 0$ таке, що $r(p)+\lambda_0\xi_p = r(q)$ для деякої $q \in M$. Тоді $f(q) = \lambda_0 > 0$ (де, як і раніше, $f = \langle r - r(p), \xi_p \rangle$). Але вище ми показали, що 0 є глобальним максимумом f при $A_{\xi_p} < 0$, тобто $f \leqslant 0$, протиріччя. ◄

<u>Rem.</u> Знаковизначеність оператора Вейнгартена еквівалентна такій же знаковизначеності другої ф.ф. в силу зв'язку між ними.

<u>Впр.</u> Показати, що аналогічне твердження вірне й при $n = 1$ (для жорданової кривої, кривина якої зберігає знак).

Впр. Показати, що при $n = 2$ опуклість компактної зв'язної орієнтовної поверхні в E^3 буде випливати з умови, що слабша за 3.: $K \geqslant 0$ на M та існує така $p \in M$, що $K(p) > 0$.