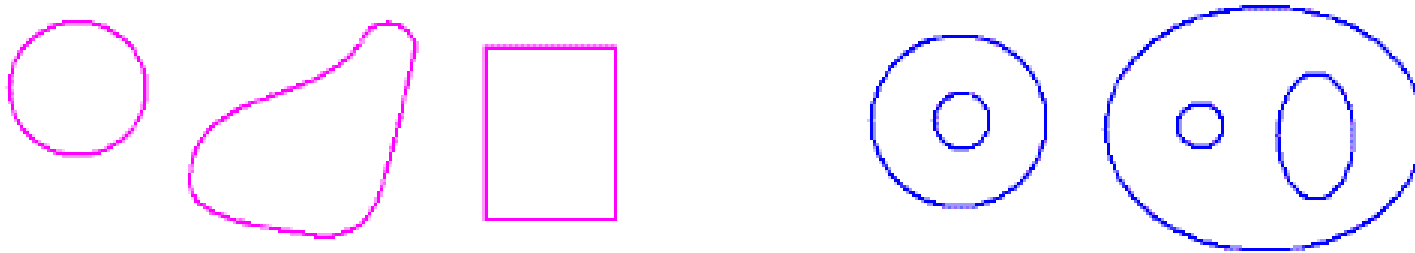


Лекція 9. Поверхні – визначення і способи задавання

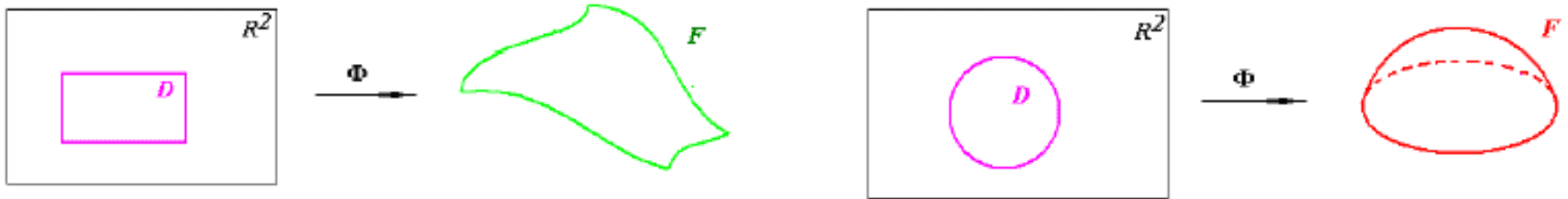
1. Топологічні поняття про поверхню

Визначення. Областю в $\mathbb{R}^2$ будемо називати підмножину, топологічно еквівалентну відкритому диску (кругу) в $\mathbb{R}^2$.

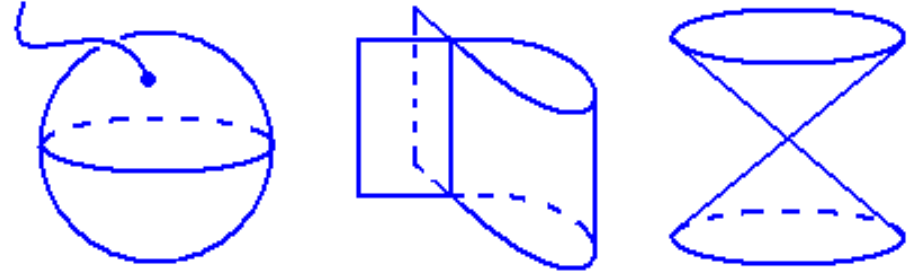
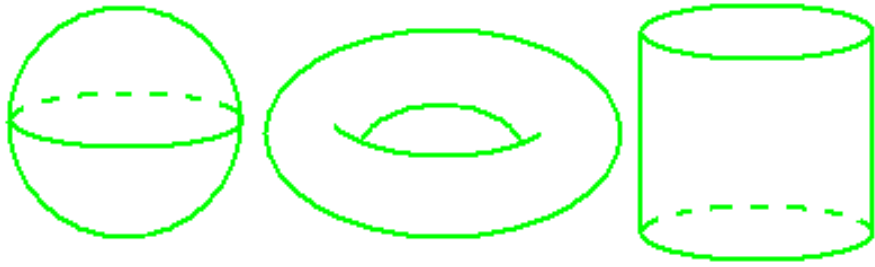


Визначення. Елементарною поверхнею F в $\mathbb{R}^3$ називається образ області D з $\mathbb{R}^2$ при її відображенні в $\mathbb{R}^3$, що є гомеоморфізмом (на образ):

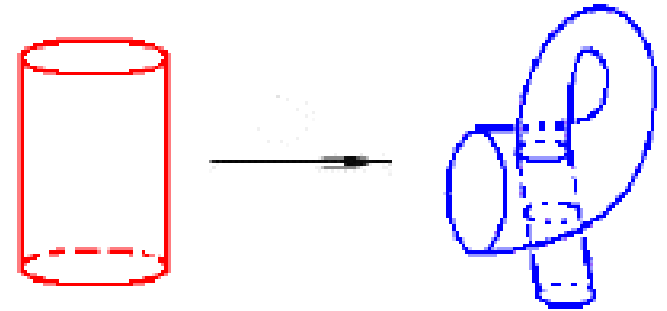
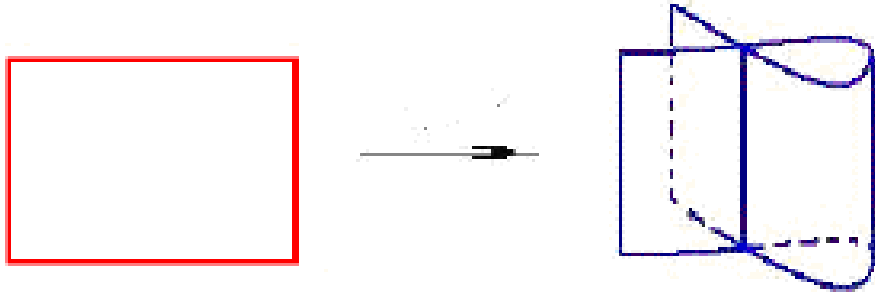
$$\begin{aligned}\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(D) &= F\end{aligned}$$



Визначення. Простою поверхнею F в $\mathbb{R}^3$ називається зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^3$, що локально є елементарною поверхнею: для будь-якої точки $P \in F$ існує окіл U в $\mathbb{R}^3$ такий, що перетин $U \cap F$ є елементарною поверхнею.



Визначення. Загальною поверхнею в $\mathbb{R}^3$ називається образ простої поверхні при її неперервному відображенні в $\mathbb{R}^3$, що локально є гомеоморфізмом (на образ).



2. Параметрично задані поверхні

Нехай F – елементарна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Вона задається відображенням

$$\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

деякої області $D \subset \mathbb{R}^2$ при її відображенні в $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi(D) = F$$

Якщо ввести координати (u^1, u^2) в $D \subset \mathbb{R}^2$ і координати (x^1, x^2, x^3) в $\mathbb{R}^3$, то відображення Φ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) , \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

тобто, у векторній формі

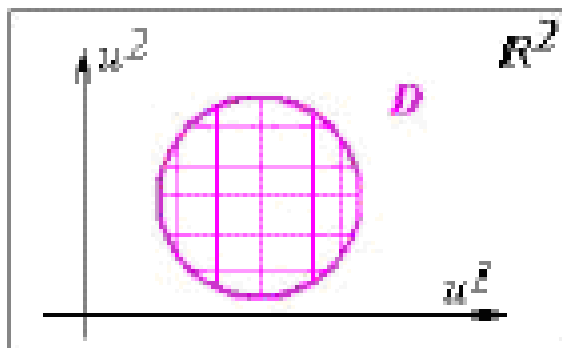
$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2).$$

Вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ називається *радіус-вектором* поверхні F .

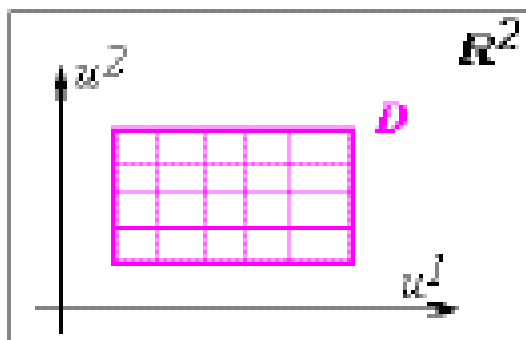
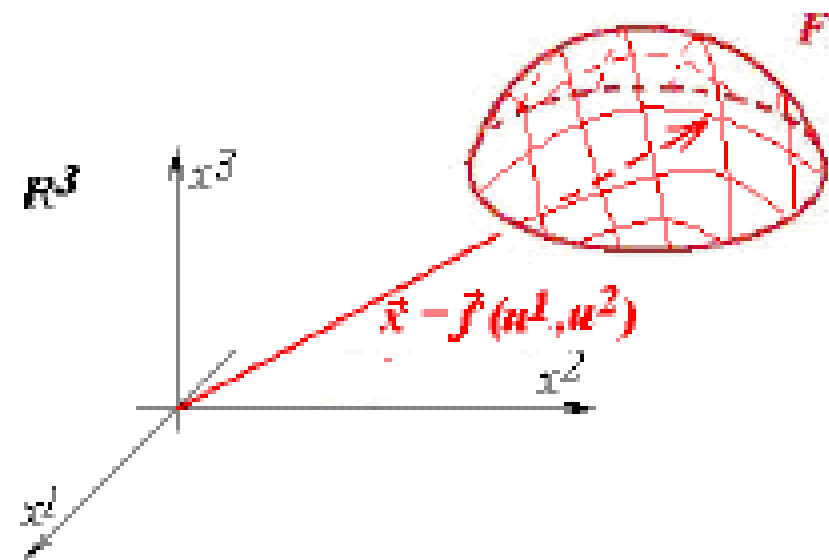
Область D називається областю визначення (областю параметрів) поверхні F .

Величини (u^1, u^2) називають *координатами* на поверхні F .

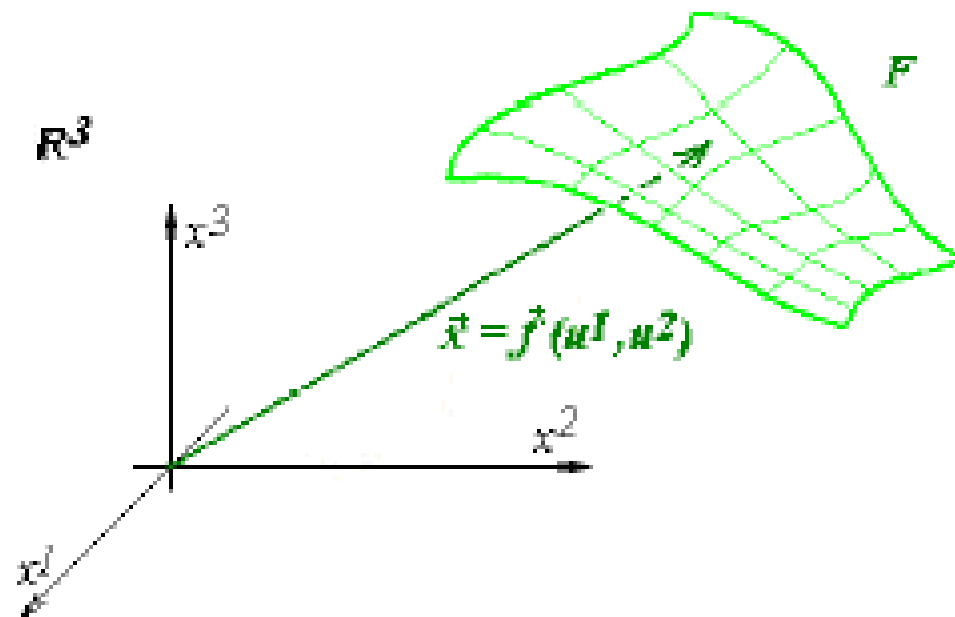
У сукупності говорять про параметризацію поверхні F .



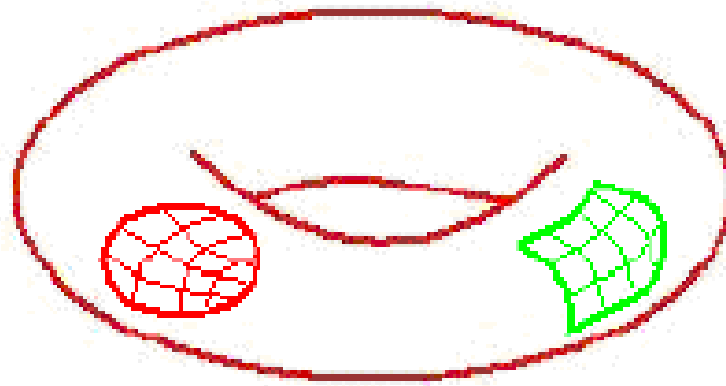
$$\Phi$$



$$\Phi$$

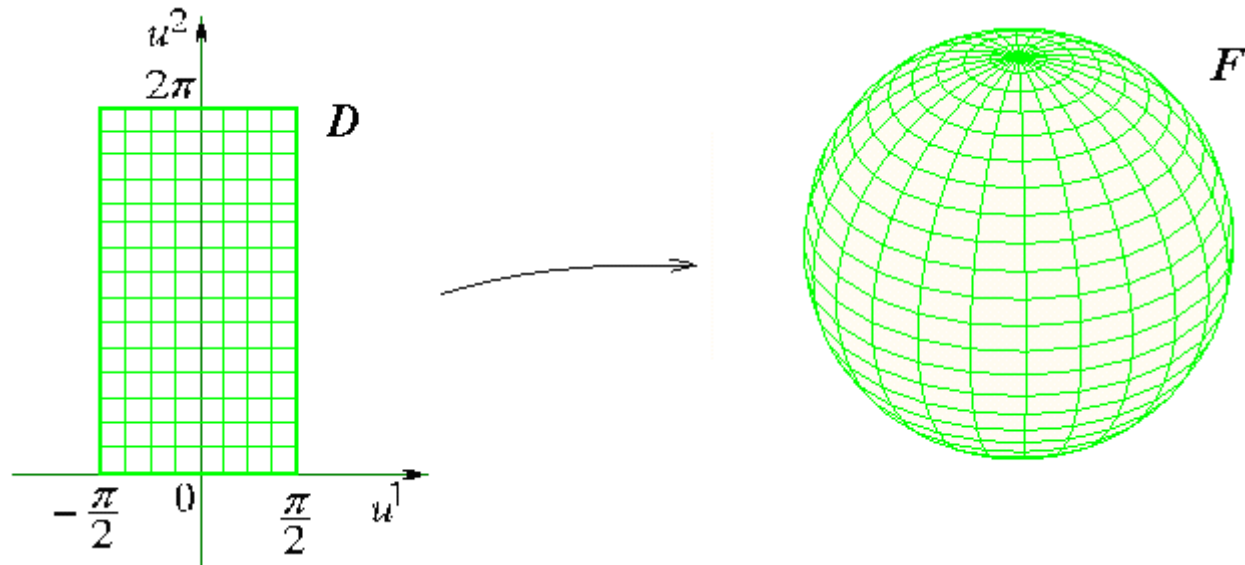


Якщо F – проста або загальна поверхня в $\mathbb{R}^3$, то використовуються ті ж конструкції і поняття, що і для елементарних поверхонь, але – з додаванням терміну *локальний*. Наприклад – *локальні координати*, *локальна параметризація*, *заміна локальних координат* і т.д.



Приклад. Сфера , параметризована «географічними» координатами

$$\begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 + c^1 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2 + c^2, \\ x^3 = r \sin u^1 + c^3 \end{cases}, \quad D: \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{aligned}$$



Координати (u^1, u^2) діють не на всій сфері, а на сфері з видаленими «грінвічським» меридіаном і парою точок-полюсів.

Нехай задано неперервне відображення

$$\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Якщо ввести координати (u^1, u^2) в $D \subset \mathbb{R}^2$ і координати (x^1, x^2, x^3) в $\mathbb{R}^3$, то відображення Φ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) , \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

тобто, у векторній формі

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2).$$

Питання. Чи можна, аналізуючи властивості неперервної вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$, прийти до висновку, що відображення Φ є гомеоморфізмом (локальним гомеоморфізмом) між D та $F = \Phi(D)$ і, таким чином, задає елементарну (просту, загальну) поверхню F в $\mathbb{R}^3$?

Визначення. Образ F відображення $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, представленого вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, називається регулярною параметрично заданою (регулярно параметризованою) поверхнею, якщо виконуються наступні умови:

- 1) вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2) \in C^m$ -гладкою, $m \geq 1$;
- 2) $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ є лінійно незалежними, тобто $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] \neq \vec{0}$

В координатній формі умови *регулярності* мають наступний вигляд:

- 1) координатні функції $f^1(u^1, u^2)$, $f^2(u^1, u^2)$, $f^3(u^1, u^2) \in C^m$ -гладкими, $m \geq 1$;

$$2) \quad \text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1} & \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Приклад. Нехай відображення $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \varphi(u^1, u^2) \end{cases}, \quad \text{тобто,} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1, u^2) \end{pmatrix}.$$

Тоді поверхня F називається *явно заданою* і представляє собою графік функції $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$.

Припустимо, що функція $\varphi(x^1, x^2)$ є неперервно диференційовною. Маємо:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1} & \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Отже, явно задана поверхня F , що представляє собою графік неперервно диференційовної функції, є *регулярною* параметрично заданою поверхнею.

Зауважимо, що з топологічної точки зору, така гладка явно задана поверхня F є елементарною.

Наведений вище приклад наводить на думку, що *регулярні* параметрично задані поверхні мають гарні топологічні властивості.

Твердження. *Нехай відображення $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, представленого вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, задає регулярну параметрично задану поверхню F .*

Для довільної точки p в області визначення D існує окіл U такий, що звуження відображення Φ на окіл U представляє елементарну поверхню.

Схема доведення. Оскільки радіус-вектор $\vec{f}(u^1, u^2)$ поверхні F задовольняє умовам регулярності, маємо

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1} & \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Це означає, що в кожній точці області D хоча б один з мінорів 2×2 виписаної матриці є ненульовим.

Візьмемо довільну точку p в області D . Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що в точці p виконано

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Застосовуючи теорему про обернену функцію з курсу математичного аналізу, можемо для функцій $x^1 = f^1(u^1, u^2)$, $x^2 = f^2(u^1, u^2)$, побудувати (локально, в досить малому околі точки p) обернені функції $u^1 = w^1(x^1, x^2)$, $u^2 = w^2(x^1, x^2)$, що мають той же клас гладкості. Підставляючи в радіус-вектор поверхні F , отримуємо

$$\begin{cases} x^1 = f^1(w^1(x^1, x^2), w^2(x^1, x^2)) = x^1 \\ x^2 = f^2(w^1(x^1, x^2), w^2(x^1, x^2)) = x^2 \\ x^3 = f^3(w^1(x^1, x^2), w^2(x^1, x^2)) = \varphi(x^1, x^2) \end{cases}$$

Тобто, локально поверхня F представляється як явно задана поверхня, графік функції $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$, що є гладкою (як композиція гладких функцій).

А гладка явно задана поверхня є, з топологічної точки зору, елементарною, що і вимагалось довести.

Висновок. В рамках класичної теорії поверхонь основним об'єктом вивчення є саме *регулярні* (параметрично задані) поверхні в $\mathbb{R}^3$.

Кожна така поверхня F представляється радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2),$$

що задовольняє умовам регулярності.

Регулярність поверхні F забезпечує гарні властивості поверхні з топологічної точки зору.

Подальше дослідження геометричних властивостей регулярної поверхні F проводиться в термінах вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$ аналітичними методами математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь і т.д.

3. неявно задані поверхні

Визначення. *Неявно заданою* поверхнею в $\mathbb{R}^3$ називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$\omega(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

де $\omega(x^1, x^2, x^3)$ – деяка функція.

В загальному випадку, навіть для функцій $\omega(x^1, x^2, x^3)$ доволі простого вигляду, відповідні неявно задані поверхні можуть мати дуже складну структуру, що не відповідає ні топологічним поняттям, ні побутовій уяві про те, який зміст вкладається в термін «поверхня». Щоб позбутися цього недоліку, вводиться додаткова вимога до класу функцій, які розглядаються при неявному способі задавання.

Визначення. Неявно задана поверхня F в $\mathbb{R}^3$, представлена рівнянням

$$\omega(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

називається *регулярною* (класу гладкості C^m , $m \geq 1$), якщо функція $\omega(x^1, x^2, x^3)$ задовольняє наступним умовам:

- 1) функція $\omega(x^1, x^2, x^3)$ є гладкою класу C^m ;
- 2) $\nabla \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^1}, \frac{\partial \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial x^3} \right) \neq 0$ в точках, де $\omega(x^1, x^2, x^3) = 0$.

Приклади

1) Алгебраїчні поверхні першого порядку – площини, задаються лінійним рівнянням

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + c = 0.$$

Площина є регулярною неявно заданою поверхнею.

2) Алгебраїчні поверхні другого порядку – еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди і т.д., задаються квадратичним рівнянням

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + c = 0.$$

Не кожна поверхня другого порядку є регулярною як неявно задана.

3) Явно задані поверхні є частковим прикладом неявно заданих поверхонь. Якщо поверхня F задана явно як графік функції $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$, то її можна представити як неявно задану поверхню, представлену рівнянням

$$x^3 - \varphi(x^1, x^2) = 0$$

Якщо $\varphi(x^1, x^2)$ є гладкою, то $\omega(x^1, x^2, x^3) = x^3 - \varphi(x^1, x^2)$ також є гладкою (того ж класу гладкості), при цьому $\nabla \omega = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, 1 \right) \neq 0$.

Отже, гладкі явно задані поверхні є прикладом регулярних неявно заданих поверхонь.

Умова регулярності виділяє неявно задані поверхні з гарними властивостями.

Твердження. *Нехай F – регулярна (класу гладкості C^m , $m \geq 1$,) неявно задана поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для довільної точки P поверхні F існує окіл U в $\mathbb{R}^3$ такий, що $F \cap U$ представляє собою явно задану поверхню (класу гладкості C^m) в $\mathbb{R}^3$.*

Схема доведення. Неявно задана поверхня F в $\mathbb{R}^3$ представлена рівнянням

$$\omega(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

в якому функція $\omega(x^1, x^2, x^3)$ задовольняє умовам регулярності: $\omega(x^1, x^2, x^3)$ є гладкою класу C^m , при цьому $\nabla \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^1}, \frac{\partial \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial x^3} \right) \neq 0$ в точках, де $\omega(x^1, x^2, x^3) = 0$.

Зафіксуємо довільну точку P на поверхні F . Оскільки в цій точці $\nabla \omega \neq 0$, хоча б одна з похідних $\frac{\partial \omega}{\partial x^1}, \frac{\partial \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial x^3}$ є ненульовою. Не зменшуючи загальності,

нехай $\frac{\partial \omega}{\partial x^3} \neq 0$.

Тоді ми можемо застосувати теорему про неявну функцію з курсу математичного аналізу і в досить малому околі точки P в $\mathbb{R}^3$ розв'язати рівняння $\omega(x^1, x^2, x^3)=0$ відносно змінної x^3 , записавши його у вигляді $x^3=\varphi(x^1, x^2)$. При цьому функція $\varphi(x^1, x^2)$ матиме той же клас гладкості, що і $\omega(x^1, x^2, x^3)$.

Як результат, та частина поверхні F , що потрапляє в досить малий окіл точки P в $\mathbb{R}^3$, буде представлятись як гладка явно задана поверхня, що і вимагалось довести.

Наслідок. З топологічної точки зору, регулярна неявно задана поверхня в $\mathbb{R}^3$ є простою.

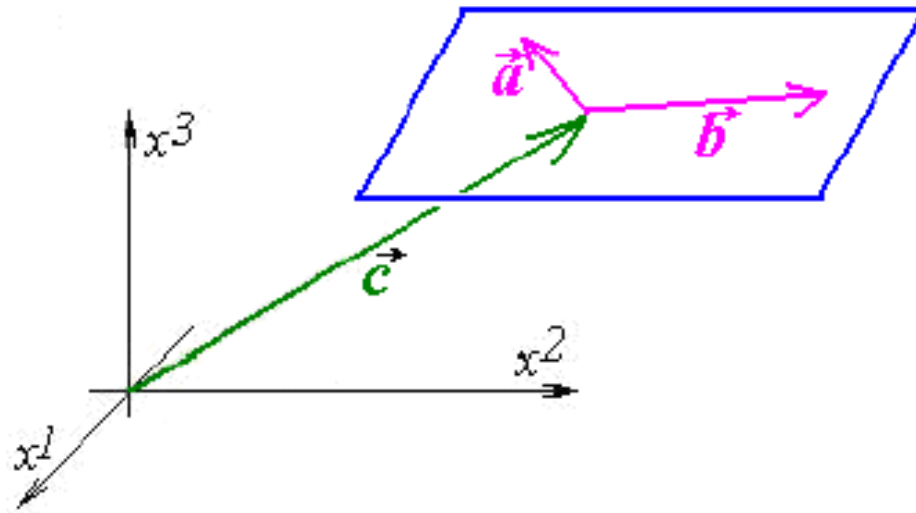
Зауваження. З локальної точки зору, регулярна неявно задана поверхня представляється як явно задана. А явно задані поверхні є частковим випадком регулярних параметрично заданих поверхонь. Тому дослідження геометричних властивостей регулярних неявно заданих поверхонь зводиться (локально) до дослідження регулярних параметрично заданих поверхонь.

4. Конкретні приклади. Спеціальні класи поверхонь.

1. Площина F в $\mathbb{R}^3$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{a}u^1 + \vec{b}u^2 + \vec{c},$$

де $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – базисні вектори у площині, $\vec{c}$ – радіус-вектор якоїсь початкової точки у площині, (u^1, u^2) – координати на площині, область їх визначення $D = \mathbb{R}^2$



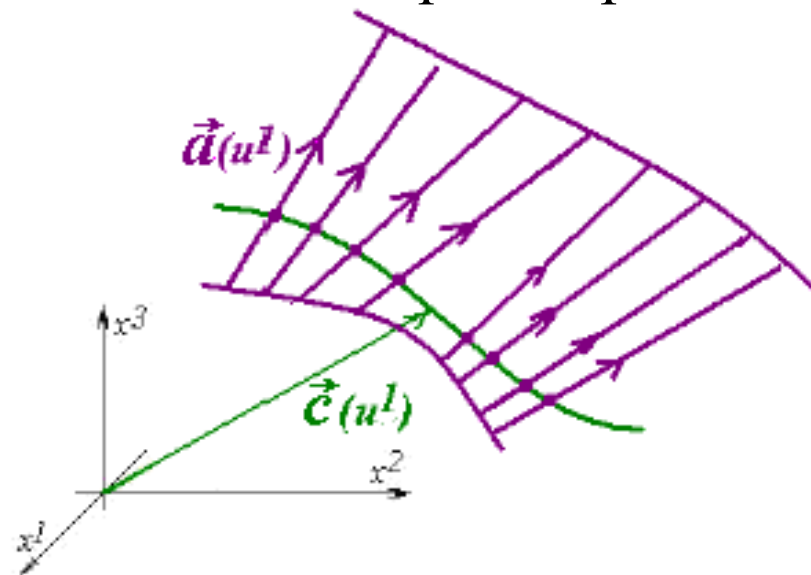
В неявному вигляді площина задається лінійним рівнянням

$$n^1(x^1 - c^1) + n^2(x^2 - c^2) + n^3(x^3 - c^3) = 0$$

2. *Лінійчата* поверхня F в $\mathbb{R}^3$ – це поверхня, утворена однопараметричним сімейством прямих в $\mathbb{R}^3$, вона задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{c}(u^1) + u^2 \vec{a}(u^1),$$

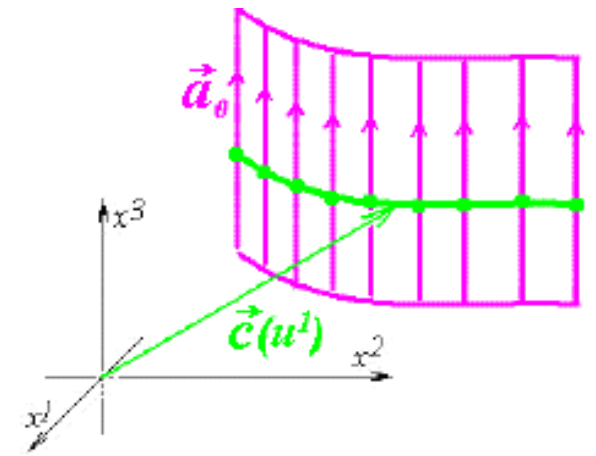
де $\vec{a}(u^1)$ – напрямний вектор твірних прямих, $\vec{c}(u^1)$ – радіус-вектор якимось чином обраних початкових точок на твірних прямих.



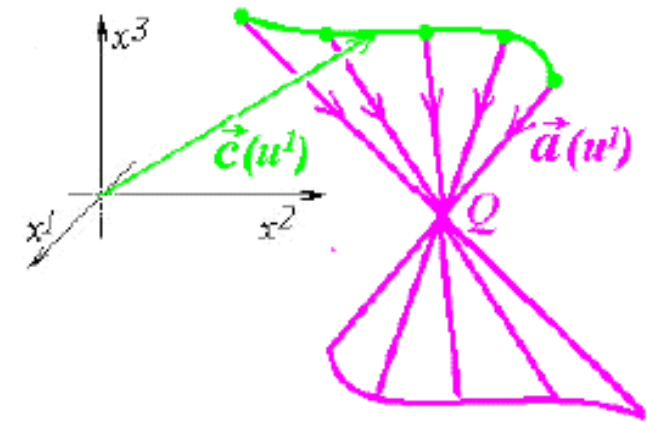
Величина u^1 – параметр в сімействі прямих, кожному значенню відповідає своя твірна пряма. Величина u^2 – координата вздовж кожної твірної прямої. При $u^2=0$ маємо набір початкових точок на прямолінійних твірних, що разом утворюють *базову криву* лінійчатої поверхні.

Питання. Як лінійчата поверхня задається неявно?

Частковий випадок 2.1. Якщо $\vec{a}(u^1) \equiv \vec{a}_0$ – сталий вектор, тобто, усі прямолінійні твірні мають один і той же напрямний вектор (є паралельними), то відповідна лінійчата поверхня називається *циліндричною*.



Частковий випадок 2.2. Якщо усі прямолінійні твірні проходять через одну й ту саму точку Q , то лінійчата поверхня називається *конічною*, а точка Q – її *вершиною*. У випадку, коли точка Q обирається як початкова точка на кожній з прямолінійних твірних, отримуємо $\vec{c}(u^1) \equiv \vec{c}_0$ – радіус-вектор точки Q .



Питання. Як циліндрична або конічна поверхня задаються неявно?

Частковий випадок 2.3. Лінійчата поверхня, утворена дотичними прямими заданої кривої γ , називається *торсовою* поверхнею. В цьому випадку маємо $\vec{a} = \vec{c}'$, де $\vec{x} = \vec{c}(u^1)$ – радіус-вектор базової кривої γ .

3. Поверхня обертання в $\mathbb{R}^3$ – це поверхня, утворена обертанням кривої γ відносно деякої прямої. Якщо система координат в $\mathbb{R}^3$ обрана так, що вісь обертання співпадає з координатною віссю x^3 , а крива γ лежить в координатній площині $x^1 x^2$ і задається параметрично

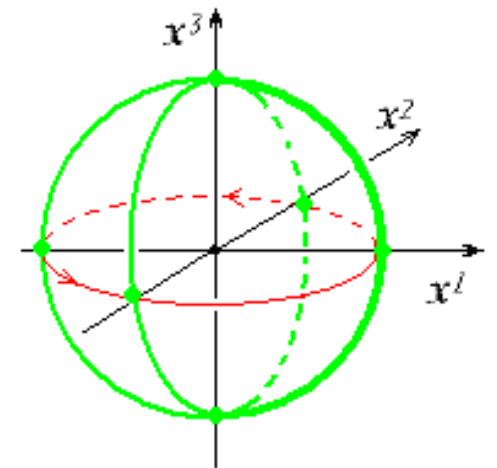
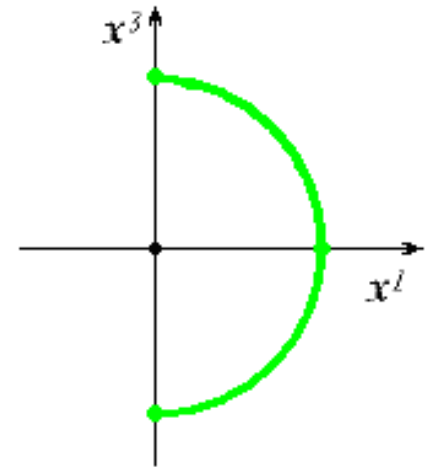
$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^2 = h(t) \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^2 = 0 \\ x^3 = h(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

то відповідна поверхня обертання задається у вигляді

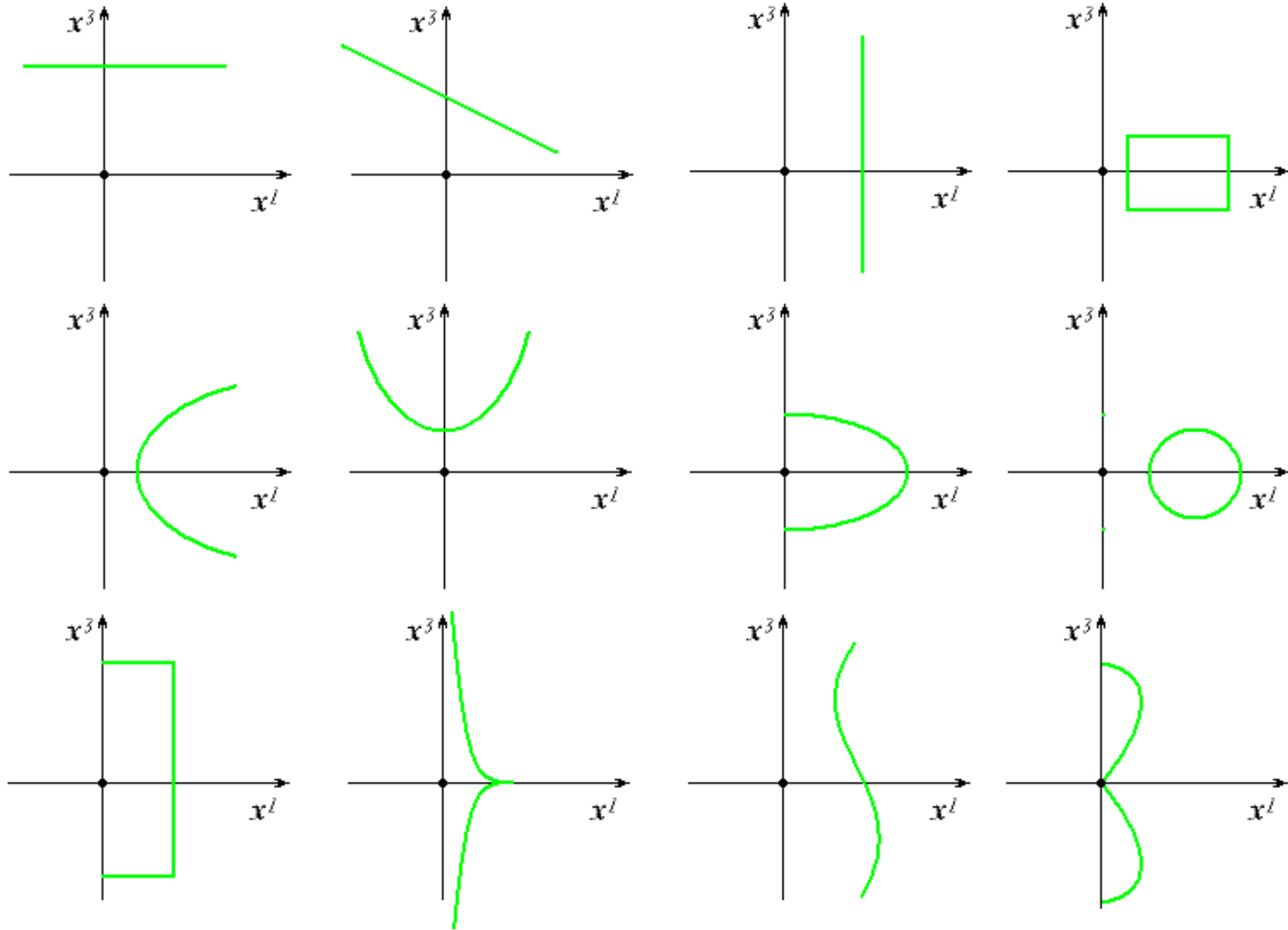
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \cos \varphi \\ x^2 = r(t) \sin \varphi \\ x^3 = h(t) \end{cases}, \quad a < t < b, \quad \alpha < \varphi < \beta.$$



Задача. Зобразити ескіз поверхонь обертання, утворених обертанням зображених кривих навколо вертикальної координатної осі x^3 .



Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

Задача 9.1. Розглянемо площину F , що проходить через точку $P(2,0,1)$ і натягнута на вектори $(1,1,2)$ і $(0,4,0)$.

Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) площини F . Перевірте регулярність параметрично заданої площини F .

Задача 9.2. Розглянемо циліндр F , утворений паралельними прямими, що проходять через точки кривої γ :
$$\begin{cases} x^1 = \cosh t \\ x^2 = t \\ x^3 = 0 \end{cases} \quad \text{і мають спільний напрямний}$$
 вектор $\vec{a} = (1,0,1)$.

Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) циліндра F , перевірте регулярність циліндра.

*Знайдіть криву, по якій циліндр F перетинається з площиною, ортогональною твірним прямим циліндра.

Задача 9.3. Розглянемо конус F , утворений прямими, що проходять через

точку $O(0,0,0)$ і точки кривої γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) конуса F , перевірте регулярність конуса.

*Знайдіть криву, по якій конус F перетинається зі сферою одиничного радіусу з центром в вершині конуса - точці O .

Задача 9.4. Розглянемо торсову поверхню F , утворену дотичними прямими

гвинтової лінії γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) поверхні F , перевірте регулярність цієї поверхні.

Задача 9.5. Проаналізуйте регулярність циліндричної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}$, утвореної прямими з напрямним вектором $\vec{a}$, що проходять через точки кривої γ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

Задача 9.6. Проаналізуйте регулярність конічної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = u^2 \cdot \vec{a}(u^1)$, утвореної прямими, що проходять через точку $O(0,0,0)$ і точки напрямної кривої з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{a}(u^1)$.

Задача 9.7. Проаналізуйте регулярність торсової поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$, утвореної дотичними прямими кривої γ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

Задача 9.8.

- 1) Чи може циліндрична поверхня бути площиною?
- 2) Чи може конічна поверхня бути площиною?
- 3) Чи може торсова поверхня бути площиною?

Задача 9.9. Розглянемо вертикальну пряму $x^1=r>0$ в площині x^1x^3 . Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3 ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 9.10. Розглянемо горизонтальну пряму $x^3=r>0$ в площині x^1x^3 . Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3 ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 9.11. Розглянемо в площині (x^1, x^3) ланцюгову лінію

$$\begin{cases} x^1 = r \cosh t \\ x^3 = rt \end{cases}$$

Яка поверхня в $\mathbb{R}^3$ утворюється обертанням цієї лінії навколо осі x^3 ?

Ця поверхня називається *катеноїд*.

Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 9.12. Розглянемо в площині (x^1, x^3) трактрису

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cosh t} \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}.$$

Яка поверхня в $\mathbb{R}^3$ утворюється обертанням цієї лінії навколо осі x^3 ?

Ця поверхня називається *псевдосфера*.

Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 9.12. Розглянемо поверхню в $\mathbb{R}^3$, утворену обертанням кривої γ

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^2 = 0 \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

навколо осі x^3 . Запишіть радіус-вектор цієї поверхні, перевірте її регулярність та зробіть висновок про те, коли на поверхні обертання можуть виникнути особливі точки (де порушується умова регулярності).

Задача 9.13. Проаналізуйте регулярність наступних неявно заданих поверхонь та, якщо є, вкажіть особливі (сингулярні) точки, де порушуються умови регулярності:

1) площина: $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0$

2) еліпсоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 = 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

3) гіперболоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 = \pm 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

4) параболоїд: $x^3 = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2, \quad a_1 > 0, a_2 > 0$

5) лінійчата поверхня: $\Phi\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0$

6) циліндрична поверхня: $\Phi(x^1, x^2) = 0$

7) поверхня обертання: $\Phi(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3) = 0$

8) кубічна поверхня: $x^1 x^2 x^3 = a_0$