

Лекція 10. Регулярна заміна координат. Криві на поверхні.

Параметрично задані поверхні: $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D$

Явно задані поверхні: $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \Omega$

Неявно задані поверхні: $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$

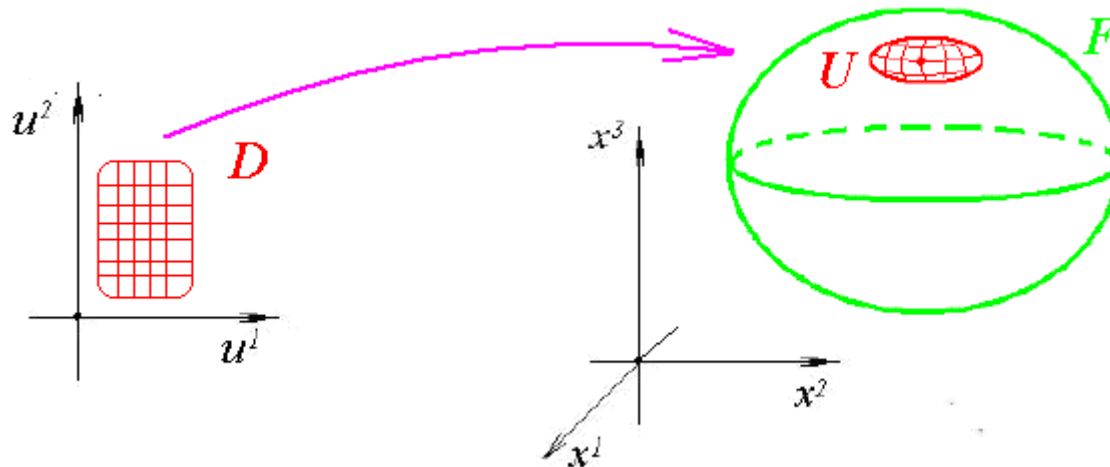
За виконання умов **регулярності**:

1) параметрично задана поверхня локально (з точки зору області D) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних,

2) неявно задана поверхня локально (з точки зору обхопного простору $\mathbb{R}^3$) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних.

Розглянемо просту поверхню F в $\mathbb{R}^3$.

За визначенням, для кожної точки P існує окіл B в $\mathbb{R}^3$ такий, що окіл $U \subset B \cap F$ точки P на поверхні F є елементарною поверхнею, тобто окіл U є гомеоморфним деякій області D в $\mathbb{R}^2$.



Окіл U разом з гомеоморфізмом $\varphi: D \rightarrow U$ називають *картою* або *параметризацією* навколо точки P на поверхні F .

З аналітичної точки зору, відображення φ представляється вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$. Величини (u^1, u^2) називаються *координатами* точок в карті U на поверхні F або *локальними координатами* на поверхні F .

Набір карт, що покривають усю поверхню F , утворюють *атлас* поверхні F .

Проблема. Чи можна перевірити, що відображення $\varphi: D \rightarrow U$ є гомеоморфізмом¹, коли відображення φ задано у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases},$$

тобто, в термінах вектор-функції $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$?

Відповідь. Якщо вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ задовольняє умовам регулярності:

$$(a) \quad \vec{f} \in C^m(D), \quad m \geq 1,$$

$$(b) \quad \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \neq \vec{0},$$

то тоді відображення $\varphi: D \rightarrow U$ локально є гомеоморфізмом.

Зауваження. Умова регулярності є достатньою, але не є необхідною для забезпечення локальної гомеоморфності.

¹ Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом, якщо (а) відображення є неперервним, (b) відображення є бієктивним, (с) обернене відображення є неперервним.

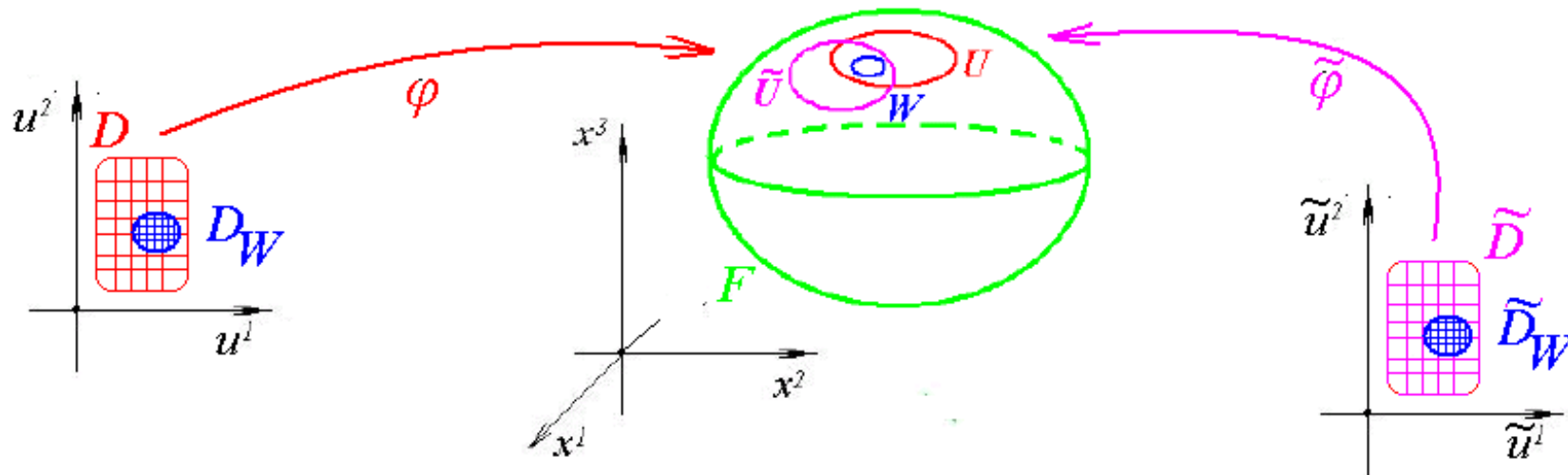
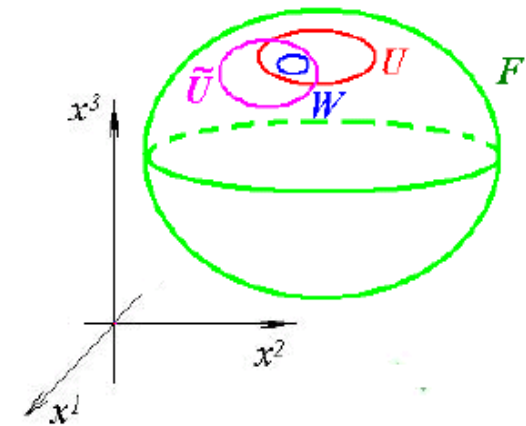
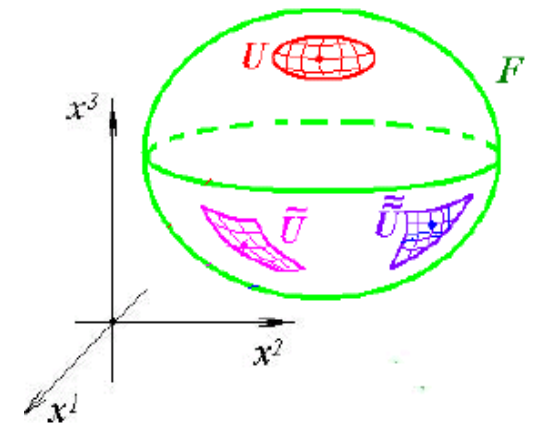
1. Регулярна заміна координат на поверхні

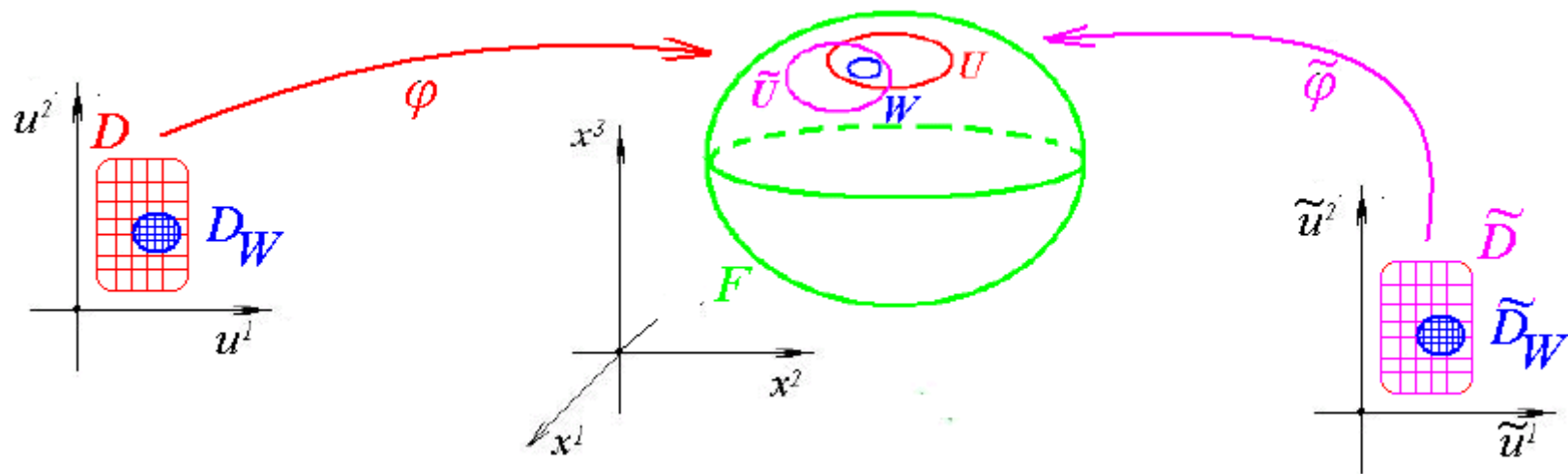
Проста поверхня F покривається сукупністю карт, які утворюють атлас.

Можлива ситуація, коли якась пара U і $\tilde{U}$ карт перетинаються.

Візьмемо точку $P \in U \cap \tilde{U}$ і розглянемо якийсь її окіл $W \subset U \cap \tilde{U}$.

В околі W діють одночасно дві системи локальних координат (u^1, u^2) і $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, породжені гомеоморфізмами $\varphi: D \rightarrow U$ і $\tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{U}$ відповідно.





Візьмемо прообрази D_W і $\tilde{D}_W$ околу W відносно відображень $\varphi: D \rightarrow U$ і $\varphi: \tilde{D} \rightarrow \tilde{U}$ відповідно і розглянемо відображення $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{D}_W \rightarrow D_W$. Це відображення є гомеоморфізмом. Воно називається заміною локальних координат на поверхні F і представляється у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Визначення. Заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

назвемо *регулярною*, якщо

1) функції $u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in C^m$, $m \geq 1$;

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

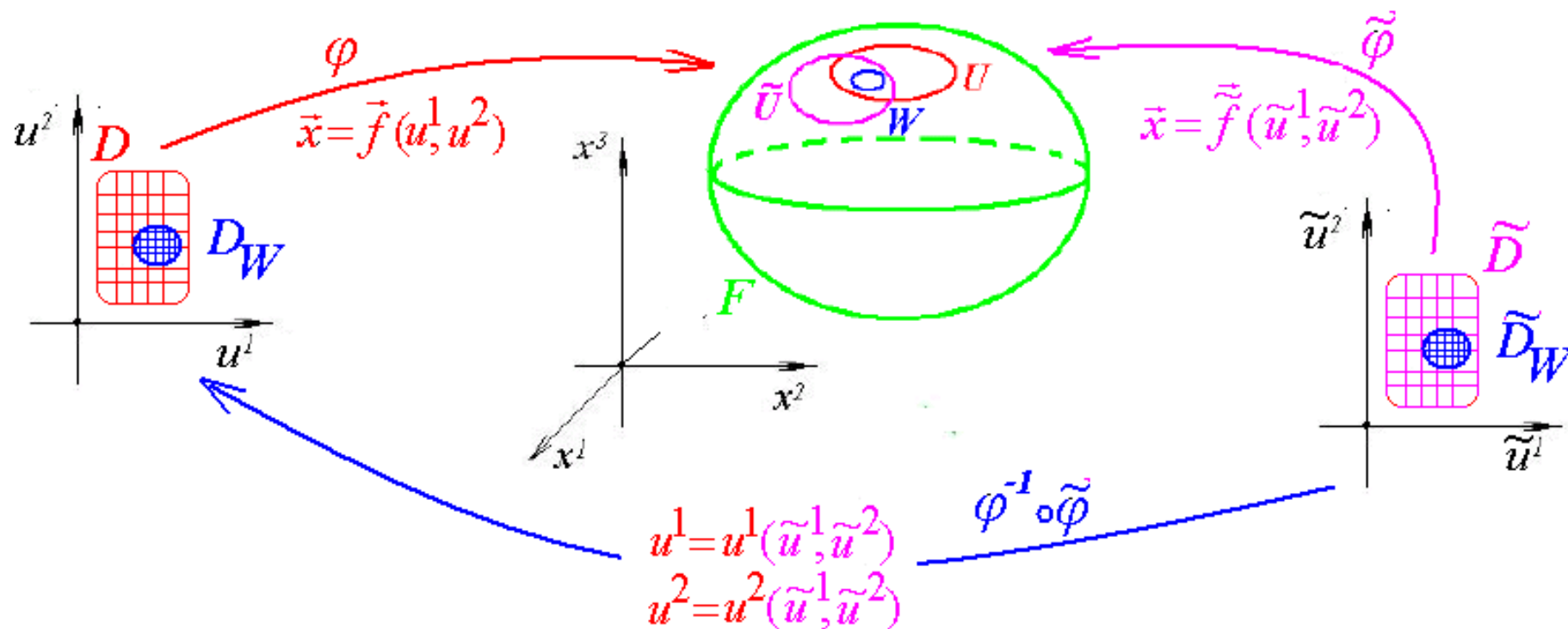
Зауваження. Регулярність є достатньою (але не необхідною) умовою, що забезпечує гомеоморфність відображення заміни координат.

В точках області W поверхня F представляється вектор-функціями

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2) \text{ і } \vec{x} = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2),$$

при цьому маємо

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$



Продиференціюємо складну вектор-функцію:

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \tilde{\vec{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2}\end{aligned}$$

тобто,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Наслідок. Якщо вектор-функція $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ задовольняє умовам регулярності

$$(a) \vec{f} \in C^m, \quad m \geq 1, \quad (b) \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \neq \vec{0},$$

а заміна координат $\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$ задовольняє умовам регулярності

$$(a) u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in C^m, \quad m \geq 1; \quad (b) \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то тоді вектор-функція задовольняє умовам регулярності

$$(a) \tilde{\vec{f}} \in C^m, \quad m \geq 1, \quad (b) \left[\frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \right] \neq \vec{0}$$

Доведення: Застосувати виписані вище формули і довести

$$\left[\frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \tilde{\vec{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \right] = \left(\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \right) \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right]$$

Висновок. Одна й та ж поверхня може задаватись параметрично різними вектор-функціями. Тобто, на одній і тій же поверхні можна вводити різні параметризації (різні локальні системи координат).

При цьому регулярність параметрично заданої поверхні зберігається при регулярних замінах локальних координат.

Зауваження. Для *кривих* була виділена спеціальна параметризація – натуральний параметр (довжина дуги). В багатьох ситуаціях натуральна параметризація є найбільш зручною для досліджень властивостей регулярних кривих.

Для *поверхонь* такої виділеної, самої гарної, спеціальної системи координат не існує. В кожному окремому випадку, для кожної задачі, обирається своя найбільш зручна система локальних координат.

Приклад 1. Розглянемо лінійну вектор-функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

яка задає площину в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{c}$ і натягнута на пару векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Регулярність цієї параметрично заданої площини означає $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ є лінійно незалежними.

Зробимо лінійну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = a_1^1 \tilde{u}^1 + a_2^1 \tilde{u}^2 + a_0^1 \\ u^2 = a_1^2 \tilde{u}^1 + a_2^2 \tilde{u}^2 + a_0^2 \end{cases}, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Умова регулярності заміни координат:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{c} + \vec{e}_1 (a_1^1 \tilde{u}^1 + a_2^1 \tilde{u}^2 + a_0^1) + \vec{e}_2 (a_1^2 \tilde{u}^1 + a_2^2 \tilde{u}^2 + a_0^2) = \\ &= \vec{c} + a_0^1 \vec{e}_1 + a_0^2 \vec{e}_2 + (\vec{e}_1 a_1^1 + \vec{e}_2 a_1^2) \tilde{u}^1 + (\vec{e}_1 a_2^1 + \vec{e}_2 a_2^2) \tilde{u}^2 = \\ &= \tilde{\vec{c}} + \tilde{\vec{e}}_1 \tilde{u}^1 + \tilde{\vec{e}}_2 \tilde{u}^2 \end{aligned}$$

Описана заміна координат на площині відповідає заміні базису в площині і заміні початкової точки.

Приклад 2. Розглянемо лінійну вектор-функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

яка задає площину в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{c}$ і натягнута на пару векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Регулярність цієї параметрично заданої площини означає $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ є лінійно незалежними.

Зробимо наступну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Умова регулярності заміни координат:

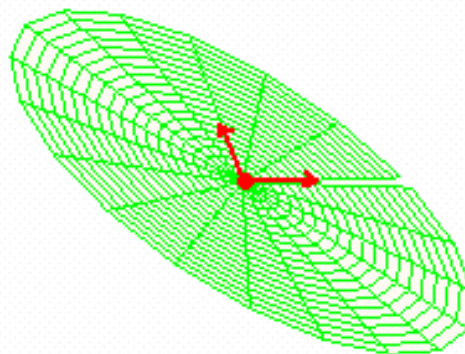
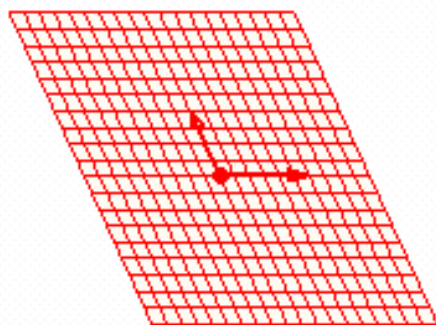
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \tilde{u}^2 & -\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \\ \sin \tilde{u}^2 & \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \end{vmatrix} = \tilde{u}^1 \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 + \vec{e}_2 \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2, \quad \begin{matrix} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Описана заміна координат на площині відповідає переходу від «афінних» координат до «полярних» координат на площині.

Зауваження. Радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ в «полярних» координатах задає не всю площину, а площину з розрізом вздовж променя, що йде від початкової точки (полюса) в напрямку вектора $\vec{e}_1$.



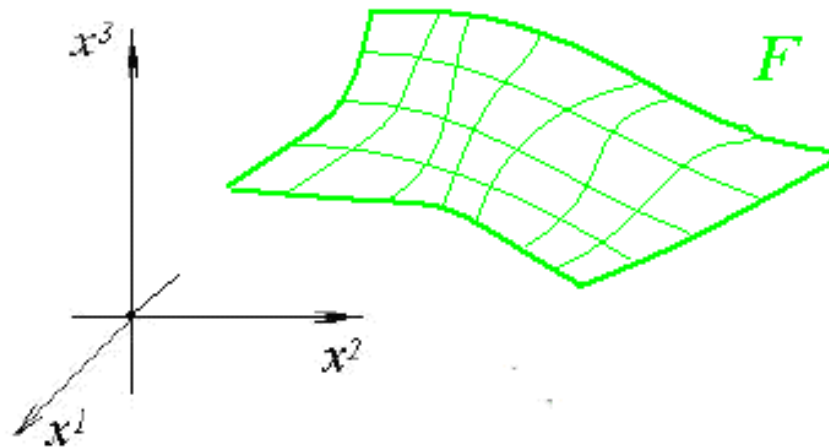
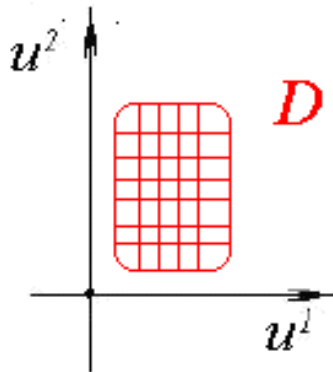
2. Криві на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D,$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D. \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$



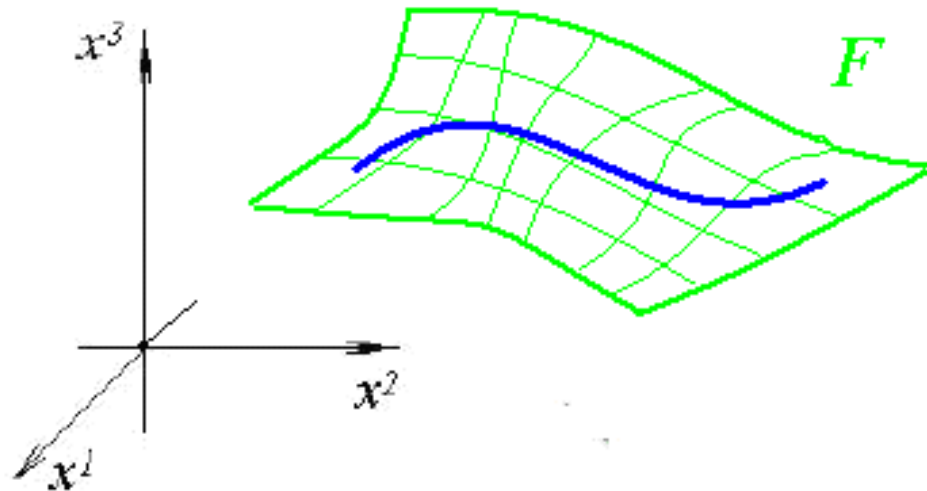
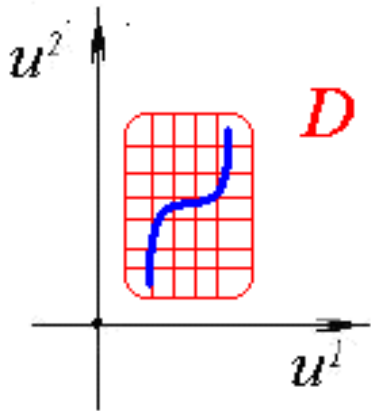
Розглянемо в області D площини параметрів (u^1, u^2) параметрично задану криву

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b)$$

Підставляючи в радіус-вектор поверхні $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, отримуємо вектор-функцію

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), t \in (a, b).$$

Ця вектор-функція задає криву γ в $\mathbb{R}^3$, яка лежить на параметрично заданій поверхні F .



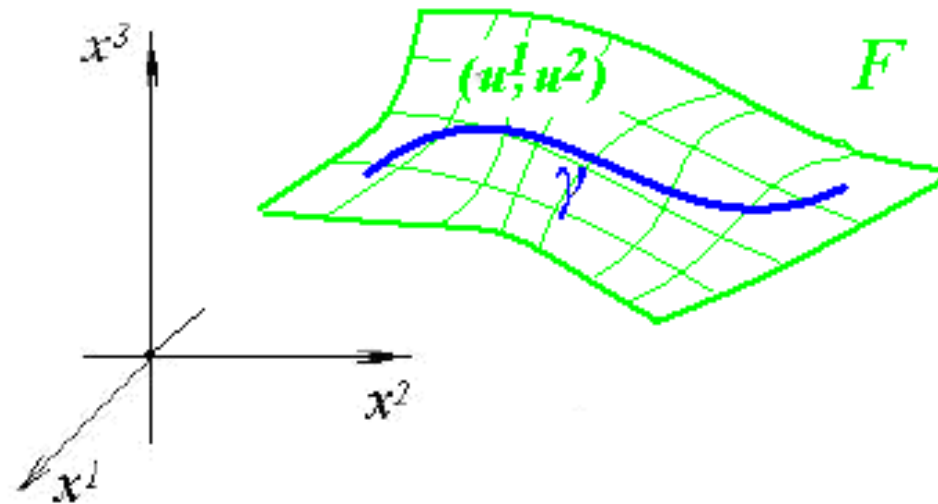
Таким чином, крива γ на поверхні F в $\mathbb{R}^3$ представляється в двох видах:

1) у внутрішніх координатах на поверхні F :

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b);$$

2) у зовнішніх координатах в просторі $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = f^1(h^1(t), h^2(t)) \\ x^2 = f^2(h^1(t), h^2(t)) \\ x^3 = f^3(h^1(t), h^2(t)) \end{cases}$$



Визначення. Криві, задані параметрично

$$\begin{cases} u^1 = \text{const} \\ u^2 = t \end{cases}, t \in (a_2, b_2), \quad \text{або} \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \text{const} \end{cases}, t \in (a_1, b_1);$$

називаються *координатними лініями* на параметрично заданій поверхні F .

Маємо два сімейства координатних ліній, які утворюють *координатну сітку* на параметрично заданій поверхні F .

Приклад. Розглянемо поверхню F , отриману обертанням навколо осі x^3 плоскої кривої γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1) \\ x^2 = 0 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}, \quad a < u^1 < b,$$

Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u^2 & -\sin u^2 & 0 \\ \sin u^2 & \cos u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u^1) \\ 0 \\ h(u^1) \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = r(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}, \quad a < u^1 < b, \quad 0 < u^2 < 2\pi.$$

Координатні лінії

$$\begin{cases} u^1 = C = \text{const} \\ u^2 = t \end{cases}$$

задаються в обхопному просторі у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(C) \cos t \\ x^2 = r(C) \sin t, \quad 0 < t < 2\pi. \\ x^3 = h(C) \end{cases}$$

Це горизонтальні кола, вони називаються *паралелями* поверхні обертання F .

Координатні лінії

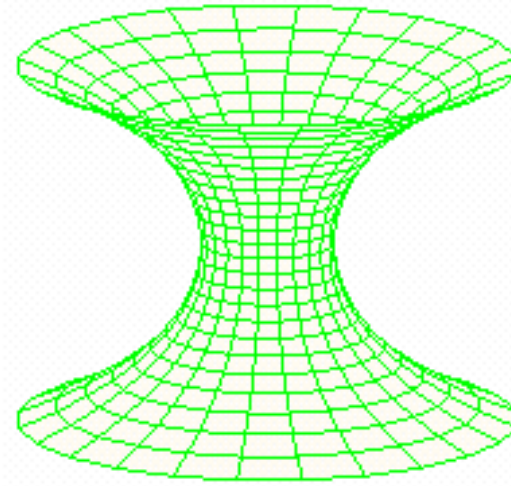
$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = C = \text{const} \end{cases}$$

задаються в обхопному просторі у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \cos C \\ x^2 = r(t) \sin C, \quad a < t < b. \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

Кожна така крива – це початкова крива γ , повернута навколо осі x^3 на фіксований кут C . Такі криві називаються *меридіанами* поверхні обертання.

Таким чином, на поверхні обертання присутня спеціальна координатна сітка, утворена паралелями і меридіанами.



Розглянемо криву γ на поверхні F в $\mathbb{R}^3$, що представляється у внутрішніх координатах на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b),$$

та радіус-вектором в $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), t \in (a, b),$$

тут $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ – радіус-вектор поверхні.

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial h^1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial h^2}{\partial t}.$$

Твердження. На регулярній параметрично заданій поверхні F в $\mathbb{R}^3$ регулярність кривої γ еквівалентна тому, що функції $h^1(t)$, $h^2(t)$ є неперервно диференційованими і при цьому $(\frac{dh^1}{dt}, \frac{dh^2}{dt}) \neq \vec{0}$.

Приклад. На регулярній параметрично заданій поверхні обертання координатні лінії – паралелі і меридіани – є регулярними кривими.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 10.0. Розглянемо поверхню S в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cos v^1 \cos v^2 \\ x^2 = R \cos v^1 \sin v^2 \\ x^3 = R \sin v^1 \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < v^1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v^2 < 2\pi$$

- 1) Якою є область визначення $\hat{D}$ поверхні S ?
- 2) Покажіть, що S є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
- 3) Доведіть, що S є регулярною параметрично заданою поверхнею.
- 4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні S .

Задача 10.1. Розглянемо поверхню F в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$$

- 1) Якою є область визначення D поверхні F ?
- 2) Покажіть, що F є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
- 3) Доведіть, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.
- 4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні F .

Задача 10.2. Розглянемо поверхню $\tilde{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \frac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \quad \begin{aligned} & -\infty < \tilde{u}^1 < \infty \\ & -\infty < \tilde{u}^2 < \infty \end{aligned}$$

- 1) Якою є область визначення $\tilde{D}$ поверхні $\tilde{F}$?
- 2) Покажіть, що $\tilde{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
- 3) Доведіть, що $\tilde{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.
- 4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\tilde{F}$?

Задача 10.3. Розглянемо поверхню $\hat{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{4\hat{u}^1}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R \cdot \frac{4\hat{u}^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ x^3 = R \cdot \frac{4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < \hat{u}^1 < \infty \\ -\infty < \hat{u}^2 < \infty \end{matrix}$$

- 1) Якою є область визначення $\hat{D}$ поверхні $\hat{F}$?
- 2) Покажіть, що $\hat{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
- 3) Доведіть, що $\hat{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.
- 4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\hat{F}$.

Задача 10.4. Розглянемо поверхні S і F із задач 10.0 і 10.1. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей S і $\tilde{F}$.

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат (v^1, v^2) і (u^1, u^2) .

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (v^1, v^2) до (u^1, u^2) регулярною заміною координат?

Задача 10.5. Розглянемо поверхні F і $\tilde{F}$ із задач 10.1 і 10.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей F і $\tilde{F}$.

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат (u^1, u^2) і $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (u^1, u^2) до $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Задача 10.6. Розглянемо поверхні $\tilde{F}$ і $\hat{F}$ із задач 10.2 і 10.3. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область Ω на сфері, що є перетином областей $\tilde{F}$ і $\hat{F}$.

В області Ω одночасно діють дві системи внутрішніх координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області Ω на сфері?

Чи є перехід від $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Задача 10.7.

1) Чи утворюють карти S , F , $\tilde{F}$ і $\hat{F}$ із задач 10.0-10.3 на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$ покриття усієї цієї сфери? Якщо ні, доповніть цей набір карт ще якоюсь додатковою картою, щоб утворити покриття усієї сфери.

2) Побудуйте покриття сфери, утворене з двох карт.

Задача 10.8. Розглянемо регулярну криву γ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad a < s < b.$$

Запишіть радіус-вектор циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої проходять через точки кривої γ в напрямку вектора $\vec{e}$. Проаналізуйте регулярність цієї параметрично заданої поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Задача 10.9. Розглянемо регулярну криву γ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad a < s < b.$$

Запишіть радіус-вектор конічної поверхні, утвореної променями, що виходять з початку координат O і проходять через точки кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Задача 10.10. Розглянемо регулярну криву γ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad a < s < b.$$

1) Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної дотичними прямими кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

2) Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – головними нормаллями кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

3) Аналогічно, запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – бінормаллями кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Задача 10.11.

1. Як виглядає сітка координатних ліній на регулярній явно заданій поверхні $x^3 = h(x^1, x^2)$?

2. Як виглядає сітка координатних ліній на регулярній неявно заданій поверхні $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$?