**34.F.** $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : z \mapsto e^{z}$ є накриттям.

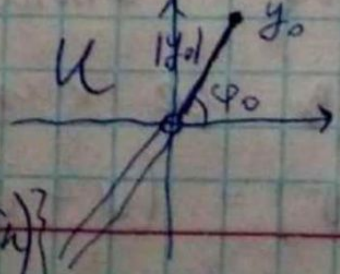
$p(u+iv) = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} = e^{u}\cos v + i e^{u}\sin v$ $\forall z = u+iv \in \mathbb{C}$. $p$ – непер. і сюр'єк на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:

бо задається непер. ф-ціями

$\forall y \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $y = p(\ln|y| + i \arg y)$.

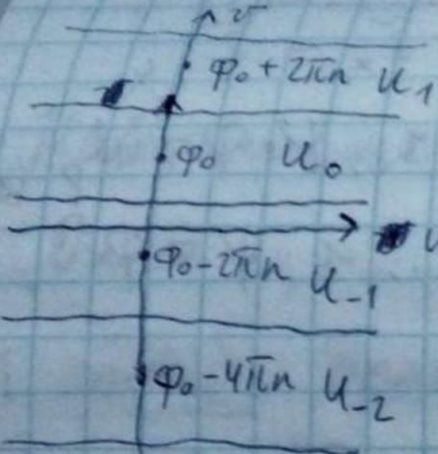
При цьому для $y = |y|e^{i\varphi}$ $p^{-1}(y) = \{\ln|y| + i(\varphi + 2\pi n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\forall y_0 = |y_0|e^{i\varphi_0}$ покладемо $U := \{\underset{>0}{|y|}e^{i\varphi} \mid \varphi \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)\}$ – це площина $\mathbb{C}$ з вирізаним променем:




Тоді

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{u+iv \mid u\in\mathbb{R},\ v \in (\varphi_0 - \pi + 2\pi n, \varphi_0 + \pi + 2\pi n)\}}_{U_n}$$




Це відкриті диз'юнктні підмножини $\mathbb{C}$ (смуги ~~полоски~~). $\forall n$

$$p: \underset{\substack{\cap \\ (\varphi_0-\pi+2\pi n,\ \varphi_0+\pi+2\pi n)}}{u+iv} \mapsto \underset{\substack{\| \\ e^u\cos v + i e^u \sin v}}{e^u e^{iv}} \in U -$$

від, неперервне, бо задається непер. ф-ціями і обернене

$$y \mapsto \begin{cases} \left(\ln|y|,\ \arccos\frac{\operatorname{Re} e^{-i\varphi_0}y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \operatorname{Im} e^{-i\varphi_0}y \geq 0 \\ \left(\ln|y|,\ -\arccos\frac{\operatorname{Re} e^{-i\varphi_0}y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \operatorname{Im} e^{-i\varphi_0}y \leq 0 \end{cases}$$

неперервне. Отже, $U$ – правильно накр., $(\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{0\}, p)$ – універсальне накр.

Також це накриття над простором орбіт дії $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}$:

$n\cdot(u+iv) = (u+i(v+2\pi n))$, непер. і цілком розр.

Порівняємо з накриттям з задачі <u>37.1</u>:

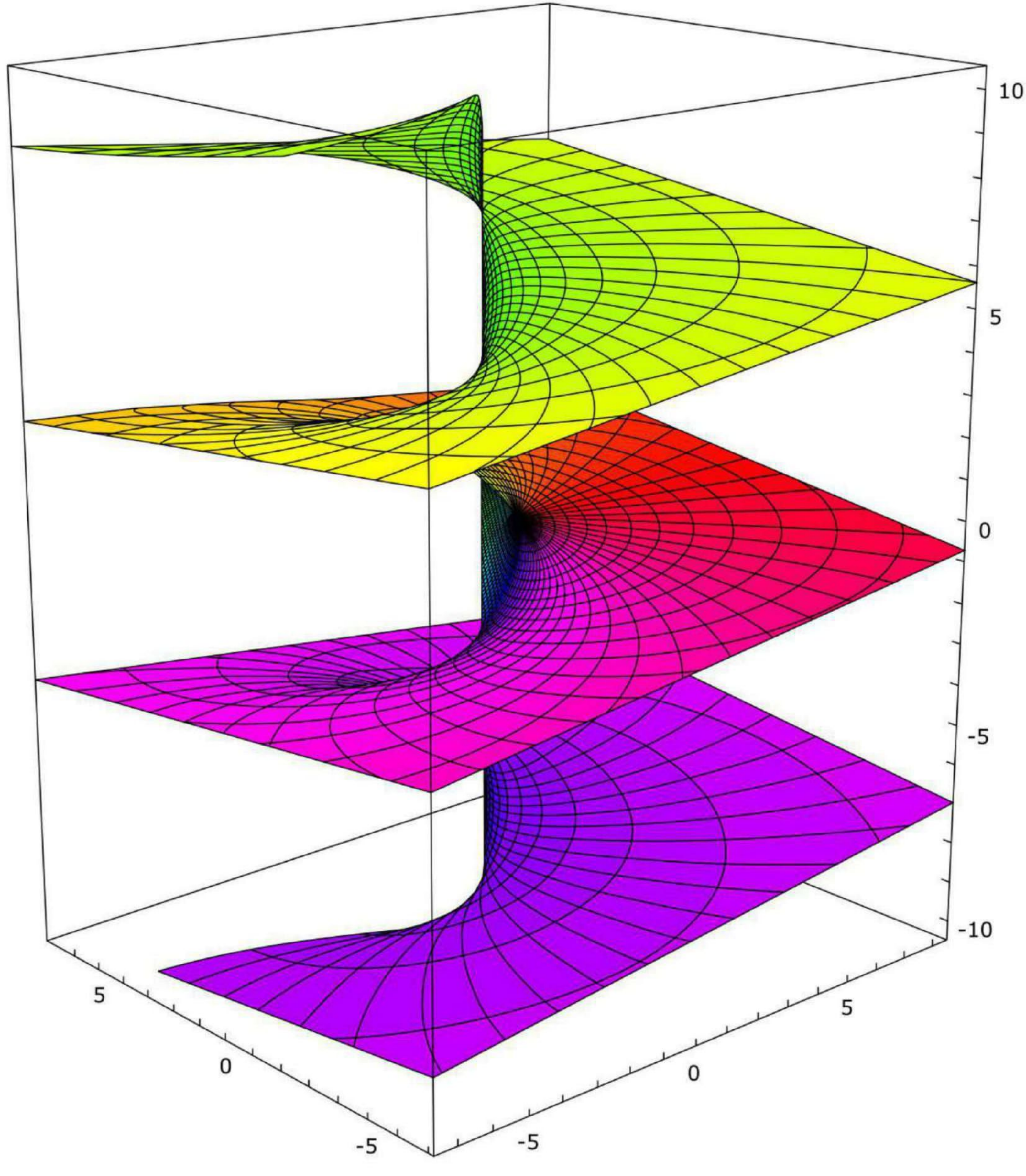
$$q: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : (x,y) \mapsto y e^{2\pi i x}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{R}^2_+ \arrow[d, "q"] \\ & \mathbb{C}\setminus\{0\} \end{tikzcd}$$

Вони ізоморфні: для гомеоморфізма $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+ : u + iv \mapsto \left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right)$.

Дійсно, $\forall\ u+iv \in \mathbb{C}$ $q(\varphi(u+iv)) = q\left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right) =$
$= e^u e^{2\pi i \frac{v}{2\pi}} = e^{u+iv} = p(u+iv)$.

Уявлення про структуру $p$ дає гелікоїд ("ріманова поверхня ф-ції $y = e^z$"): беремо злічену кількість копій $\mathbb{C}$ і склеюємо уздовж розрізів.



10
5
0
-5
-10
5
0
-5
5
0
-5

Локально визначене $(P|_{U_n})^{-1} : U \to U_n$ тоді інтерпретують як комплексний аналог логарифма. Логарифм в цілому $(P^{-1})$ тоді стає "багатозначною функцією".

Більш точно, розглянемо "графік" $X := \{(y,z) \in \mathbb{C}^2 \mid y = e^z\}$ та проєкції $p: X \to \mathbb{C} : (y,z) \mapsto y$ та $q: X \to \mathbb{C} : (y,z) \mapsto z$. Тоді $X_0 := p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = X$ є поверхнею (2-вим. многовидом) з додатковою т. зв. комплексною структурою — рімановою поверхнею $y = e^z$, $p: X_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — накриття, що ототожн. $z$ паралел, а $q: X_0 \to \mathbb{C}$ — диффеоморфізмом. Композиції $q \circ (p|_{U_n})^{-1}: U \to \mathbb{C}$ для різних $U_n$ будуть "комплексними логарифмами" $z = \ln y$.

34.3. Показати, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $p: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}: z \mapsto z^n$ задає накриття

$p(z) = p(|z|e^{i\varphi}) = |z|^n e^{in\varphi}$ – неперервне, бо задається непер. ф-ціями і сюр $\left(\forall\, y = |y|e^{i\psi} = p\left(\sqrt[n]{|y|}\, e^{i\frac{\psi}{n}}\right)\right)$.

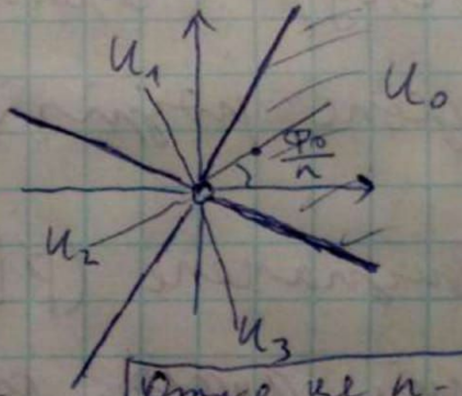
$\forall\, y_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ оберемо $U$ так само, як у 34.F: $y_0 = |y_0|e^{i\psi_0}$

$U = \left\{ y = |y|e^{i\psi} \;\middle|\; \begin{matrix} |y|>0 \\ \psi \in (\psi_0 - \pi, \psi_0 + \pi) \end{matrix} \right\}$. Тоді

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left\{ z = |z| e^{i\varphi} \,\middle|\, \substack{|z|>0,\\ \varphi \in \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{(2k-1)\pi}{n}, \frac{\varphi_0}{n} + \frac{(2k+1)\pi}{n} \right)} \right\}}_{U_k},$$ – відкриті

диз. підмножини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (кути):

(також це фактор-простір за дією групи обертань на $\frac{2\pi}{n}$).

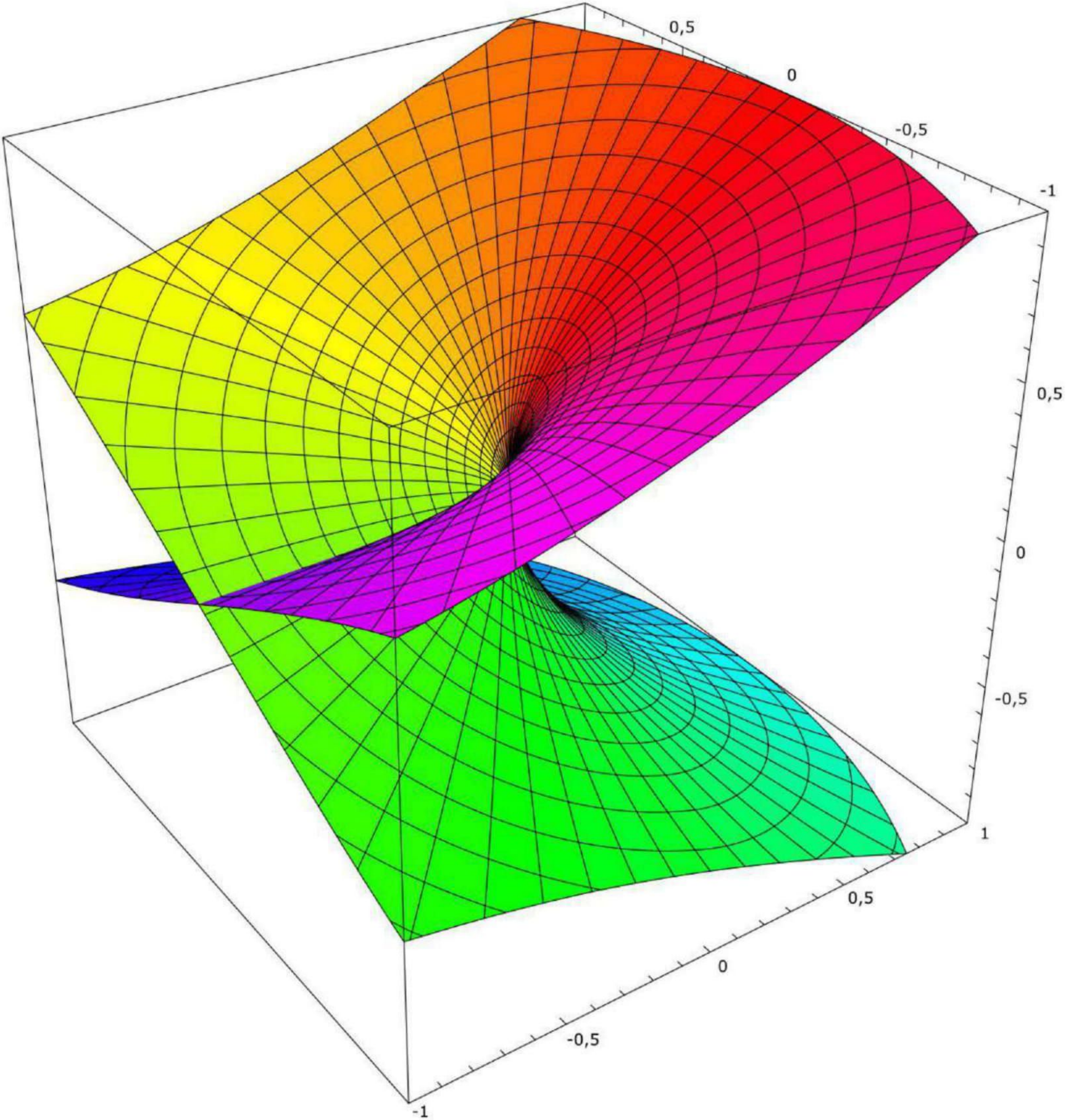


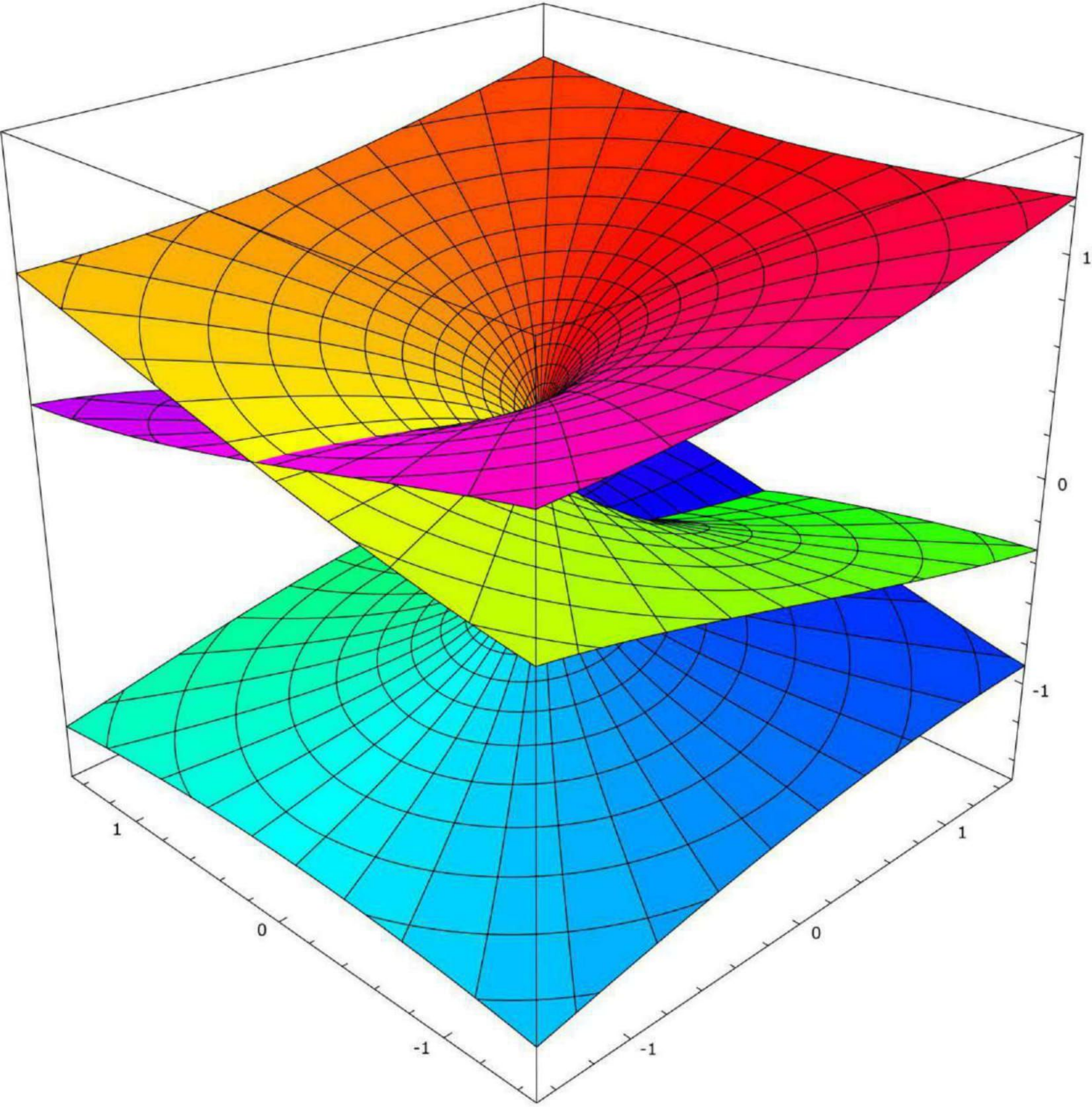

$n = 4$.

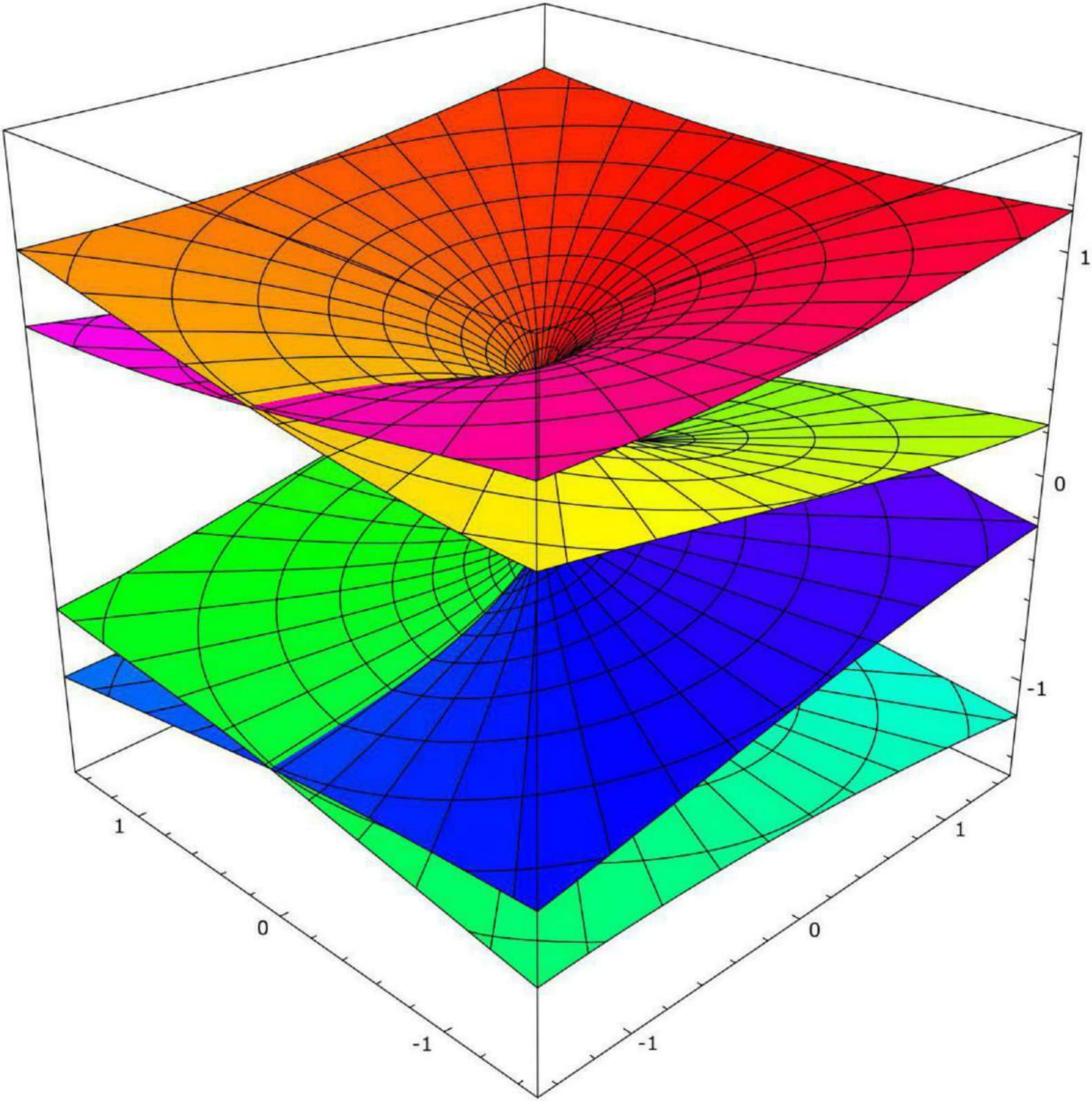
$p: U_k \to U$ – вгу, непер. як обмеження

$\boxed{\text{Отже, це } n\text{-листове накриття}}$

$p$. Обернене можна записати аналогічно до попер. задачі. Це буде лок. задання "багатозначної ф-ції" $z = \sqrt[n]{y}$. Уявлення про $p$ при $n = 2, 3, 4$ дають поверхні:


1
0,5
0
-0,5
-1
0,5
0
-0,5
1
0,5
0
-0,5
-1


1
0
-1
1
0
-1
1
0
-1


1
0
-1
1
0
-1
1
0
-1

Тут знову виникає ріманова поверхня ф-ції $y = z^n$, $X_0 := p^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \cong \mathbb{C}\setminus\{0\}$, де $X := \{(y,z) \in \mathbb{C}^2 \mid y = z^n\}$, $p : X \to \mathbb{C} : (y,z) \mapsto y$, і $p : X_0 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – накриття, що ототожн. з нашим. Тоді $q \circ (p|_{U_k})^{-1} : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, де $q : X_0 \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : (y,z) \mapsto z$ – дифео-зм – є "комплексні корені" $z = \sqrt[n]{y}$.

Взагалі, багато ідей з комплексного аналізу можна інтерпретувати в термінах накриттів. Див., наприклад, С.М. Львовский. Лекции по комплексному анализу.

(Тв. 17.2, Косньовскі). Нехай $X$ – хаусдорфовий ТП, група $G$
(Рч. 7.2. лекцій)
діє на $X$ неперервно і вільно, $G$ скінченна. Тоді ця дія цілком розривна.

Отже, $G = \{a_0 = e, a_1, \dots, a_n\}$, $\forall i = \overline{0,n}$ $\lambda_{a_i} : x \mapsto a_i \cdot x$ – неперервне ($\Rightarrow$ гомеоморфізм) $X \to X$, і $\forall i \neq 0$ $\forall x \in X$ $a_i \cdot x \neq x$. (при цьому $e \cdot x = x$).

$\forall x \in X$ розглянемо її орбіту $\{a_i \cdot x\}_{i=0}^{n}$. $\forall i = \overline{1,n}$ за хаусдорф. $\exists$ відкр. $U_i \ni a_i \cdot x$, $V_i \ni x$: $U_i \cap V_i = \emptyset$. Покладемо $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ – відкр. окіл $x$, $\forall i$ $V \cap U_i = \emptyset$. $\forall i = \overline{1,n}$ $\lambda_{a_i}$ – гомео-зм $\Rightarrow$ $\lambda_{a_i}^{-1}(U_i)$ – відкр. окіл $x$. Покладемо $U := V \cap \bigcap_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}^{-1}(U_i)$ – відкр. окіл $x$. Тоді $\forall i = \overline{1,n}$ $\lambda_{a_i}(U) \subset \lambda_{a_i}(\lambda_{a_i}^{-1}(U_i)) = U_i$, $U \subset V \Rightarrow U \cap \lambda_{a_i}(U) = \emptyset$. За def. дія цілком розривна

Ex. Лінзові простори. $X = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ : $S^3 = \{ (z, w) \mid z, w \in \mathbb{C},$ $\overline{|z|^2 + |w|^2 = 1} \}$, хаусдорфовий. $G = \mathbb{Z}_p$. Нехай $q$ – вз. просте з $p$ натуральне.

$\forall k = \overline{0, p-1}$

$$[k] \cdot (z, w) := \left( e^{\frac{2\pi k i}{p}} z, \ e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \right)$$

Канонічна проекція $S^3 \to L(p,q)$ задає $p$-листове універсальне накриття

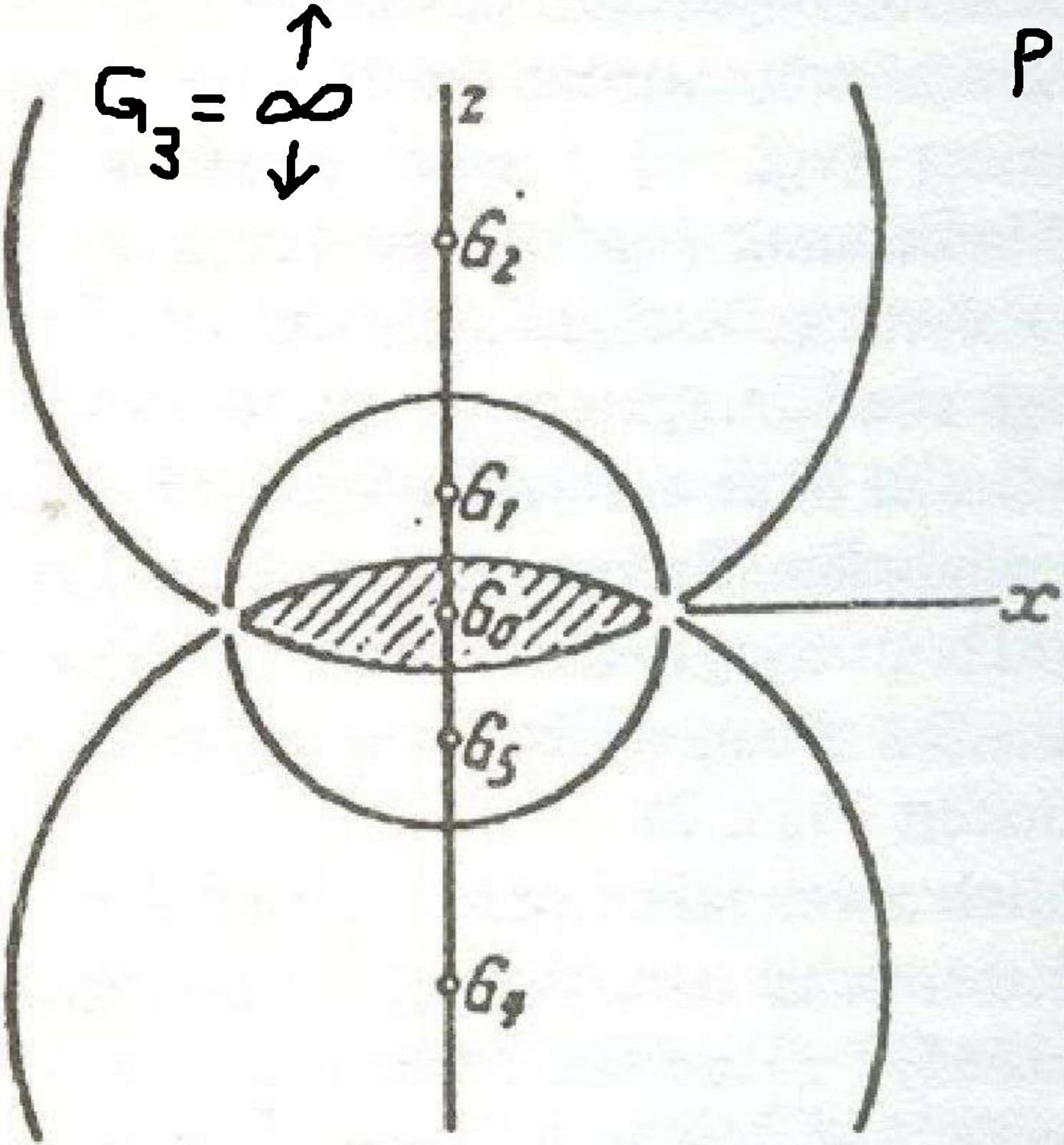
$\forall (z, w) \in S^3$ $[k] \cdot (z, w) \in S^3$ і $l_{[k]}$ неперервне, бо у координатах $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ задається непер. ф-ціями. Це дія, бо $[0] \cdot (z, w) = (z, w)$ і $[k + l] \cdot (z, w) = [k] \cdot ([l] \cdot (z, w))$, зокрема, $[k + p] \cdot (z, w) = [k] \cdot (z, w)$:

$$\left( e^{\frac{2\pi (k+p) i}{p}} z, \ e^{\frac{2\pi q (k+p) i}{p}} w \right) = \left( e^{\frac{2\pi k i}{p} + 2\pi i} z, \ e^{\frac{2\pi q k i}{p} + 2\pi q i} w \right) = \left( e^{\frac{2\pi k i}{p}} z, e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \right)$$

Вона вільна, бо $e^{\frac{2\pi k i}{p}} z \neq z$ для $k = \overline{1, p-1}$ (при цьому це й $e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \neq w$ в силу вз. простоти $p$ і $q$). Отже, дія цілком розр. Лінзовий простір $L(p,q) := S^3 / \mathbb{Z}_p$. $S^3$ однозв. $\Rightarrow \pi_1(L(p,q)) \simeq \mathbb{Z}_p$.

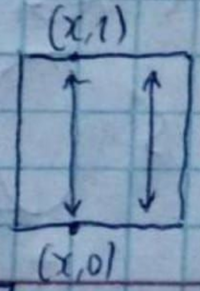
При $p = 2$, $q = 1$ $[1] \cdot (z, w) = (-z, -w)$, тобто $L(2,1) = \mathbb{R}P^3$.

P = 6



34.4. Побудувати накриття стрічки Мебіуса у циліндром

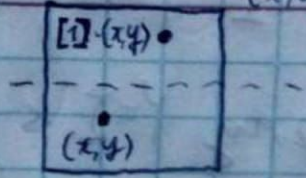
$X = I \times S^1$




$X = I^2/\sim$, де $\sim$ : $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall\, x \in I$ :

Подієно на $I^2$ групою $\mathbb{Z}_2$ : $[0] = id$,

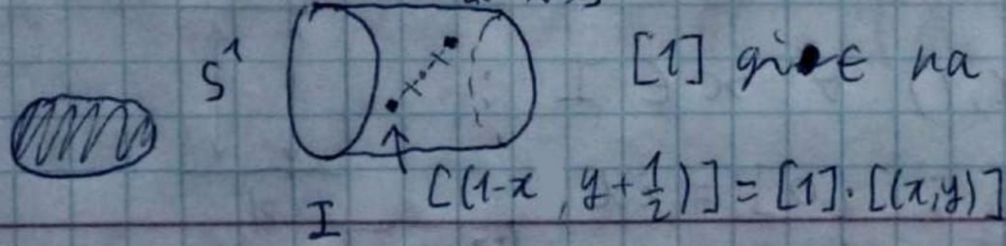
$$[1]\cdot(x,y) = \begin{cases} \left(1-x,\ y+\frac{1}{2}\right), & y \le \frac{1}{2} \\ \left(1-x,\ y-\frac{1}{2}\right), & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Насправді це не дія, бо $\forall x$ $[1]^2 \cdot (x,0) = [1] \cdot (1-x, \frac{1}{2}) = (x,1) \neq$ $\neq (x,0)$, а $[1]^2 = [0]$. Але $[0]$ і $[1]$ коректно факторизуються:

$[1] \cdot (x,0) = (1-x, \frac{1}{2}) = [1] \cdot (x,1)$ $\forall x$, тому визначені на $I \times S^1 = I^2/\sim$, і там вже $[1]^2 \cdot [(x,0)] = [(x,1)] = [(x,0)]$, тому це дія. Вона неперервна (факт. неперервного), вільна ($[1] \cdot [(x,y)] \neq [(x,y)]$) на хаусд $I \times S^1$ => цілком розривна, бо $\mathbb{Z}_2$ скінченна.

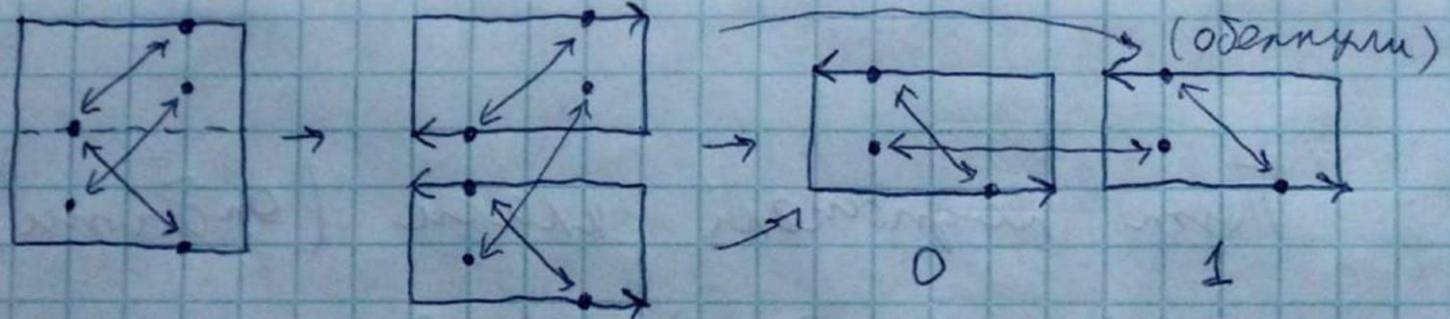
Тому $(S^1 \times I, \underbrace{S^1 \times I}_{[(x,y)]}/\mathbb{Z}_2, p)$ – накриття.




$[1]$ діє на $I \times S^1$ як $(x,y) \mapsto (1-x, -y)$.

---

При цьому $Y = I \times S^1 / \mathbb{Z}_2 = (I^2/\sim)/\mathbb{Z}_2$ гомеоморфна стрічці Мебіуса!




Тобто тепер $Y = I^2 \sqcup I^2 /\sim$, де $(x,y,0) \sim (x,y,1)$ $\forall x,y$ і $(x,0,i) \sim (1-x,1,i)$ $\forall x, i=\overline{0,1}$. Склеїмо їх: $Y = I^2/\sim$, де $(x,0) \sim (1-x,1)$ $\forall x$, тобто $Y$ – стрічка Мебіуса.

Накриття дволистове ($\forall y$ $|p^{-1}(y)| = 2$).

34.7.8 Знайти накриття $(\mathbb{R}^2, K^2, p)$ (універсальне накриття пляшки Клейна)