

Pr. (Аналітичний критерій геодезичності)

1. Якщо $B = 0$, то (M, r) цілком геодезичний.

2. Якщо (M, r) геодезичний у $p \in M$, то $B_p = 0$.

► 1. Отже, маємо якісь $p \in M$, $v \in T_p M$. Випустимо з p геодезичну γ многовида (M, g) , що задовольняє рівнянню $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, в напрямку v : $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тоді її параметр s "майже натуральний": $g(\gamma', \gamma') = g_p(v, v)$ тотожно за властивістю паралельного поля γ' уздовж кривої, тобто постійне. У розкладенні Гаусса маємо

$$\bar{\nabla}_{(r \circ \gamma)'} (r \circ \gamma)'(s) = d_{\gamma(s)} r \left(\nabla_{\gamma'} \gamma'(s) \right) + B_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 0$$

для усіх s , бо γ – геодезична і $B = 0$. Оскільки

$$\bar{g}((r \circ \gamma)', (r \circ \gamma)') = g(\gamma', \gamma') = g_p(v, v)$$

постійне, це означає, що $r \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ – геодезична $(\bar{M}, \bar{g})$, і для неї $(r \circ \gamma)(0) = r(p)$, $(r \circ \gamma)'(0) = d_p r(v)$. В силу єдиності, всі геодезичні $(\bar{M}, \bar{g})$, що випущені з $r(p)$ у напрямку образів векторів $T_p M$, мають такий вигляд (для значень параметра за межами $(-\varepsilon, \varepsilon)$ просто розглянемо ту ж саму конструкцію у відповідній точці).

2. Для довільного $v \in T_p M$ нехай $\bar{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ – геодезична $(\bar{M}, \bar{g})$ така, що $\bar{\gamma}(0) = r(p)$, $\bar{\gamma}'(0) = d_p r(v)$. За умовою геодезичності у p , тоді $\bar{\gamma} = r \circ \gamma$. Оскільки r – занурення, воно є ін'єкцією на якомусь околі p .

Тоді, вибравши $\varepsilon > 0$ достатньо малим, отримаємо з $r(\gamma(0)) = \bar{\gamma}(0) = r(p)$, що $\gamma(0) = p$. І з

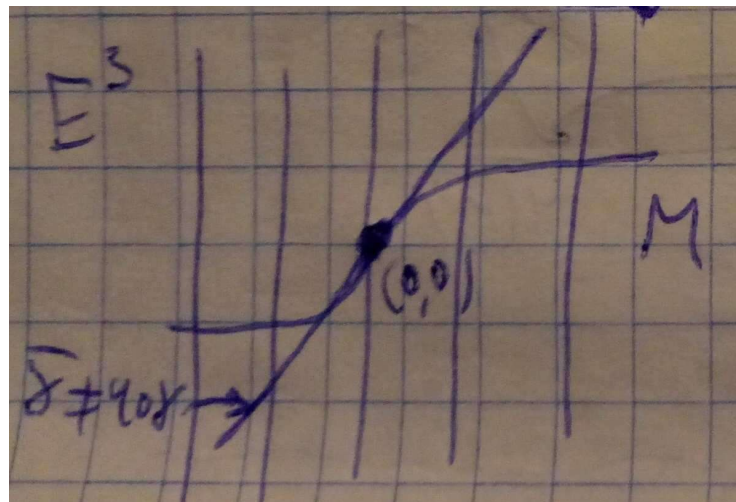
$$d_p r(v) = \bar{\gamma}'(0) = (r \circ \gamma)'(0) = d_p r(\gamma'(0))$$

та ін'єктивності $d_p r$ отримуємо $\gamma'(0) = v$. Отже при $s = 0$ у розкладенні Гаусса маємо:

$$\bar{\nabla}_{\bar{\gamma}'} \bar{\gamma}'(0) = d_p r \left(\nabla_{\gamma'} \gamma'(0) \right) + B_p(\gamma'(0), \gamma'(0)).$$

Ліворуч маємо 0 (знову можемо вважати параметр "майже натуральним" для обох кривих з тих же міркувань, що вище), тому праворуч обидва доданки нульові (оскільки це дотична і нормальна компоненти). Тобто для будь-якого $v \in T_p M$ $B_p(v, v) = 0$, а тоді з симетричності $B_p(v, w) = 0$ для будь-яких $v, w \in T_p M$. ◀

Rem. У 2. обернена імплікація, взагалі кажучи, не-
вірна: у циліндра над графіком кубічної функції у E^3 ,
що задається відображенням $r(s, t) = (s, s^3, t)$, у то-
чці $(0, 0)$ другі похідні r нульові, тому $b_{(0,0)} = 0$, але
геодезичності у цій точці немає: дотична до графіку
не лежить у поверхні.



Cor. Підмноговид цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли його друга ф.ф. нульова.

Ex. Для (відкритих підмножин) афінних підпросторів E^{n+q} у афінних координатах другі похідні $r_{ij} = 0$ (бо координатні функції лінійні), тому $B = 0$.

Pr. (Єдиність цілком геодезичних підмноговидів) Нехай (M, r) і $(\tilde{M}, \tilde{r})$ – цілком геодезичні повні зв'язні підмноговиди у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$ (тобто многовиди M і $\tilde{M}$ зв'язні, а ріманові (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ з відповідними першими ф.ф. – повні у сенсі повноти внутрішньої метрики). Якщо існують такі $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, що $r(p) = \tilde{r}(\tilde{p})$ і $d_p r(T_p M) = d_{\tilde{p}} \tilde{r}(T_{\tilde{p}} \tilde{M})$, то $r(M) = \tilde{r}(\tilde{M})$. Зокрема, якщо ці многовиди вкладені, то вони еквівалентні.

► З повноти і зв'язності (M, g) та теореми Хопфа – Рінова випливає, що для будь-якої $q \in M$ точки p і q можна з'єднати найкоротшою. Її, у свою чергу, в силу повноти можна продовжити до натурально параметризованої геодезичної $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ такої, що $\gamma(s_0) = p$ і $\gamma(s_1) = q$. Оскільки (M, r) цілком геодезичний, з розкладення Гаусса аналогічно до доведень вище маємо, що $r \circ \gamma$ – (натурально параметризована) геодезична $(\bar{M}, \bar{g})$. При цьому $(r \circ \gamma)(s_0) = r(p) = \tilde{r}(\tilde{p})$, і

$$(r \circ \gamma)'(s_0) = d_p r(\gamma'(s_0)) \in d_p r(T_p M) = d_{\tilde{p}} \tilde{r}(T_{\tilde{p}} \tilde{M}).$$

Тому з того, що $(\tilde{M}, \tilde{r})$ цілком геодезичний, за означенням випливає, що існує $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ така, що $r \circ \gamma = \tilde{r} \circ \tilde{\gamma}$. Зокрема,

$$r(q) = r(\gamma(s_1)) = \tilde{r}(\tilde{\gamma}(s_1)) \in \tilde{r}(\tilde{M}).$$

Отже, $r(M) \subset \tilde{r}(\tilde{M})$. Аналогічно доводиться $\tilde{r}(\tilde{M}) \subset r(M)$. ◀

Rem. Це узагальнення теореми про єдиність геодезичних.

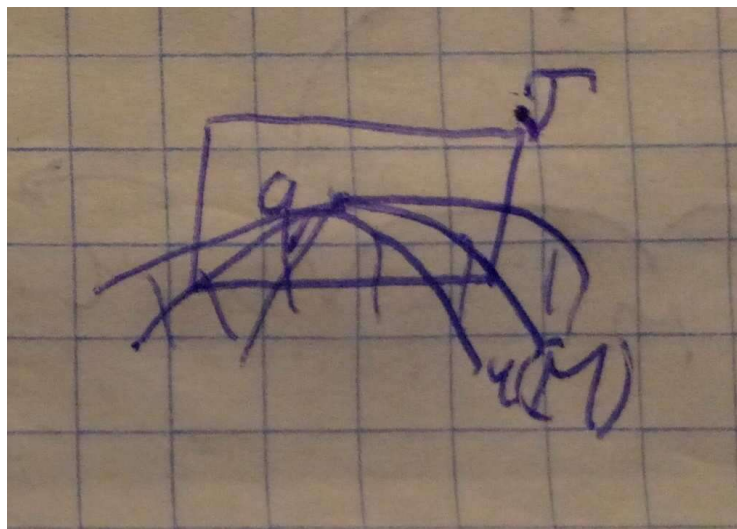
Ex. Зокрема, у прикладах Ex.1.–3. вище через кожну точку у напрямку кожного підпростора дотичного простора можна провести цілком геодезичний повний зв'язний вкладений підмноговид, що належить до описаних там сімейств. (Впр. Перевірити це.) Це означає, що з точністю до еквівалентності усі такі підмноговиди належать до описаних (і є їхніми зв'язними відкритими підмножинами, якщо прибрати вимогу повноти). Довільні повні зв'язні многовиди постійної секційної кривини за теоремою Картана – Кіллінга отримуються з $\overline{M}_c^{n+q}$ факторизацією

за дією дискретної групи ізометрій (що зберігає локальні конструкції), тому повний опис цілком геодезичних підмноговидів можна отримати й для них.

Rem. Якщо $B_p = 0$ (зокрема, для геодезичного в p підмноговида), рівняння Гаусса дає для усіх $u, v, w, z \in T_p M$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{r(p)}(\bar{R}_{r(p)}(d_{pr}(u), d_{pr}(v))d_{pr}(w), d_{pr}(z)) = \\ = g_p(R_p(u, v), w, z). \end{aligned}$$

Зокрема, для будь-якої площини $\sigma \subset T_p M$ маємо $\bar{K}(d_{pr}(\sigma)) = K_{int}(\sigma)$. З цим пов'язане наступний геометричний опис секційної кривини.



Для будь-яких $q \in \overline{M}$ і площини $\tau \subset T_q \overline{M}$ випустимо з q різноманітні геодезичні у напрямках векторів із τ . Вони утворюють локально 2-вимірний підмноговид (поверхню) (M, r) (чому?), що за побудовою є геодезичною у $p = r^{-1}(q)$ в силу Pr.2. вище. Тоді $\overline{K}(\tau)$ – це гауссова кривина цієї поверхні у p .

Омбілічність

Тут знову (M, r) – (гладкий) підмноговид вимірності (тут і далі) ≥ 2 у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$. Згадаємо, що у кожній $p \in M$ оператор Вейнгартена A підмноговида визначає білінійне $A_p: N_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ таке, що для будь-яких поля X і нормального поля ξ (на околі p) $(A_\xi X)_p = (A_p)_{\xi_p} X_p$. Зокрема, для будь-якого $\nu \in N_p M$, фіксуючи його у якості нормального аргумента, визначаємо лінійний оператор $A_\nu := (A_p)_\nu(\cdot): T_p M \rightarrow T_p M$ – оператор Вейнгартена у p , що відповідає ν . З властивостей A випливає, що A_ν самоспряжений відносно g_p .

def. (M, r) називають омбілічним у точці $p \in M$ (або говорять, що p – омбілічна точка (M, r)), якщо для будь-якого $\nu \in N_p M$ існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $A_\nu = \lambda \text{id}_{T_p M}$.

Rem. Тут λ залежить від p і ν .

def. (M, r) називають цілком омбілічним, якщо він омбілічний у будь-якій $p \in M$.

Ex. Якщо (M, r) геодезичний у p , то $B_p = 0$, тому $A_p = 0$, отже $A_\nu = 0$ для будь-якого ν , і (M, r) омбілічний у p . Зокрема, цілком геодезичні підмноговиди є цілком омбілічними. У класичній диференціальній геометрії поверхонь геодезичні точки (точки сплющення) виключають з омбілічних. Наступне твердження вірне для будь-яких підмноговидів:

Lem. Для будь-яких $p \in M$ і $\nu \in N_p M$

$$\bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu,$$

де $n = \dim M$, H – поле середньої кривини підмного-
вида.

► Нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис $T_p M$.
Тоді

$$\begin{aligned}\bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu) &= \bar{g}_{r(p)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_p(e_i, e_i), \nu \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_i g_p(A_\nu(e_i), e_i) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu\end{aligned}$$

за зв'язком другої ф.ф. і оператора Вейнгартена та
з означення сліда лінійного оператора. ◀

Pr. (M, r) омбілічний у p тоді й тільки тоді, коли
виконана одна з двох еквівалентних умов:

1. $A_\nu = \bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu) id_{T_p M}$ для будь-якого $\nu \in N_p M$;

2. $B_p(\cdot, \cdot) = g_p(\cdot, \cdot) H_p$.

► Еквівалентність омбілічності та 1. випливає з Lem. і того, що для діагонального оператора $A_\nu = \lambda id_{T_p M}$ коефіцієнт $\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr } A_\nu$.

Якщо виконується 1., то для будь-яких $v, w \in T_p M$ маємо за зв'язком між другою ф.ф. і оператором Вейнгартена

$$\begin{aligned} \bar{g}_{r(p)}(B_p(v, w), \nu) &= g_p(A_\nu v, w) = g_p(\bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu)v, w) = \\ &= \bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu)g_p(v, w) = \bar{g}_{r(p)}(g_p(v, w)H_p, \nu) \end{aligned}$$

для будь-якого $\nu \in N_p M$, звідки випливає 2. Якщо ж виконується 2., то аналогічним способом отримуємо, що для будь-якого ν

$$g_p(A_\nu v, w) = g_p(\bar{g}_{r(p)}(H_p, \nu)v, w)$$

для будь-яких $v, w \in T_p M$, звідки маємо 1. ◀

Cor. (M, r) цілком омбілічний тоді й тільки тоді, коли виконана одна з двох еквівалентних умов:

1. $A_\xi X = \bar{g}(H, \xi)X$ для будь-яких X, ξ ;

2. $B(X, Y) = g(X, Y)H$ для будь-яких X, Y .

► Застосовуємо Pr. до значень цих полів у кожній точці M . ◀

Rem. Для гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ , якому відповідають скалярна друга ф.ф. b ($B = b\xi$) і середня кривина H (поле середньої кривини $H\xi$), умови з Cor. набувають вигляду відповідно $A_\xi X = HX$ і $b(X, Y) = Hg(X, Y)$ (і так само для кожної точки).

Ex. Для гіперсфери радіуса R у E^{n+1} маємо $b = \pm \frac{1}{R}g$ (див. вище), тому вона цілком омбілічна (і з постійною середньою кривиною $H = \pm \frac{1}{R}$).

Lem. Нехай (M, r) – цілком омбілічний. Тоді для будь-яких полів X, Y, ξ

$$\underline{1.} \quad \nabla_X^\perp B = g \nabla_X^\perp H;$$

$$\underline{2.} \quad (\overline{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi.$$

► 1. За означенням і попереднім Cor.2.,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) = \\ &= \nabla_X^\perp (g(Y, Z)H) - g(\nabla_X Y, Z)H - g(Y, \nabla_X Z)H = \\ &= g(Y, Z)\nabla_X^\perp H + \underbrace{(X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z))}_0 H, \end{aligned}$$

бо ∇ – ріманова зв'язність g .

2. У правій частині рівнянні Річчі $[A_\xi, A_\eta] = 0$, оскільки за Cor.1. A_ξ і A_η "діагональні" (точніше, у кожній $p \in M$ оператори $(A_p)_{\xi_p}$ і $(A_p)_{\eta_p}$ пропорційні тотожним), тому там залишається лише оператор кривини нормальної зв'язності. ◀

Pr. Нехай (M, r) – цілком омбілічний підмноговид у многовиді з постійною секційною кривиною. Тоді $R^\perp = 0$ і для будь-якого поля X на M $\nabla_X^\perp H = 0$.

► У цьому випадку в лівих частинах рівняння Кодацці та Річчі маємо нулі, зокрема, рівняння Річчі та Lem.2. вище тоді дають $R^\perp = 0$.

Із рівняння Кодацці та Lem.1. маємо для будь-яких X, Y, Z на M

$$g(Y, Z)\nabla_X^\perp H = g(X, Z)\nabla_Y^\perp H.$$

У кожній $p \in M$ замість значень Y, Z підставимо (коректність впливає з лінійності) $v, w \in T_p M$ відповідно такі, що $w \perp X_p$ відносно g_p і $v = w \neq 0$ (нагадаємо, що тут всюди вимірність M не менша за 2). Отримаємо $(\nabla_X^\perp H)_p = 0$. ◀

Нормальні та головні кривини гіперповерхні

Нехай (M, r) – (гладка) гіперповерхня в $(\overline{M}, \overline{g})$. У точці $p \in M$ фіксуємо один з двох одиничних нормальних векторів $\nu \in N_p M$ (що може бути значенням ξ_p у цій точці локального або глобального одиничного нормального поля ξ). Отже $\overline{g}_{r(p)}(\nu, \nu) = 1$. Скалярна друга ф.ф. b_p у точці визначається умовою $B_p = b_p \nu$. За її властивостями, для будь-яких $v, w \in T_p M$

$$b_p(v, w) = \overline{g}_{r(p)}(B_p(v, w), \nu) = g_p(A_\nu v, w)$$

у позначеннях попереднього розділу.

def. Нормальною кривиною (M, r) (у точці p) у напрямку $v \in T_p M$, де $v \neq 0$, називають

$$k_\nu(v) := \frac{b_p(v, v)}{g_p(v, v)}.$$

Rem. Очевидно, $k_\nu(\lambda v) = k_\nu(v)$ для будь-якого $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, тобто k_ν дійсно залежить саме від напрям-ка, а не від вектора. Іншими словами, це функція на $P(T_p M)$ – проєктивному просторі, що асоційо-ваний з $T_p M$. Він природним чином ототожнюється з $\mathbb{R}P^{n-1}$, $n = \dim M$, зокрема, є компактним.

def. Головними кривинами (M, r) у p називають вла-сні значення $k_1, \dots, k_n$ оператора A_ν . При цьому ка-жуть, що вектор $v \in T_p M$, $v \neq 0$ має головний на-прямок, що відповідає k_i , $i = \overline{1, n}$, якщо він власний: $A_\nu v = k_i v$.

Rem. З def. нормальної кривини та формули для b_p вище, при цьому $k_i = k_\nu(v)$.

Rem. Нехай у локальних координатах $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, $A = (a_j^i)_{i,j=1}^n$ і (лише у цьому розділі) $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриці g_p , A_ν і b_p відповідно. Як ми бачили вище, тоді $a_j^i = g^{ik} b_{kj}$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, тобто $A = G^{-1}B$. Зокрема, головні кривини – корені характеристичного полінома $\det(A - kI) = \det(G^{-1}B - kI)$. Домноживши на $\det G > 0$, отримаємо рівняння $\det(B - kG) = 0$.

Згадаємо, що A_ν самоспряжений відносно g_p :

Cor. 1. Існують n дійсних (з урахуванням кратності) головних кривин $k_1, \dots, k_n$.

2. Головні напрямки, що відповідають різним головним кривинам, ортогональні (відносно g_p тут і далі у цьому розділі).

3. Існує ортонормований базис $T_p M$ з векторів головних напрямків, і у ньому матриця A_ν діагоналізується, тобто має вигляд

$$\begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}.$$

Pr. (Формула Ейлера) Нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис $T_p M$ з векторів головних напрямків, α_i – кут між $0 \neq v \in T_p M$ і e_i , $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$k_\nu(v) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \alpha_i.$$

► Отже, $A_\nu e_i = k_i e_i$ для $i = \overline{1, n}$. Оскільки нормальна кривина залежить лише від напрямку v , можемо

вважати його одиничним. Тоді $v = \sum_i \cos \alpha_i e_i$, і тому

$$\begin{aligned} k_\nu(v) &= \frac{b_p(v, v)}{g_p(v, v)} = g_p(A_\nu v, v) = \\ &= g_p\left(\sum_i \cos \alpha_i k_i e_i, \sum_j \cos \alpha_j e_j\right) = \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i. \end{aligned}$$

з означень і формули для b_p . ◀

Rem. Для ортонормованого базиса $\sum_i \cos^2 \alpha_i = 1$.

Тому при $n = 2$ ця формула має вигляд $k_\nu(v) = k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_1$. Крім того, звідси випливає:

Cor. $\min_{i=\overline{1,n}} k_i = \min_{0 \neq v \in T_p M} k_\nu(v); \max_{i=\overline{1,n}} k_i = \max_{0 \neq v \in T_p M} k_\nu(v).$

Rem. Нормальна кривина приймає свої найменше і найбільше значення, бо це неперервна (чому?) функція на компактi $P(T_p M)$.

Впр. Чи є геометричний сенс у інших k_i ?

Rem. Знаки головних і нормальних кривин залежать від вибору ν та змінюються (усі одночасно) при його заміні на протилежний.

Rem. З однієї з Lem. попереднього розділу випливає, що (скалярна) середня кривина у p дорівнює

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu = \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n).$$

Впр. При $n = 2$ $H(p) = \frac{1}{2}(k_\nu(v) + k_\nu(w))$ для будь-яких ортогональних $0 \neq v, w \in T_p M$.

def. Кривиною Гаусса – Кронекера (M, r) у p зветься

$$K(p) := \det A_\nu = k_1 \cdot \dots \cdot k_n.$$

Rem. У локальних координатах

$$K(p) = \det A = \det(G^{-1}B) = \frac{\det B}{\det G}.$$

Тобто, якщо задавати $\nu = \xi_p$ для гладкого поля ξ на $U \subset M$, $K: U \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка. Глобально вона "визначена з точністю до знака" (але коректно визначена і не залежить від вибору ξ для парних n). При $n = 2$

$K(p)$ збігається з зовнішньою (гауссовою для поверхні в E^3) кривиною $K_{ext}(p) = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$ в єдиному можливому напрямку.

Rem. З означень і критеріїв минулих розділів, омбілічність гіперповерхні в p еквівалентна $k_1 = \dots = k_n = H(p)$, і це ж значення має $k_\nu(v)$ для будь-якого $0 \neq v \in T_p M$. Зокрема, з геодезичності в p випливає $k_\nu(v) = k_1 = \dots = k_n = H(p) = 0$ для усіх v . Також аналогічно до поверхонь можна ввести поняття:

def. Точка p зветься:

– параболічною, якщо A_ν (а отже й b_p) вироджений;

- еліптичною, якщо A_ν (і b_p) знаковизначений;
- гіперболічною у всіх інших випадках.

Rem. Тут знаковизначеність операторів – відносно g_p .
Зокрема,

- параболічність еквівалентна $K(p) = k_1 \cdot \dots \cdot k_n = 0$, тобто тому, що принаймні одна з головних кривин нульова;
- еліптичність еквівалентна тому, що всі $k_i \neq 0$ та мають один й той самий знак, і те ж вірно для k_ν : $k_\nu(v) \neq 0$ і мають один й той самий знак для усіх $0 \neq v \in T_p M$;

– гіперболічність еквівалентна тому, що всі $k_i \neq 0$ і серед них є числа різних знаків.

При цьому у гіперболічному випадку серед значень $k_\nu(v)$ є додатні, від'ємні та нульові, як впливає з формули Ейлера.

При $n = 2$ ці умови еквівалентні $K(p) = 0$, $K(p) > 0$ і $K(p) < 0$ відповідно (хоча в класичній диференціальній геометрії поверхонь точки сплюснення, тобто геодезичні, виключають з параболічних).

Rem. Також можна розглядати лінії кривини та асимптотичні лінії довільної гіперповерхні аналогічно до класичної диференціальної геометрії.

Rem. Для довільної ковимірності дослівно так само визначаються нормальні та головні кривини відносно якогось фіксованого одиничного $\nu \in N_p M$.

Впр. Аналогічно до класичного означення визначити нормальну кривину натурально параметризованої кривої γ , що проходить через p , тобто такої, що $\gamma(s_0) = p$, у гіперповерхні (або відносно фіксованого одиничного $\nu \in N_p M$ для довільної ковимірності) як довжину зі знаком проєкції (тобто скалярний добуток) $\bar{\nabla}_{(r \circ \gamma)'}(r \circ \gamma)'(s_0)$ на ν , показати що вона визначається напрямком дотичного вектора $\gamma'(s_0)$ та дорівнює $k_\nu(\gamma'(s_0))$ (використати розкладення Гаусса для кривої). Чи важливо тут, що параметризація саме натуральна?

Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини

def. Говорять, що поле середньої кривини H (гладкого) підмноговида (M, r) у $(\bar{M}, \bar{g})$ паралельне, якщо для будь-якого поля X на M похідна $\nabla_X^\perp H = 0$ (далі позначаємо цю умову $\nabla^\perp H = 0$).

Rem. Зокрема, $X(\bar{g}(H, H)) = 2\bar{g}(\nabla_X^\perp H, H) = 0$ для будь-якого X , тобто модуль $|H| = \sqrt{\bar{g}(H, H)}$ постійний на зв'язних компонентах M . Важливим окремим випадком є мінімальність (це означення вже було):

def. Якщо $H = 0$, то (M, r) називають мінімальним.

Rem. Мінімальні підмноговиди – це критичні (стаціонарні) точки функціонала об'єму, тобто мінімальність – це необхідна умова мінімізації об'єму компактних підмножин підмноговида відносно локальних варіацій. Докладніше див., наприклад, Dajczer – Tojeiro, глава 3, Амінов, глава 7 та нижче. Схожа варіаційна умова вірна й для підмноговидів з паралельним полем середньої кривини (там розглядаються варіації, що зберігають обмежений підмноговидом об'єм).

Впр. Нагадаємо, що кривиною Річчі n -вимірного ріманового многовида (M, g) в $p \in M$ у напрямку $0 \neq v \in T_p M$ називають $\frac{1}{n-1} \frac{\text{Ric}_p(v, v)}{g_p(v, v)}$, де Ric – тензор Річчі (M, g) . Показати, що для мінімального (M, r) в многовиді постійної секційної кривизни c ці кривини не

перевищують c , і, якщо в $p \in M$ всі кривини Річчі підмноговида дорівнюють c , то $B_p = 0$ (і навпаки). Зокрема, для мінімального занурення многовида постійної секційної кривини c у многовид постійної секційної кривини $\bar{c}$ $c \leq \bar{c}$, і $c = \bar{c}$ тоді й тільки тоді, коли це занурення цілком геодезичне (використати рівняння Гаусса).

Ех. Так, n -вимірний тор Кліффорда є мінімальним (але не цілком геодезичним) підмноговидом у сфері $S_{\sqrt{n}}^{2n-1} = \overline{M}_{\frac{1}{n}}^{2n-1}$ постійної секційної кривини $0 < \frac{1}{n}$, а ось у E^{n+q} мінімальний підмноговид може мати постійну секційну кривину 0, тобто бути локально евклідовим, лише якщо він цілком геодезичний, тобто

(у зв'язному випадку) міститься у афінному підпросторі. У загальному випадку кривини Річчі мінімального підмноговида без геодезичних точок у E^{n+q} повинні таким чином бути від'ємними.

Згадаємо, що для цілком омбілічного підмноговида $B = g H$:

Cor. (M, r) цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли він цілком омбілічний та мінімальний.

Rem. У випадку гіперповерхні поле середньої кривини має вид $H \xi$, де ξ – одиничне нормальне поле, H –

скалярна середня кривина (взагалі кажучи, локально). Тоді умова паралельності дає за властивістю нормального поля

$$0 = \nabla_X^\perp (H \xi) = X(H)\xi + H \nabla_X^\perp \xi = X(H)\xi.$$

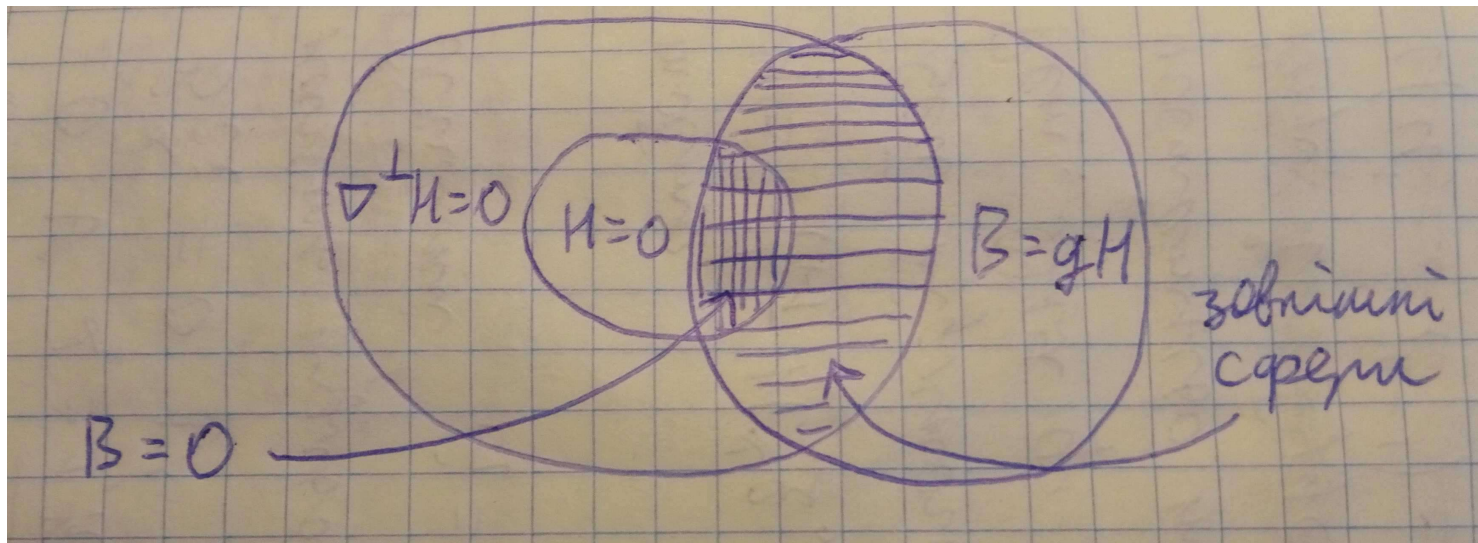
Cor. Поле середньої кривини гіперповерхні паралельне тоді і тільки тоді, коли її середня кривина H постійна на зв'язних компонентах M .

Rem. У таких випадках кажуть, що M – гіперповерхня постійної середньої кривини (СМС).

def. Цілком омбілічний підмноговид з паралельним полем середньої кривини називається зовнішньою сферою.

Ex. Цілком геодезичні підмноговиди, як ми бачили, є зовнішніми сферами.

Rem. Тобто маємо наступні класи підмноговидів:



Pr.1. Будь-який цілком омбілічний підмноговид у рімановому многовиді постійної секційної кривини є зовнішньою сферою.

2. Якщо (M, r) – зовнішня сфера, то $\nabla^\perp B = 0$.

3. Якщо (M, r) – зовнішня сфера, то $\bar{R}(X, Y)\xi = R^\perp(X, Y)\xi$ для будь-яких дотичних полів X, Y та нормального ξ .

► 1. випливає з останнього Pr. розділу про омбілічність.

2. З Lem.1. розділу про омбілічність, умова цілком омбілічності дає $\nabla_X^\perp B = g\nabla_X^\perp H = 0$ для будь-якого поля X (це ми й позначили в умові через $\nabla^\perp B = 0$).

3. З Lem.2. там же, для цілком омбілічного випадку $(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi$. При цьому дотична компонента $(\bar{R}(X, Y)\xi)^T = 0$ в силу рівняння Кодацці та 2.



Ех. Як ми бачили вище, гіперсфери радіуса R у E^{n+1} цілком омбілічні й мають постійну середню кривину $H = \pm \frac{1}{R}$ ($k_1 = \dots = k_n = \pm \frac{1}{R}$ у кожній точці). Тому це приклад зовнішньої сфери (і справедливості Pr.1.)

Гіпотези площин і сфер Картана

def. Кажуть, що $(n + q)$ -вимірний рімановий многовид $(\overline{M}, \overline{g})$ задовольняє гіпотезу n -площин (відповідно, n -сфер), якщо для будь-якої $\overline{p} \in \overline{M}$ і для будь-якого n -вимірного підпростору $\sigma \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ існує n -вимірний цілком геодезичний підмноговид (відповідно, n -вимірна зовнішня сфера) (M, r) і точка $p \in M$ така, що $\overline{p} = r(p)$ і $\sigma = d_p r(T_p M)$.

Rem. Тобто у будь-якій точці у напрямку будь-якого n -вимірного підпростору дотичного простору можна провести цілком геодезичний підмноговид (відповідно, зовнішню сферу).

Rem. Оскільки цілком геодезичні підмноговиди є зовнішніми сферами, якщо $(\overline{M}, \overline{g})$ задовольняє гіпотезу n -площин, то він задовольняє й гіпотезу n -сфер (тобто гіпотеза n -площин апіорі сильніша).

Ex.1. Гіпотеза n -площин тривіально вірна при $q = 0$.

2. При $n = 1$ одновимірні цілком геодезичні підмноговиди – геодезичні, тому гіпотеза 1-площин завжди виконується за теоремою існування геодезичних.

3. Для многовидів $(\overline{M}, \overline{g})$ постійної секційної кривини виконана гіпотеза n -площин для будь-якого n , як згадувалося в розділі про цілком геодезичні підмноговиди.

Th. (Картан) Нехай зв'язний рімановий $(\overline{M}, \overline{g})$ задовольняє гіпотезу n -сфер для якогось $n > 1$ і ковимірності $q > 0$. Тоді $(\overline{M}, \overline{g})$ має постійну секційну кривину.

► Для будь-якої $\overline{p} \in \overline{M}$ нехай $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ – довільна ортонормована система з 3 векторів у $T_{\overline{p}}\overline{M}$ (за умовою вимірність $\overline{M}$ дорівнює $n + q \geq 3$). В силу умови, існує зовнішня сфера (M, r) і $p \in M$ такі, що $\overline{p} = r(p)$, $\overline{u} = d_p r(u)$, $\overline{v} = d_p r(v)$ для деяких $u, v \in T_p M$,

і $\bar{w} \in N_p M$ (доповнюємо $\bar{u}, \bar{v}$ до базиса n -вимірного підпростора, що ортогональний $\bar{w}$, і проводимо сферу у його напрямку). Тоді в силу Pr.3. вище

$$\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v})\bar{w} = R_p^\perp(u, v)\bar{w} \in N_p M.$$

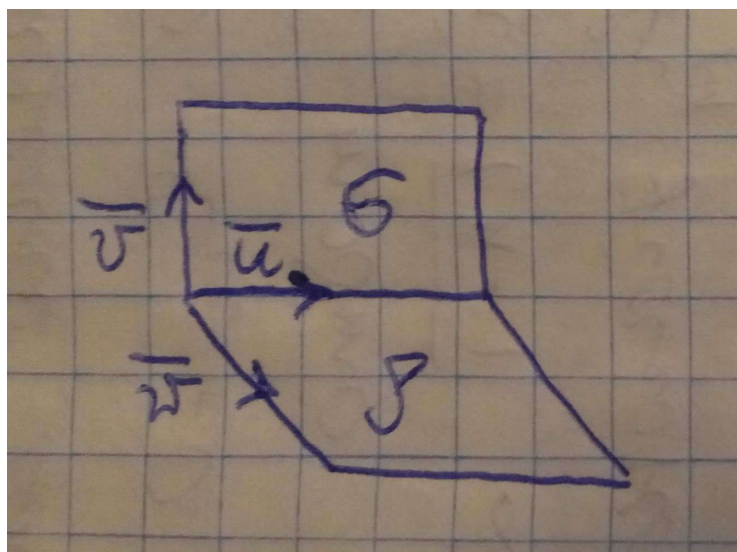
Зокрема, $\bar{g}_{\bar{p}}(\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v})\bar{w}, \bar{u}) = 0$. Для ортонормованої $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ система $\left\{\bar{u}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{v} + \bar{w}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{v} - \bar{w})\right\}$ також ортонормована, тому для неї це теж виконується:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{g}_{\bar{p}}\left(\bar{R}_{\bar{p}}\left(\bar{u}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{v} + \bar{w})\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{v} - \bar{w}), \bar{u}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\bar{g}_{\bar{p}}(\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v})\bar{v}, \bar{u}) - \bar{g}_{\bar{p}}(\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v})\bar{w}, \bar{u}) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}_{\bar{p}}(\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{w})\bar{v}, \bar{u}) - \bar{g}_{\bar{p}}(\bar{R}_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{w})\bar{w}, \bar{u})\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\overline{K}(\overline{u}, \overline{v}) - \overline{K}(\overline{u}, \overline{w}) \right),$$

де другий і третій доданки у передостанній суммі нульові за тим же фактом. Тут $\overline{K}(\overline{u}, \overline{v})$ – секційна кривина $(\overline{M}, \overline{g})$ у напрямку площини, що натягнута на $\overline{u}$ та $\overline{v}$, і використовується означення секційної кривини.

Зауважимо, що для будь-яких площин $\sigma, \tau \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ існує площина $\rho \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ така, що $\sigma \perp \rho$ і $\tau \perp \rho$ у наступному сенсі (див. рис. нижче): існують ненульові вектори $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ такі, що $\sigma \cap \rho = \{\lambda \overline{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\overline{v} \in \sigma$, $\overline{w} \in \rho$, і $\overline{u} \perp \overline{v}$, $\overline{u} \perp \overline{w}$, $\overline{v} \perp \overline{w}$, й аналогічно для τ і ρ (Впр.)



Звичайно, усі ці вектори можна зробити одиничними, отже вони утворюють ортонормовану систему. В силу доведеного, $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{K}(\bar{u}, \bar{w}) = \bar{K}(\rho)$, і аналогічно $\bar{K}(\tau) = \bar{K}(\rho) = \bar{K}(\sigma)$. Тобто всі секційні кривини в $\bar{p} \in \bar{M}$ збігаються. В силу теореми Шура та зв'язності, $(\bar{M}, \bar{g})$ – постійної секційної кривини.



Cor. Те ж вірно й для гіпотези n -площин.

Rem. Тобто гіпотези еквівалентні, і приклади вище вичерпують усі випадки, коли вони виконуються.