

34.2. $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. $\varphi \in C(X, Y)$ продолжается до $\bar{\varphi} \in C(\mathbb{R}^n, Y)$
 $\Rightarrow \varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ тривиальным.

Продолжение означает, что $\bar{\varphi}|_X = \varphi$, то есть $\varphi = \bar{\varphi} \circ i$, где
 $i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение. Тогда $\varphi_* = \bar{\varphi}_* \circ i_* : \pi_1(X, x) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{R}^n, x) \xrightarrow{\bar{\varphi}_*} \pi_1(Y, \varphi(x))$.
 Але $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{[e_x]\}$, до $\mathbb{R}^n$ стягиваем. Тогда
 $\varphi_*([f]) = \underbrace{[e_{\varphi(x)}]}_{= \varphi_*([e_x])} \forall [f] \in \pi_1(X, x) \Rightarrow \varphi_*$ трив.

34.4. Показать, что $\pi_1(GL(n, \mathbb{C}), E) \leftarrow \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ нескінченна.

Рассмотрим $\varphi : S^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) : z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\psi : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow S^1 : A \mapsto \frac{\det A}{|\det A|}$. $\forall z \quad \psi(\varphi(z)) = \frac{z}{|z|} = z \Rightarrow \psi \circ \varphi = \text{id}_{S^1}$.

Тогда $\psi_* \circ \varphi_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, 1)}$, при этом $\varphi_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(GL(n, \mathbb{C}), E)$ и $\psi_* : \pi_1(GL(n, \mathbb{C}), E) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$. Поскольку $\psi_* \circ \varphi_*$ — изоморфизм, ψ_* — сюр (мы просто $[f] = \psi_*(\varphi_*([f])) \forall [f] \in$

$\pi_1(S^1, 1)$), а φ_* - із'ю. Оскільки $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ нескінченна,
а $\psi_*: \pi_1(GL(n, \mathbb{C}), E) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ - ліній, $\pi_1(GL(n, \mathbb{C}), E)$ нескінченна,
(насправді $GL(n, \mathbb{C})$ ліній зв'язний, тому всі $\pi_1(GL(n, \mathbb{C}), A)$ нескінченні).

34.11. (X, Y, p) -накриття $\Rightarrow p$ -локаліз. гомеоморфізм.

$\forall x \in X \quad y := p(x) \quad \exists U \ni y$ - правильно покритий відрізок. Оскільки:

$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, зокрема, $\exists \alpha: x \in U_\alpha$. Покрі $p: U_\alpha \rightarrow U$ - гомеоморфізм.

34.13. Для яких $A \subset \mathbb{R}$ $(A, S^1, p|_A)$ є покриттям, де

$$p(x) = e^{2\pi i x}?$$

лише для $A = \mathbb{R}$. Дійсно, нехай $A \neq \mathbb{R}$. Покрі y якого
 $\exists$ немова точка $x, y := p(x)$. $\nearrow$ це покриття. Покрі y

$y \in U$ правильно найн. окр. U . За подуготово топологии S^1 ,
 $\exists$ дуга $(a, b) : y \in (a, b) \subset U$. Тогда все менс правильно
 найн. окр.: $(P|_A)^{-1}((a, b)) = \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda$. $\exists$ индекс λ_0 , $(P|_A)^{-1}((a, b)) =$
 $= P^{-1}((a, b)) \cap A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (c+n, d+n) \right) \cap A$. (где $a = e^{2\pi i c}$, $b = e^{2\pi i d}$).

Оценим $\forall \lambda \ P|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow (a, b)$ - гомеоморфизм, U_λ - все ~~интер-~~ интер-
 валы $(c+n, d+n)$, что повністю містяться в A . $P(x) = y \in$
 $(a, b) \Rightarrow \exists n : x \in (c+n, d+n)$. $x \in \partial A \Rightarrow (c+n, d+n) \cap A \neq \emptyset$,
 тогда $(c+n, d+n) \cap (P|_A)^{-1}((a, b)) \neq \emptyset \Rightarrow (c+n, d+n) = U_\lambda$ для некоторого
 $\lambda \Rightarrow (c+n, d+n) \subset A$. Але тогда $x \notin \partial A \downarrow$.

34.13. (Вопр. 7.2 лекцій)

Керівна стор. Екзист

$p: X \rightarrow Y$ задає накривтя $\Leftrightarrow \forall y \in Y \ p^{-1}(y)$ - дискретний

відкриття X і $\exists$ відкр. $U \ni y$ і гомеоморфизм $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow$

$U \times p^{-1}(y)$ такий, що $p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$ (де $p_U: U \times p^{-1}(y) \rightarrow U$ - ^{канон.} проекція.)

$\Rightarrow$ $\exists$ правильно накривті відкр. Оскільки $U \ni y$:

$p^{-1}(u) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, где U_α - открыты, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$ и
 $\forall \alpha \quad p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ - гомеоморфизм.

$\forall x \in p^{-1}(y) \exists \alpha \in A: x \in U_\alpha$, и $p^{-1}(y) \cap U_\alpha = \{x\}$, следовательно $p|_{U_\alpha}$ - инъектив, поэтому x - изолированная точка $p^{-1}(y)$. Множество $p^{-1}(y)$ дискретно.

$\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(y): z \mapsto (p(z), x(z))$, где $\{x(z)\} = p^{-1}(y) \cap U_\alpha(z)$ (пересечение $\neq \emptyset$, так как $p|_{U_\alpha}$ - гомеоморфизм), а $\alpha(z)$ - единственное такое, что $z \in U_{\alpha(z)}$ (единственность, так как открытые множества не пересекаются). Тогда верно
 $p_U(\varphi(z)) = p(z) \quad \forall z \in p^{-1}(U)$, поэтому $p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$.

φ - инъективен: $\forall z, w \in p^{-1}(U) \quad \varphi(z) = \varphi(w) \Rightarrow x(z) = x(w) \Rightarrow \alpha(z) = \alpha(w)$,
поэтому $z, w \in U_\alpha$ для некоторого $\alpha = \alpha(z) = \alpha(w)$. Крім того,
 $p(z) = p(w) \Rightarrow z = w$, так как $p|_{U_\alpha}$ - гомеоморфизм.

φ - сюръективен: $\forall (v, x) \in U \times p^{-1}(y)$ так как $p|_{U_{\alpha(x)}}$ - гомеоморфизм, $\exists z \in U_{\alpha(x)}$:
 $p(z) = v$; $x(z) = x$ по построению, так как $z \in U_{\alpha(x)}$.
Следовательно, $\varphi(z) = (v, x)$ (иными словами, $\varphi^{-1}(v, x) = (p|_{U_{\alpha(x)}})^{-1}(v)$).
Итак, φ - биекция.

Покажем, что φ - лок. гомео-зм в okolí $\forall z \in p^{-1}(u)$.
 (губ. ниске), а саме в okolí $\underbrace{U_{\Delta(z)}}_{(\text{вигнутості})}$: $\forall w \in U_{\Delta(z)}$
 $\varphi(w) = (p(w), x(z))$, тобто $\varphi(U_{\Delta(z)}) = U \times \{x(z)\}$ (бо
 $p|_{U_{\Delta(z)}}$ - зм), де $U \times \{x(z)\}$ - вигн. у $U \times p^{-1}(y)$, бо $p^{-1}(y)$ -
 диск. $\varphi|_{U_{\Delta(z)}}$ - це добута лок. гомео-зма $p|_{U_{\Delta(z)}}$ і постійно
 у $x(z) \Rightarrow$ лок. гомео-зм $U_{\Delta(z)} \rightarrow U \times \{x(z)\}$. Отже, φ - лок. гомео-зм.

Покажем, что φ - б'ю і лок. гомео-зм в okolí $\forall$ точки $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \varphi$ - гомеоморфізм. ($\varphi: X \rightarrow Y$)

$\Leftarrow$ Дост. взяти $U = X, V = Y$.

$\Rightarrow$ Отже, $\forall x \in X \exists$ вигн. $U \ni x, V \ni \varphi(x): \varphi: U \rightarrow V$ -
 гомео-зм, φ - б'ю. Замінилося перевірити, що φ - непер. і
 вигн.

$\forall$ бигр. $W \subset Y \quad \forall y \in W \quad x := \varphi^{-1}(y)$. Если $\overset{\text{бигр.}}{U} \ni x, V \ni y :$
 $\varphi: U \rightarrow V$ — гомеоморфизм. Тогда $W \cap V$ — бигр. Если $y \in V$, а
 иначе $y \in V \Rightarrow \varphi^{-1}(W) \cap U = \varphi^{-1}(W \cap V)$ — бигр. (так как $y \in V$, а иначе $y \in V$),
 $\subset \varphi^{-1}(W)$. Поэтому $\varphi^{-1}(W)$ компактна и бигр. Значит бигр. Следовательно $\Rightarrow$
 $\varphi^{-1}(W)$ бигр. Т.е., φ — гомеоморфизм.

А теперь, $\forall$ бигр. $W \subset X \quad \forall x \in W, y := \varphi(x)$, бигр. U, V — окрестности,
 $W \cap U$ бигр. $\Rightarrow \varphi(W) \cap V = \varphi(W \cap U)$ бигр. ($y \in V$, а иначе $y \in V$,
 так как V бигр.) $\Rightarrow y \in \varphi(W) \cap V \subset \varphi(W)$. Иначе, $\varphi(W)$ бигр. Т.е., φ бигр.

Лемма. Иначе, $\forall y \in Y \quad p^{-1}(y)$ — гомеоморфизм, $\exists$ гомеоморфизм $p^{-1}(U) \rightarrow$
 $U \times p^{-1}(y)$, где гомеоморфизм бигр. $U \ni y : p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$.
 (такое бигр. для p — гомеоморфизм). Поэтому, что $\forall$ такая U
 правильно накрыта, отсюда (X, Y, p) — накрытие:

$$p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U \times p^{-1}(y)) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U \times \{x\}\right) = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} \varphi^{-1}(U \times \{x\}).$$

$p^{-1}(y)$ гомеоморфизм. $\Rightarrow \forall x \in p^{-1}(y) \quad U \times \{x\}$ бигр. $\subset U \times p^{-1}(y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow [\varphi\text{-гомеоморфизм}] \Rightarrow \forall x \in p^{-1}(y) \quad U_x := \varphi^{-1}(U \times \{x\})$ бигр. $\subset p^{-1}(U)$.

а отже в X , до $p^{-1}(U)$ відкр. в X (p -перен.). При $x \neq z$

$$U \times \{x\} \cap U \times \{z\} = \emptyset \Rightarrow U_x \cap U_z = \emptyset. \text{ Наявність,}$$

$$\forall z \in U_x \text{ за умовою } p(z) = p_u(\varphi(z)), \text{ де } \varphi(z) \in U \times \{x\},$$

$$\text{тобто } p|_{U_x} = p_u|_{U \times \{x\}} \circ \varphi|_{U_x}. \text{ Основна справа комп. розко-}$$

$$\text{морфізмів } \varphi|_{U_x}: U_x \rightarrow U \times \{x\} \text{ і } p_u|_{U \times \{x\}}: U \times \{x\} \rightarrow U \text{ (за власн.}$$

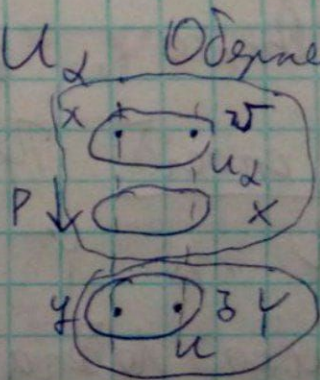
$$\text{власного добутку), } p|_{U_x}: U_x \rightarrow U \text{ - розко-зл.}$$

34.М. (Вопр. 7.3. лекція).

(X, Y, p) - накривання, $A \subset Y$ зв'язна $\Rightarrow \forall y, z \in A \quad |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(z)|$.

Покладаємо, що $|p^{-1}(y)| = |p^{-1}(z)| \Leftrightarrow \exists \text{ bij } p^{-1}(y) \rightarrow p^{-1}(z)$.

Покажемо, що це так, якщо y і z належать до одного
правильно накр. скелу U : $p^{-1}(u) = \bigcup_{z \in A} U_z$. Діємо $\forall x \in p^{-1}(y)$
 $\exists!$ $z \in A$: $x \in U_z$, тоді $x \mapsto u$: $\{u\} = p^{-1}(z) \cap U_z$. Оберемо
будь-який такий само, тоді це bij.



Оберемо якийсь $y \in A$ і покладемо

$$B := \{z \in A \mid |p^{-1}(z)| = |p^{-1}(y)|\}.$$

$\forall z \in B \exists$ правильне накр. відкр. $U \ni z$. Тоді $A \cap U$ -
відкр. скел z у A . $\forall w \in A \cap U$ за доведенням $|p^{-1}(w)| = |p^{-1}(z)| =$
 $= |p^{-1}(y)| \Rightarrow A \cap U \subset B$. Т.ч., B відкрита в топ. A .

Також само, $\forall z \notin B \exists$ пр. накр. відкр. $U \ni z$, $A \cap U$ -
відкр. скел z , і $\forall w \in A \cap U \quad |p^{-1}(w)| = |p^{-1}(z)| \neq |p^{-1}(y)|$,

тобто $A \cap U \subset A \setminus B$. Т.ч., $A \setminus B$ відкр. в топ. $A \Rightarrow B$ -
відкритозамкнена; $B \neq \emptyset (\ni y)$, A зв. $\Rightarrow B = A$, що й означає потр.

Наведено ще 2 доведення для лем. зв'язної A .

Отже, $y, z \in A \Rightarrow \exists$ шлях $f \in C(I, A): f(0)=y, f(1)=z$.

I спосіб. Правильно покрити ^{відкр.} околом y вкр. відкрите покр.

$\mathcal{U}$ пр. $\mathcal{V} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$ - відкр. покр. I . Кожнє δ - його число Лебга, $n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \delta$. Тоді $\forall i = 1, n \quad f\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right)$

містяться у деякому правильно покр. околі $\Rightarrow$ за доведенням

$$|P^{-1}(y)| = |P^{-1}(f(0))| = |P^{-1}(f(\frac{1}{n}))| = \dots = |P^{-1}(f(\frac{n-1}{n}))| = |P^{-1}(f(1))| = |P^{-1}(z)|.$$

II спосіб. Побудуємо біекцію $\varphi: P^{-1}(y) \rightarrow P^{-1}(z)$ за допомо-

го f . $\forall x \in P^{-1}(y)$ нехай $\tilde{f}_x$ - єдине підняття f з

початком x : $\tilde{f}_x \in C(I, X)$, $p \circ \tilde{f}_x = f$, $\tilde{f}_x(0) = x$. Тоді

$\tilde{f}_x(1) \in P^{-1}(z)$ визначене однозначно. Покладемо $\varphi(x) := \tilde{f}_x(1)$.

Ан-но будують $\psi: P^{-1}(z) \rightarrow P^{-1}(x)$ за $\tilde{f}: \tilde{f} \circ \gamma$ для $\gamma \in P^{-1}(z)$.

єдине відображення $\tilde{f}$ з початком $\tilde{f}_v(0) = v$, і покладаємо
 $\Psi(v) := \tilde{f}_v(1)$. Тоді $\forall x \in P^{-1}(y)$ $\Psi(\varphi(x)) = \Psi(\tilde{f}_x(1)) =$
 $= \tilde{f}_{\tilde{f}_x(1)}(1)$. При цьому $P \circ \tilde{f}_{\tilde{f}_x(1)} = \tilde{f}$ і $\tilde{f}_{\tilde{f}_x(1)}(0) = \tilde{f}_x(1)$,
 тому за єдиністю відображення $\tilde{f}_{\tilde{f}_x(1)} = \tilde{f}_x$ (бо $P \circ \tilde{f}_x = \tilde{f}$ і
 $\tilde{f}_x(0) = \tilde{f}_x(1)$). Отже, $\Psi(\varphi(x)) = \tilde{f}_x(1) = \tilde{f}_x(0) = x$. Т.ч., $\Psi \circ \varphi = \text{id}_{P^{-1}(y)}$,
 і маємо також $\varphi \circ \Psi = \text{id}_{P^{-1}(z)}$, тому φ і Ψ — бієкції, а $\Psi = \varphi^{-1}$.