Задача 1. Побудуйте індикатрису дотичних для наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^2 \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^3 \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

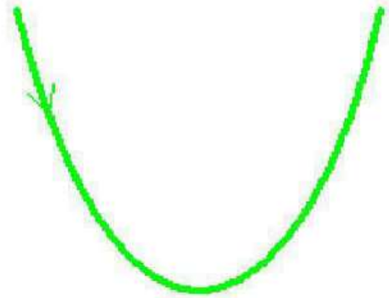
4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at} \sin t \\ x^2 = e^{at} \cos t \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

Опишіть індикатрису дотичних як траєкторію точки, що рухається по одиничному колу.

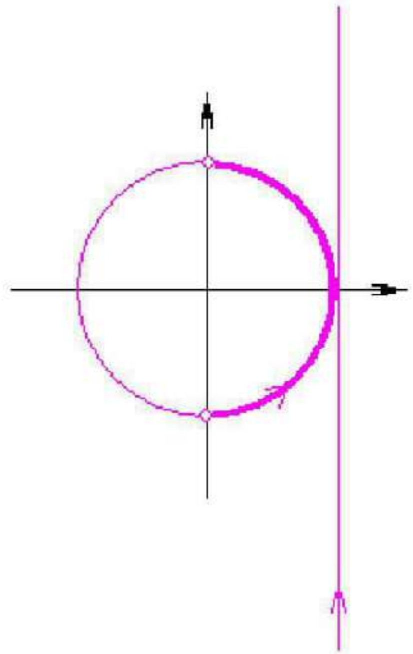
Розв'язання:

1) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a+t \\ b+\cosh t \end{pmatrix}$,



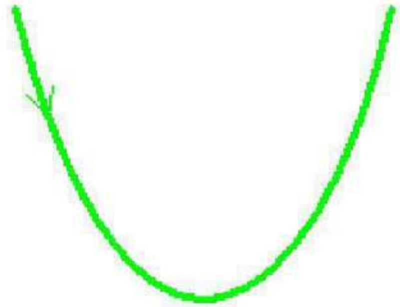
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$

$$\vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ \dfrac{\sinh t}{\cosh t} \end{pmatrix}$$



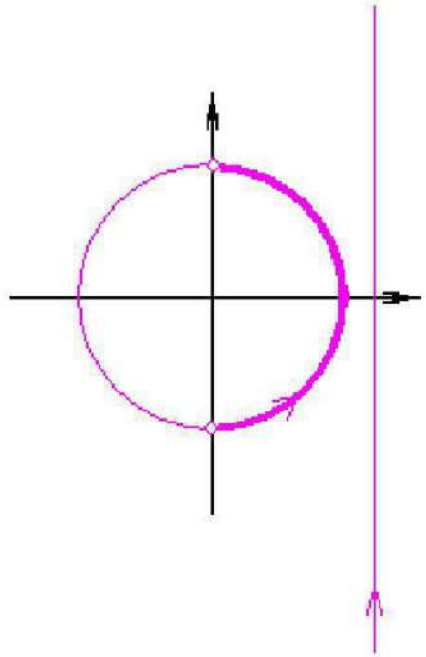
Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{t}{\cosh t} \\ x^2 = \dfrac{\sinh t}{\cosh t} \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$

2) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt^2 \end{pmatrix}$, $a>0, b>0$



$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ 2bt \end{pmatrix}, \qquad \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}$$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2bt \end{pmatrix}$$



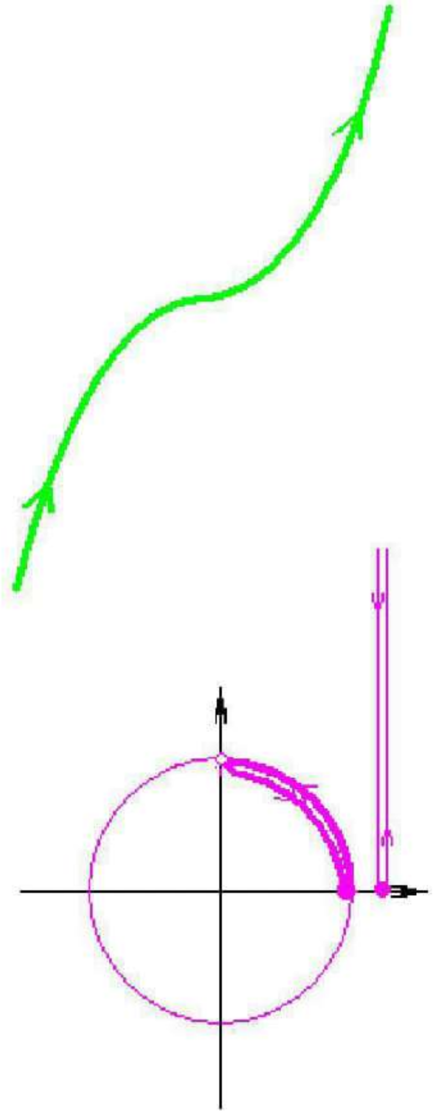
Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} \\ x^2 = \dfrac{2bt}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

3) $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} at \\ bt^3 \end{pmatrix}$, $a>0,\ b>0$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\begin{pmatrix} a \\ 3bt^2 \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+9b^2t^4}$$

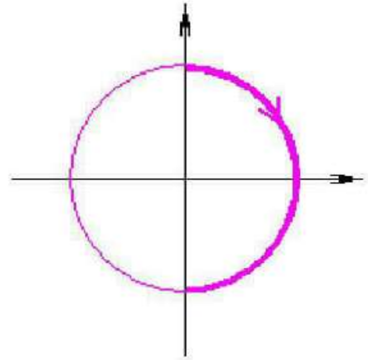
$$\vec{\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2+9b^2t^4}}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 3bt^2 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{cases} x^1=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+9b^2t^4}} \\ x^2=\dfrac{3bt^2}{\sqrt{a^2+9b^2t^4}} \end{cases}, \ -\infty<t<\infty$



4) $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}, 0 < t < 2\pi$

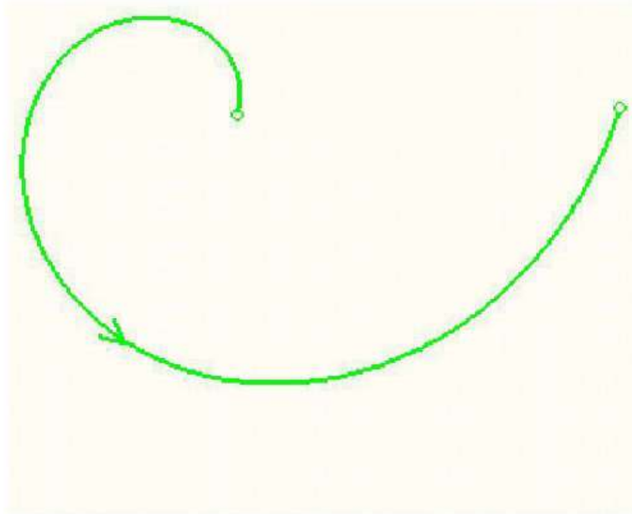
$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|=2\sin\frac{t}{2}$$



$$\vec{\tau}(t)=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

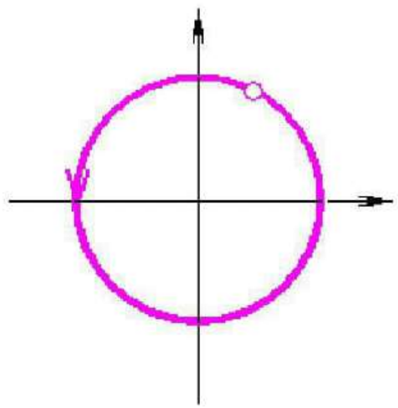
Відповідь: $\begin{cases} x^1=\sin\frac{t}{2} \\ x^2=\cos\frac{t}{2} \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$

5) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos t \\ e^{at}\sin t \end{pmatrix}, a>0$



$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} e^{at}(a\cos t - \sin t) \\ e^{at}(a\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = e^{at}\sqrt{1+a^2}$$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \begin{pmatrix} a\cos t - \sin t \\ a\sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}$$



Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sin t \\ x^2 = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin t + \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos t \end{cases}$

***Задача 2.** Побудуйте індикатрису дотичних для овалу Кассіні

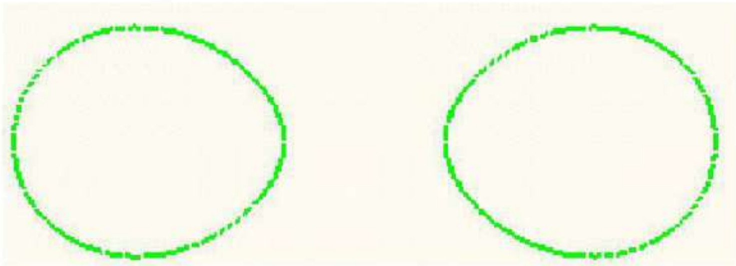
$$((x^1-1)^2+(x^2)^2)\,((x^1+1)^2+(x^2)^2)\ -c^2=0$$

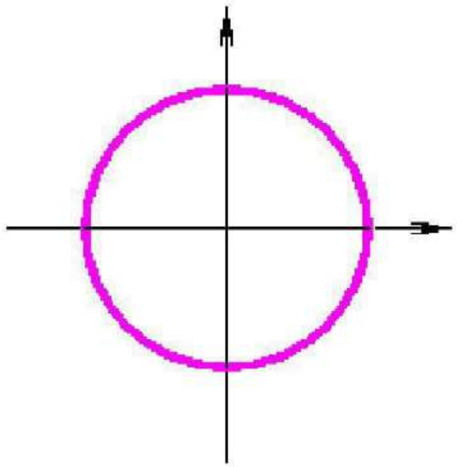
Проаналізуйте залежність форми індикатриси від параметру c.

Розвязання:

Якщо $0<|\,c\,|<1$, то овал Кассіні утворений з двох овалів.

Для кожного з овалів індикатрисою дотичних є однократно вкрите коло.

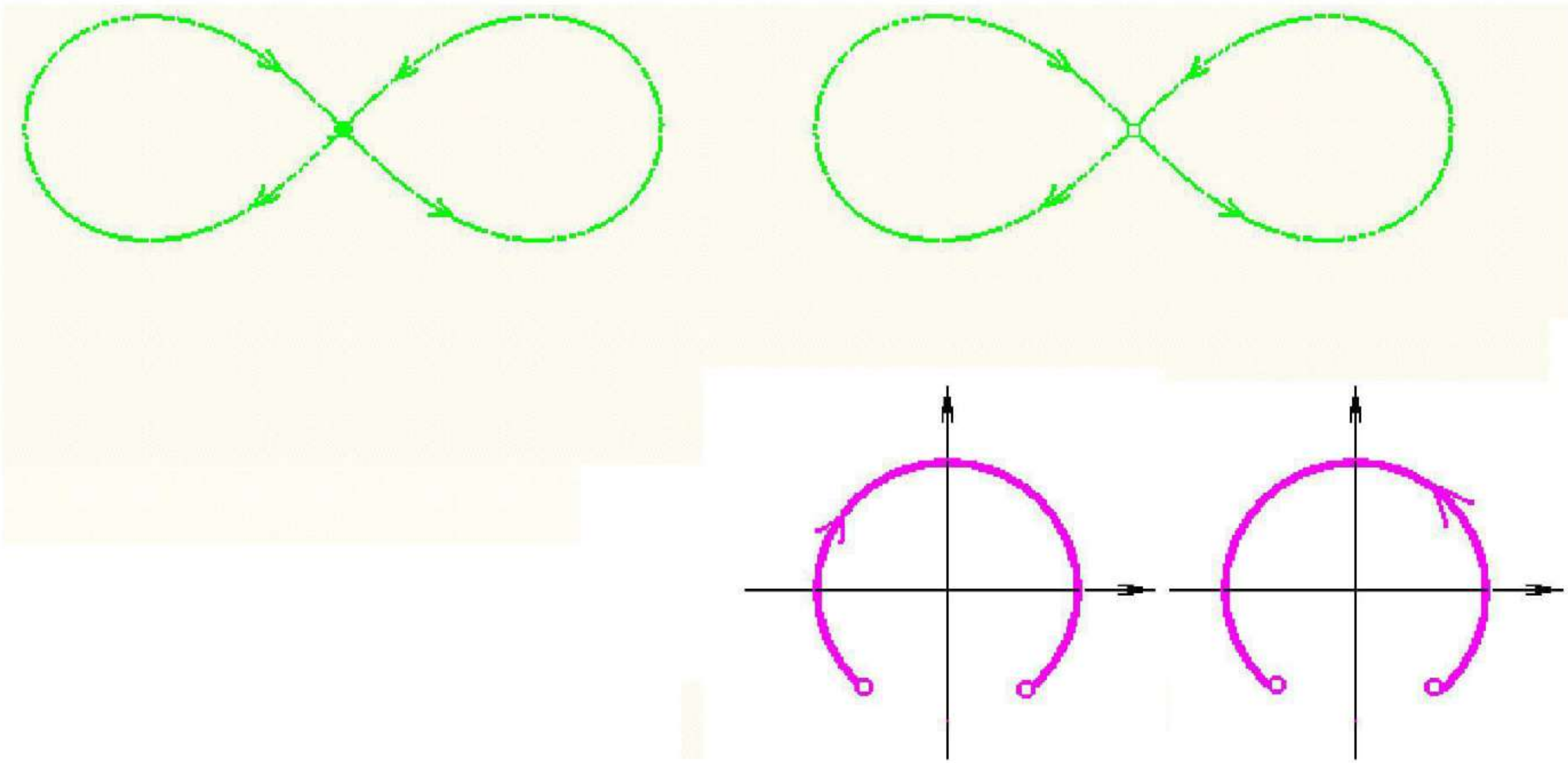




Якщо $|c|=1$, то овал Кассіні – це лемніската Бернуллі.

Лемніската Бернуллі з виколотою точкою самоперетину (точка перегину для гілок кривої) розпадається на дві компоненти.

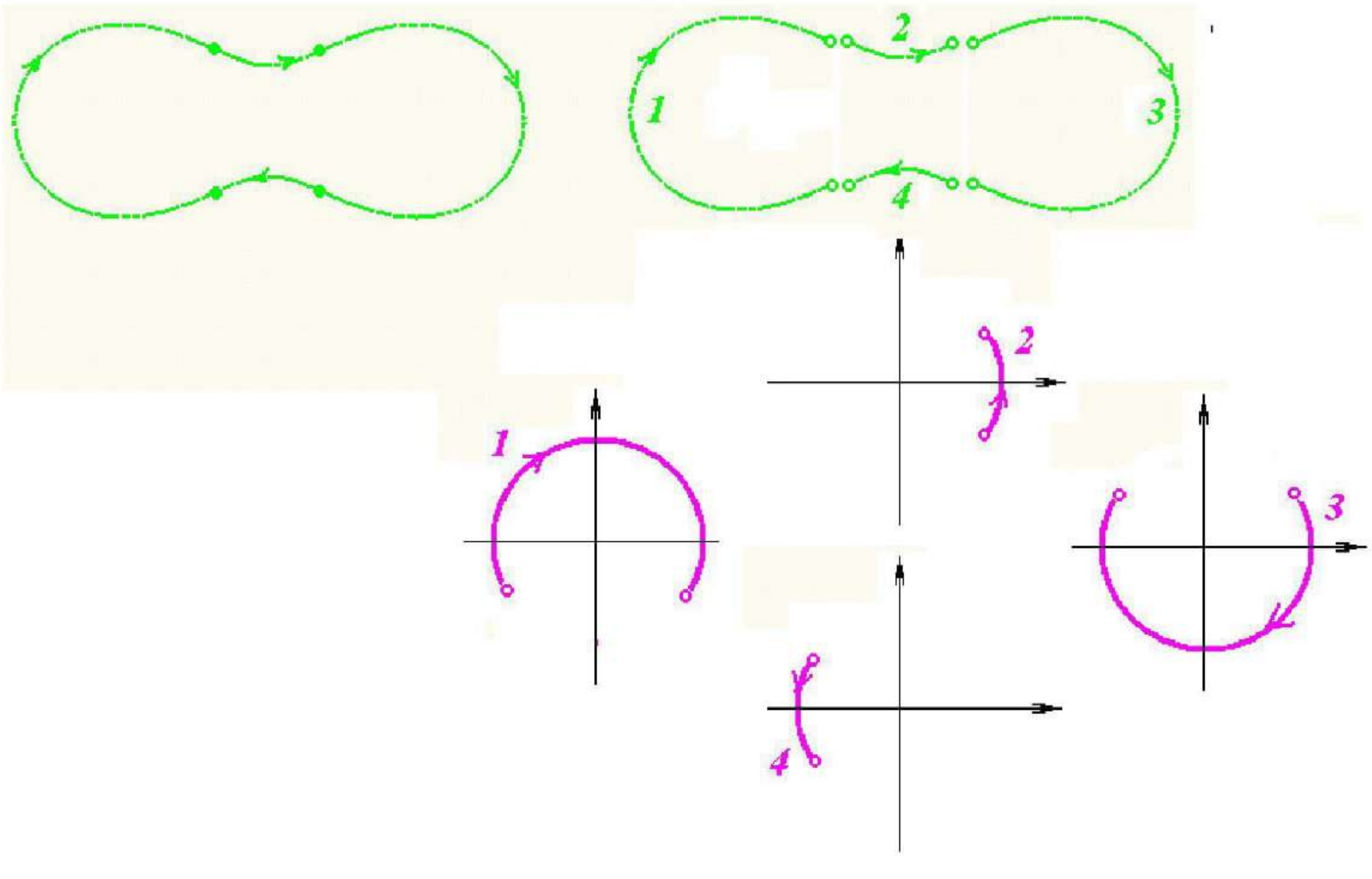
Для кожної з цих компонент індикатриса дотичних представляє собою ¾ однократно вкритого кола.



Якщо $1 < |c| < 2$, то овал Кассіні має чотири точки перегину.

Якщо виколоти точки перегину, то овал Кассіні розпадається на чотири компоненти.

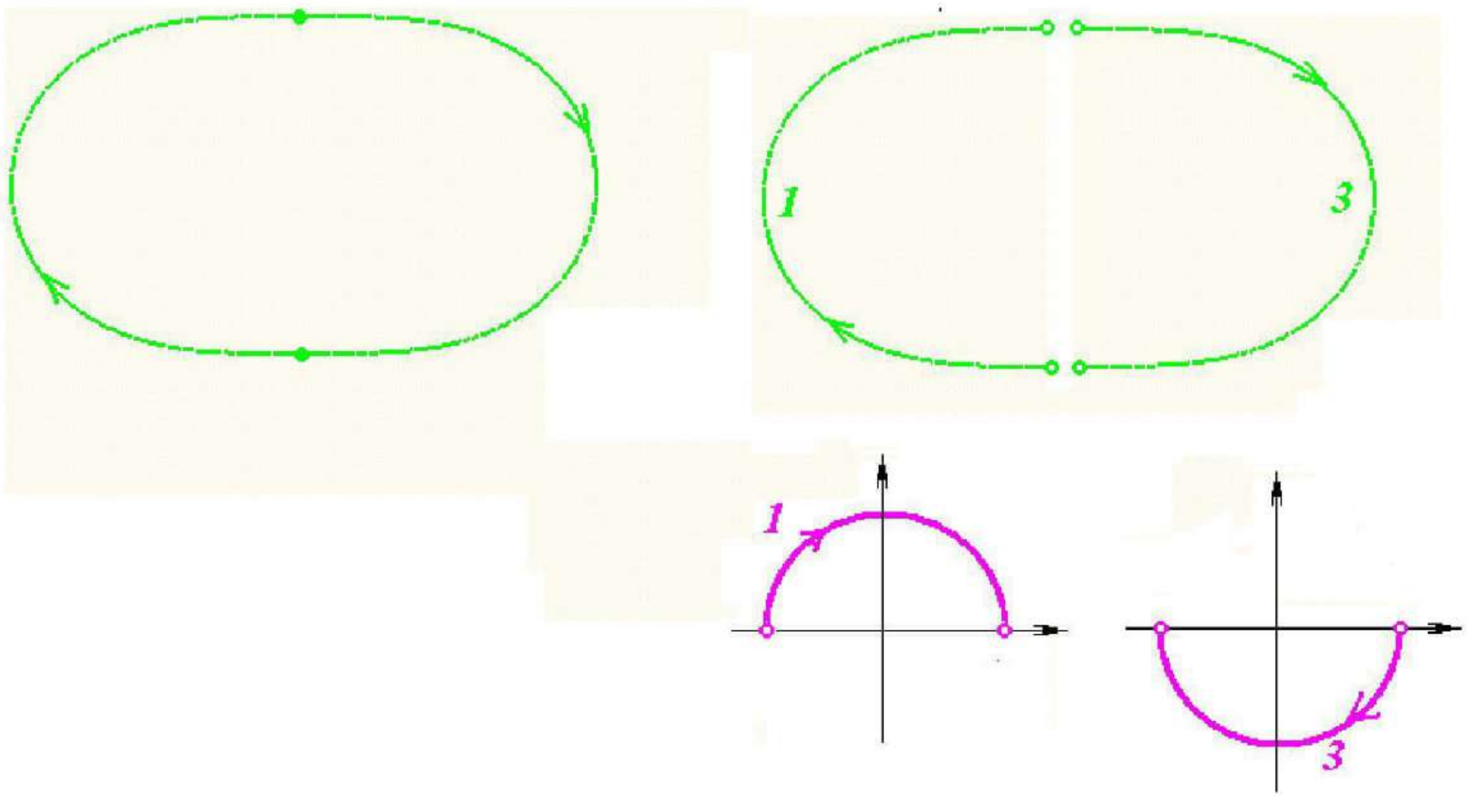
Для кожної з цих компонент овалу Кассіні індикатриса дотичних представляє собою дугу кола, кінці якої визначається напрямками дотичної в граничних точках перегину.



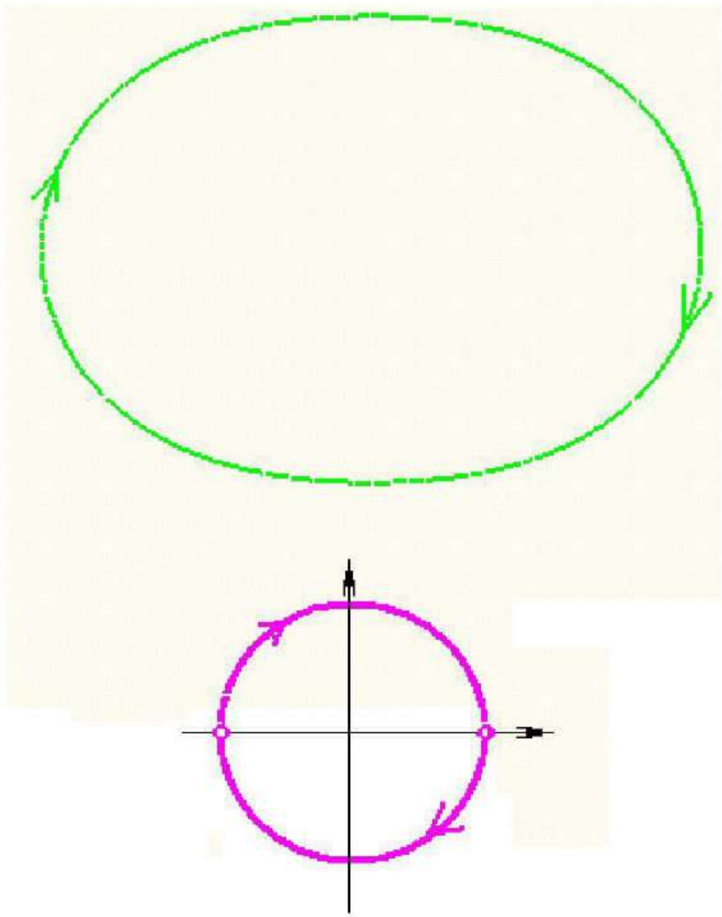
В граничному випадку $|c| = 2$ пари точок перегину овалу Кассіні співпадуть так, що на овалі Кассіні залишаться дві точки перегину.

Якщо виколоти точки перегину, то овал Кассіні розпадається на дві компоненти.

Для кожної з цих компонент овалу Кассіні індикатриса дотичних представляє собою півколо.



Якщо $|c| > 2$, то овал Кассіні не містить точок перегину і є замкнутою опуклою кривою. Індикатриса дотичних представляє собою однократно вкрите коло.



Зауваження. Для неявно заданої регулярної кривої

$$F(x,y)=0$$

кривина обчислюється за формулою

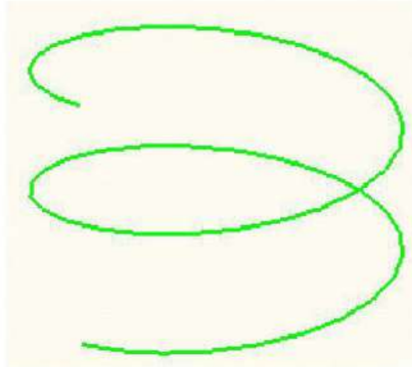
$$k=\frac{F''_{xx}(F'_y)^2-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}(F'_x)^2}{((F'_x)^2+(F'_y)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Як наслідок, точки перегину ($k=0$) неявно задано регулярної кривої знаходяться з наступною системи:

$$\begin{cases} F=0 \\ F''_{xx}(F'_y)^2-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}(F'_x)^2=0 \end{cases}$$

Задача 3. Побудуйте індикатрису дотичних, індикатрису головних нормалей і індикатрису бінормалей для гвинтової лінії

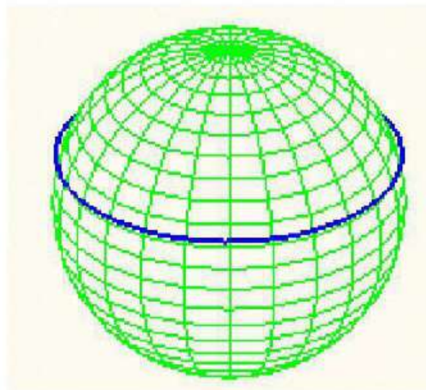
$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$



Розв'язання: Згадаємо базис Френе:

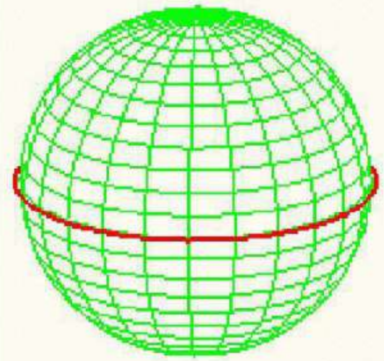
$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix} h\sin t \\ -h\cos t \\ r \end{pmatrix}$$

Індикатриса дотичних: $\begin{cases} x^1 = -\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t \\ x^2 = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t \\ x^3 = \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{cases}$



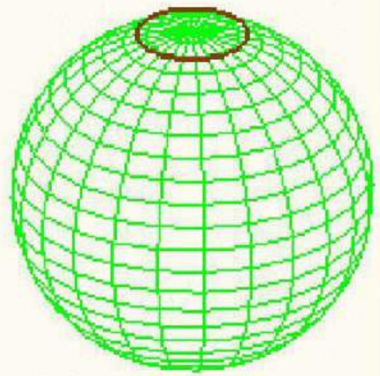
Індикатриса головних нормалей:

$$\begin{cases} x^1 = -\sin t \\ x^2 = -\cos t \\ x^3 = 0 \end{cases}$$



Індикатриса бінормалей:

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin t \\ x^2 = \dfrac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos t \\ x^3 = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \end{cases}$$



Задача 4. Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds$ для наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = a\sin t + c \\ x^2 = b\cos t + d \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$ $\qquad -2\pi$

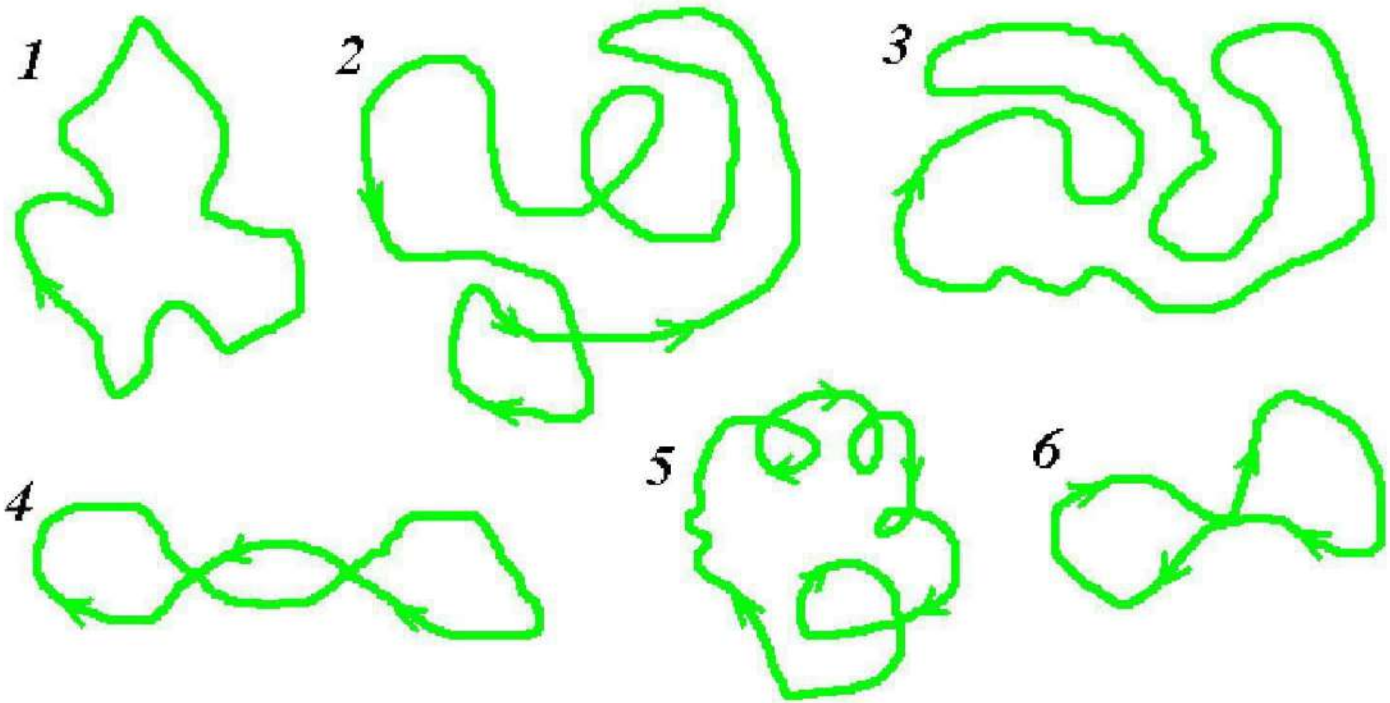
2) $\begin{cases} x^1 = a\cosh t + c \\ x^2 = b\sinh t + d \end{cases}$, $-\infty < t < \infty$ $\qquad \arccos\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt^3 \end{cases}$, $-\infty < t < \infty$ $\qquad 0$

4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$ $\qquad -\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at}\sin t \\ x^2 = e^{at}\cos t \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$ $\qquad 2\pi$

Задача 5. Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds$ для наступних плоских кривих:



Відповідь: $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds = 2\pi m$,

де 1) $m = -1$, 2) $m = 1$, 3) $m = -1$, 4) $m = -1$, 5) $m = -5$, 6) $m = -1$,

***Задача 6.** Розглянемо регулярну криву γ в $I\!R^3$, задану натуральними рівняннями

$$k=k(s),\ \kappa=\kappa(s),\ 0 < s < L.$$

Проаналізуйте регулярність та обчисліть довжину індикатриси дотичних, індикатриси головних нормалей і індикатриси бінормалей кривої γ.

Розв'язання:

$$\vec{x}=\vec{\tau}(s)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=k$$

$$l_\tau=\int_0^L\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|ds=\int_0^L k\,ds$$

$$\vec{x}=\vec{\nu}(s)$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\kappa\vec{\beta}$$

$$\left|\frac{d\vec{\nu}}{ds}\right|=\sqrt{k^2+\kappa^2}$$

$$l_\nu=\int_0^L\left|\frac{d\vec{\nu}}{ds}\right|ds=\int_0^L\sqrt{k^2+\kappa^2}\,ds$$

$$\vec{x}=\vec{\beta}(s)$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\kappa\vec{\nu}$$

$$\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=|\kappa|$$

$$l_\beta=\int_0^L\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|ds=\int_0^L|\kappa|\,ds$$

Задача 1.1. Розглянемо циліндр F, утворений прямими, що проходять через точки кривої γ: $\begin{cases} x^1 = \cosh t \\ x^2 = t \\ x^3 = 0 \end{cases}$ і мають спільний напрямний вектор $\vec{e} = (1,0,1)$.

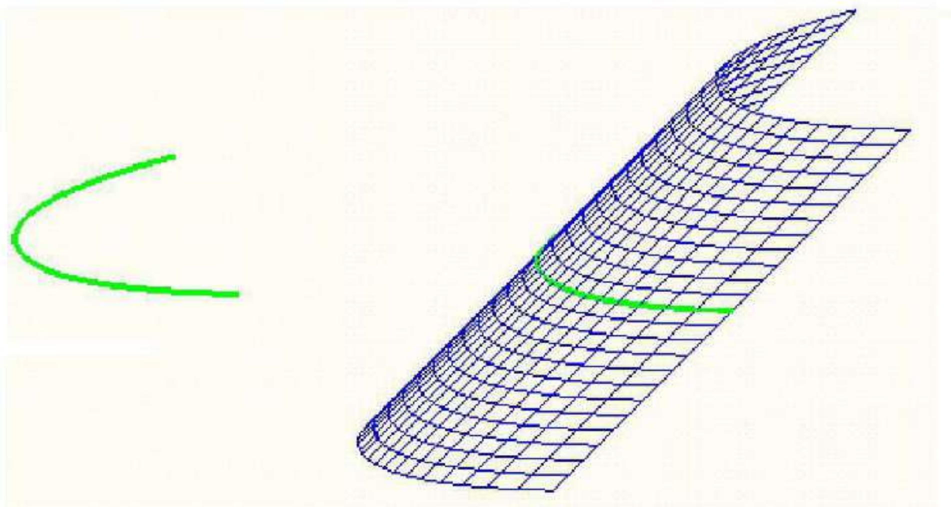
Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) циліндра F, перевірте регулярність циліндра. *Знайдіть криву, по якій циліндр F перетинається з площиною, ортогональною твірним прямим циліндра.

Розв'язання.

$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2\vec{e}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \\ u^1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 + u^2 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$



$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\cosh u^1+u^2\\ u^1\\ u^2\end{pmatrix}$$

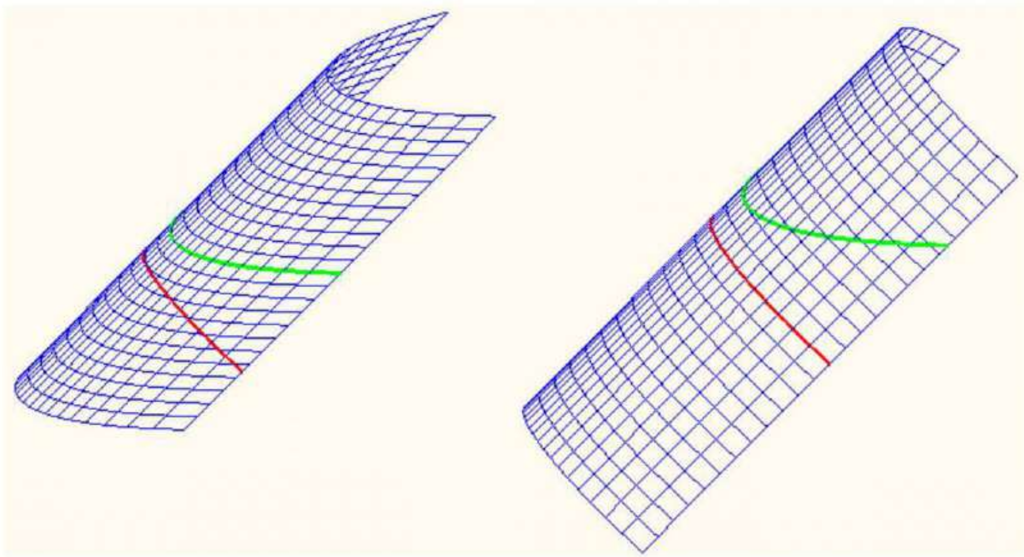
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^1}\,\dfrac{\partial\vec{f}}{du^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sinh u^1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad Rank\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^1}\,\dfrac{\partial\vec{f}}{du^2}\end{pmatrix}=Rank\begin{pmatrix}\sinh u^1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\equiv 2$$

Відповідь: Заданий циліндр F є регулярною параметрично заданою поверхнею

**Додаток: Площина $x^1+x^3=0$,*

$$\cosh u^1+2u^2=0,\quad u^2=-\frac{1}{2}\cosh u^1$$

$$\vec{f}(u^1,-\frac{1}{2}\cosh u^1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cosh u^1\\ 2u^1\\ -\cosh u^1\end{pmatrix}$$



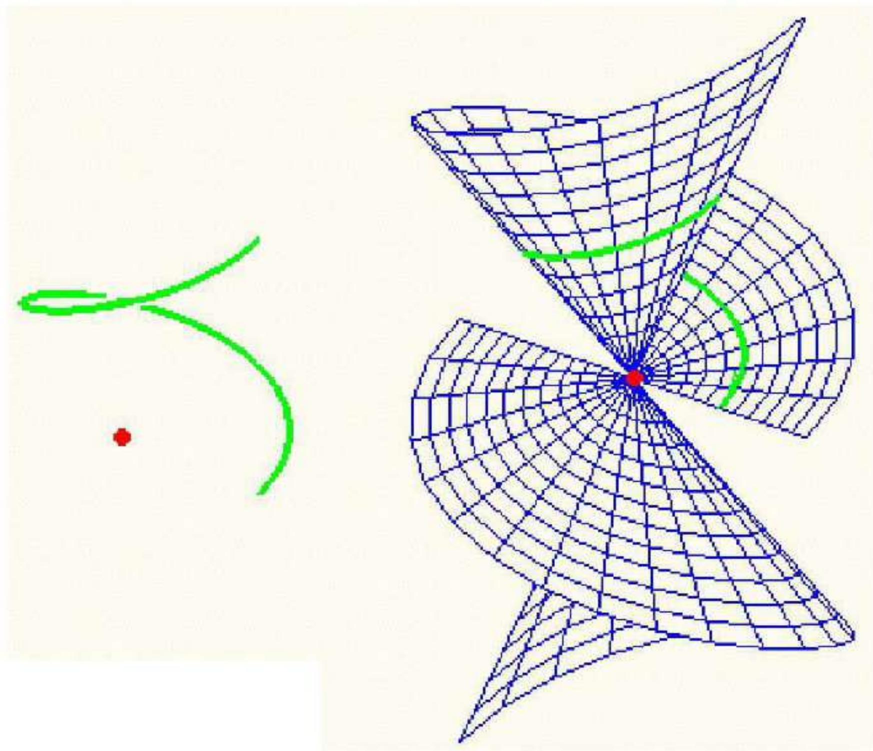
Задача 1.2. Розглянемо конус F, утворений прямими, що проходять через точку $O(0,0,0)$ і точки кривої γ: $\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$. Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) конуса F, перевірте регулярність конуса. *Знайдіть криву, по якій конус F перетинається зі сферою одиничного радіусу з центром в вершині конуса - точці O.

Розв'язання.

$$\vec{x} = (\vec{f}_\gamma(u^1) - \vec{x}_O)\cdot u^2 + \vec{x}_0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}\cdot u^2 = \begin{pmatrix} ru^2\cos u^1 \\ ru^2\sin u^1 \\ hu^1u^2 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$



$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix} ru^2\cos u^1 \\ ru^2\sin u^1 \\ hu^1u^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ru^2\sin u^1 & r\cos u^1 \\ ru^2\cos u^1 & r\sin u^1 \\ hu^2 & hu^1 \end{pmatrix},$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{du^1},\frac{\partial\vec{f}}{du^2}]=\begin{pmatrix} hru^2(u^1\cos u^1-\sin u^1) \\ hru^2(u^1\sin u^1+\cos u^1) \\ -r^2u^2 \end{pmatrix}, \qquad |[\frac{\partial\vec{f}}{du^1},\frac{\partial\vec{f}}{du^2}]|=r\cdot|u^2|\cdot\sqrt{h^2((u^1)^2+1)+r^2}$$

$$Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2\neq 0\,, \qquad Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}<2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2=0$$

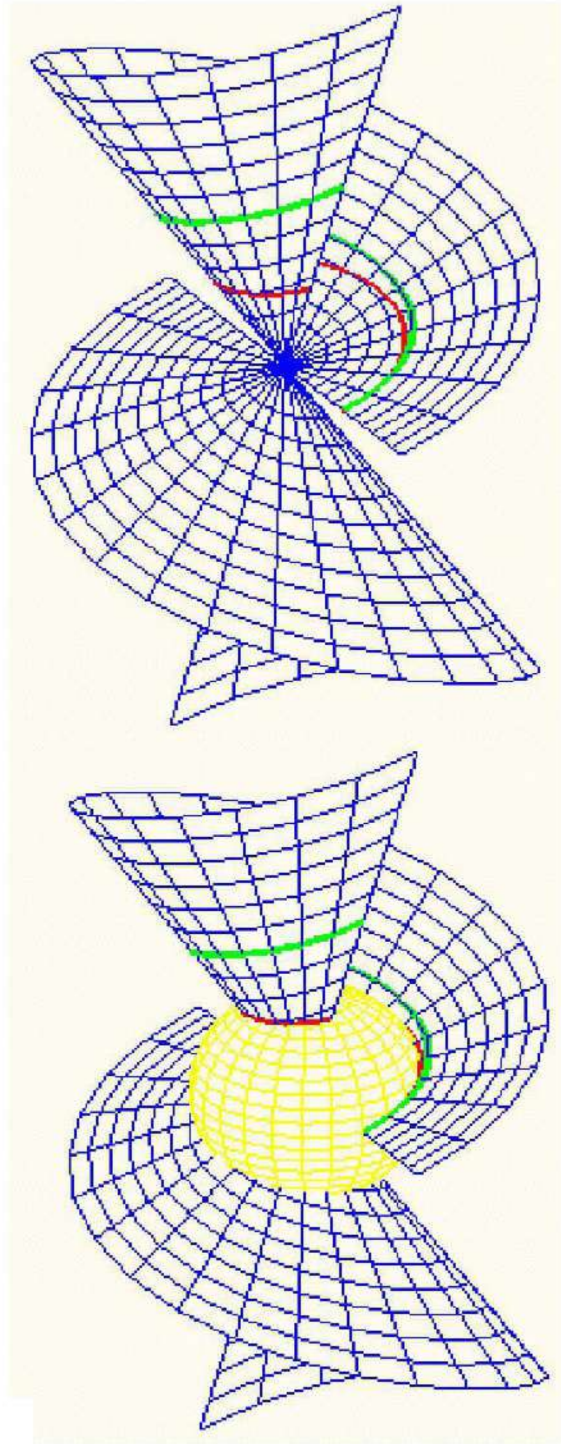
Відповідь: Заданий конус F є регулярною параметрично заданою поверхнею в усіх своїх точках,за виключенням вершини O

*Додаток:

Сфера $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 1$

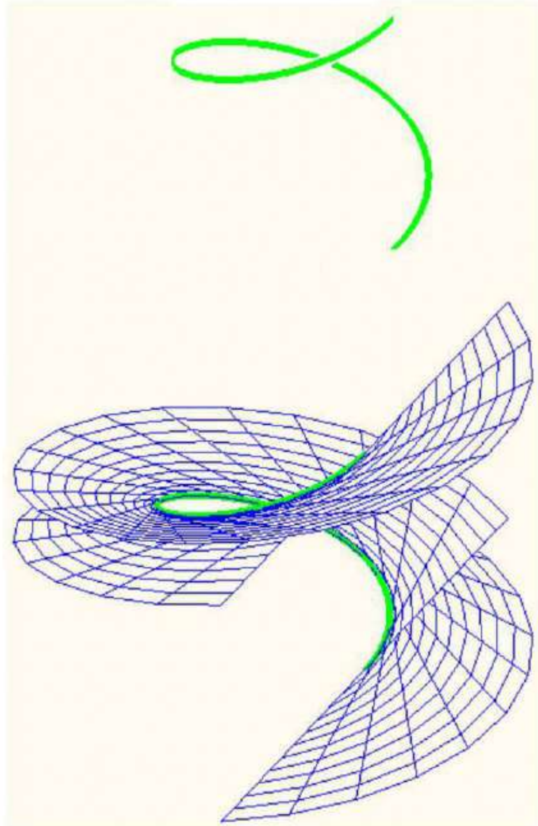
$$(r^2 + h^2(u^1)^2)\,(u^2)^2=1, \qquad u^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}$$

$$\vec{f}\left(u^1, \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}\cdot\begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}$$



Задача 1.3. Розглянемо торсову поверхню F, утворену дотичними прямими гвинтової лінії γ: $\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$. Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) поверхні F, перевірте регулярність цієї поверхні.

Розв'язання.



$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2 \cdot \frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(u^1)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} -r\sin u^1 \\ r\cos u^1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ h(u^1 + u^2) \end{pmatrix}$$

$$0 < u^1 < 2\pi, \ -\infty < u^2 < \infty$$

$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix} r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ h(u^1+u^2) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{du^1}\frac{\partial \vec{f}}{du^2}\right)=\begin{pmatrix} -r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) & -r\sin u^1 \\ r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) & r\cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix}$$

$$Rank\begin{pmatrix} -r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) & -r\sin u^1 \\ r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) & r\cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix}=Rank\begin{pmatrix} -u^2\cos u^1 & -r\sin u^1 \\ -u^2\sin u^1 & r\cos u^1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

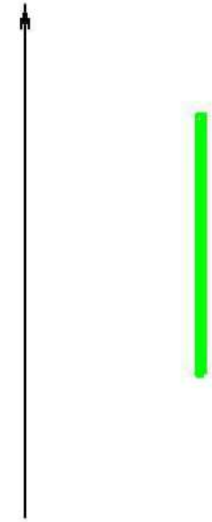
$$Rank\left(\frac{\partial \vec{f}}{du^1}\frac{\partial \vec{f}}{du^2}\right)=2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 \neq 0\,, \qquad Rank\left(\frac{\partial \vec{f}}{du^1}\frac{\partial \vec{f}}{du^2}\right)<2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2=0,$$

Відповідь: Задана торсова поверхня F є регулярною параметрично заданою поверхнею всюди, за виключенням точок початкової гвинтової лінії (де $u^2=0$)

Задача 3.1.1. Розглянемо вертикальну пряму $x^1=r>0$ в площині x^1x^3. Яка поверхня утворюється в $I\!R^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв’язання. Пряма γ задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \\ x^2 = 0 \quad , \quad -\infty < t < \infty \\ x^3 = t \end{cases}$$

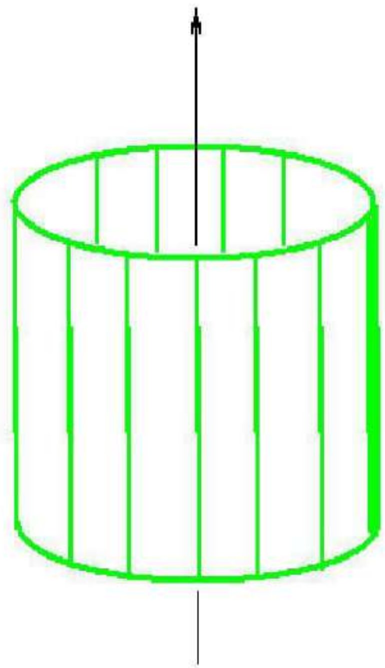


Відповідна поверхня обертання (навколо осі x^3) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \;, \quad -\infty < t < \infty,\; \alpha < \varphi < \beta. \\ x^3 = t \end{cases}$$



Вектор-функція

$$\vec{f}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial t} & \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Таким чином, задана поверхня обертання – це круговий циліндр. Поверхня є регулярною, на ній немає особливих точок.

Відповідь: $\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \ \alpha < \varphi < \beta.$

Задача 4. Проаналізуйте регулярність наступних неявно заданих поверхонь та, якщо є, вкажіть особливі (сингулярні) точки, де порушуються умови регулярності:

1) площина: $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0$

2) еліпсоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 = 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

3) гіперболоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 = \pm 1 \ , \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

4) параболоїд: $x^3 = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2 \ , \quad a_1 > 0, a_2 > 0$

5) лінійчата поверхня: $\Phi(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}) = 0$

6) циліндрична поверхня: $\Phi(x^1, x^2) = 0$

7) поверхня обертання: $\Phi((x^1)^2 + (x^2)^2 , x^3) = 0$

8) кубічна поверхня: $x^1 x^2 x^3 = a_0$

Розв'язання.

1) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_0$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 = 0 \\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на площині F немає особливих точок. Це означає, що площина F є регулярною неявно заданою поверхнею.

2) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 - 1$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 - 1 = 0 \\ 2a_1 x^1 = 0,\ 2a_2 x^2 = 0,\ 2a_3 x^3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на еліпсоїді F немає особливих точок. Це означає, що еліпсоїд F є регулярною неявно заданою поверхнею.

б) Рівняння $\Phi(x^1, x^2) = 0$ задає нам лінійчату поверхню: якщо координати якоїсь точки $P(p^1,p^2,p^3)$ задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь якої точки $Q(p^1,p^2,t)$ вертикальної прямої, що проходить через точку P. Оскільки всі такі прямі є паралельними (вертикальній координатній осі x^3), поверхня F є циліндром.

Проведемо горизонтальну площину $x^3=0$. Площина перетинає циліндр F по деякій кривій γ, що задається в цій площині рівнянням $\Phi(x^1, x^2) = 0$. Отже, циліндр F утворений вертикальними прямими, що проходять через точки кривої γ.

Перевіримо регулярність циліндра.

Припустимо, що функція $\Phi(x^1, x^2)$ є C^1-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно задана крива γ є регулярною, то циліндр F буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на кривій γ є особлива точка P_0, то на циліндрі F отримаємо цілу пряму OP_0, точки якої особливими точками циліндра F. Інакше кажучи, пряма OP_0 буде представляти собою ребро на циліндрі F.