

Рівняння Кодацці

Тепер випишемо нормальну компоненту $\bar{R}(X, Y)Z$, проєктуючи його ортогонально на $N_p M$ у кожній точці $p \in M$:

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= \nabla_X^\perp B(Y, Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) + \\ &+ B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) - B([X, Y], Z) = \\ &= \left(\nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \right) - \\ &- \left(\nabla_Y^\perp B(X, Z) - B(\nabla_Y X, Z) - B(X, \nabla_Y Z) \right).\end{aligned}$$

Тут використали відсутність скрута: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

def. Коваріантною похідною другої ф.ф. B у напрямку поля $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ зветься відображення $\nabla_X^\perp B$ з $\mathcal{X}^{k-1}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M)$ у $(k-3)$ -гладкі нормальні поля на M , що визначене рівністю

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) := \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

Rem. Це аналог коваріантного диференціювання (скалярних) форм.

Pr. $X, Y, Z \mapsto (\nabla_X^\perp B)(Y, Z)$ – симетричне за Y, Z і 3-лінійне відносно додавання і множення на функції (зокрема, $\nabla_X^\perp B$ має ті ж властивості, що B).

► Симетричність та лінійність відносно додавання очевидно випливають із властивостей B , ∇ і $\nabla^\perp$, як

і лінійність відносно множення X на функції. Для Y :

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp B)(fY, Z) &= \nabla_X^\perp(fB(Y, Z)) - B(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z) - \\ &- B(fY, \nabla_X Z) = f \left(\nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \right) + \\ &+ X(f)B(Y, Z) - X(f)B(Y, Z) = f(\nabla_X^\perp B)(Y, Z). \end{aligned}$$

Аналогічно (або впливає з симетрії) і для Z . ◀

Rem. Така похідна визначена і задовольняє Pr. не лише для B , але й для будь-якої "форми зі значеннями у нормальних полях", що має ті ж властивості.

Cor. (Рівняння Кодацці) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z).$$

Rem. Для гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ маємо $B = b\xi$, тому

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp (b(Y, Z)\xi) - b(\nabla_X Y, Z)\xi - b(Y, \nabla_X Z)\xi = \\ &= (X(b(Y, Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z))\xi + b(Y, Z)\nabla_X^\perp \xi. \end{aligned}$$

Оскільки $\nabla_X^\perp \xi = 0$ (див. вище), це дорівнює добутку $(\nabla_X b)(Y, Z)\xi$, де $\nabla_X b$ – "звичайна" коваріантна похідна форми. Домножаючи на ξ рівняння Кодацці, тоді отримаємо:

Cor. (Рівняння Кодацці для гіперповерхні) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на гіперповерхні M з одиничним нормальним полем ξ

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) = (\nabla_X b)(Y, Z) - (\nabla_Y b)(X, Z).$$

Rem. Якщо $(\overline{M}, \overline{g})$ має постійну секційну кривину c , то, як ми бачили,

$$\overline{R}(X, Y)Z = c(g(Y, Z)dr(X) - g(X, Z)dr(Y))$$

є дотичним полем, тобто його нормальна проєкція нульова.

Cor. (Рівняння Кодацці для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp B)(X, Z).$$

Рівняння Річчі

Аналогічно до $\bar{R}(X, Y)Z$ для $(k - 1)$ -гладких полів X, Y і $(k - 1)$ -гладкого нормального поля ξ на M (тут – не обов'язково одиничного) визначимо

$$\bar{R}(X, Y)\xi: p \in M \mapsto \bar{R}_{r(p)}(d_{pr}(X_p), d_{pr}(Y_p))\xi_p \in T_{r(p)}\bar{M}.$$

Це $((k - 3)$ -гладке) поле на M зі значеннями у $T\bar{M}$. З міркувань, аналогічних до доведення рівняння Гаусса, отримуємо, що

$$\bar{R}(X, Y)\xi = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi - \bar{\nabla}_{[X, Y]}\xi,$$

де ми знову використовуємо "узагальнені" на довільні поля на M зі значеннями у $T\bar{M}$ $\bar{\nabla}_X$ і $\bar{\nabla}_Y$. Знову ж,

аналогічно до міркувань вище, з розкладень Вейнгартена і Гаусса маємо

$$\bar{\nabla}_Y \xi = -dr(A_\xi Y) + \nabla_Y^\perp \xi,$$

й тому

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi &= -dr(\nabla_X(A_\xi Y)) - B(X, A_\xi Y) - \\ &\quad -dr\left(A_{\nabla_Y^\perp \xi} X\right) + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi. \end{aligned}$$

Переставимо X та Y :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi &= -dr(\nabla_Y(A_\xi X)) - B(Y, A_\xi X) - \\ &\quad -dr\left(A_{\nabla_X^\perp \xi} Y\right) + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi. \end{aligned}$$

Крім того, з розкладення Вейнгартена:

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]} \xi = -dr(A_\xi [X, Y]) + \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi.$$

Комбінуючи ці вирази, отримуємо $\bar{R}(X, Y)\xi$.

Впр. Дотична компонента $\bar{R}(X, Y)\xi$ збігається з виразом, що можна отримати з рівняння Кодацці і симетрії $\bar{R}$:

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)\xi, dr(Z)) = -\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi).$$

Проектуємо на нормальні простори:

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp &= -B(X, A_\xi Y) + B(Y, A_\xi X) + \\ &+ \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi. \end{aligned}$$

def. Оператором кривини нормальної зв'язності $\nabla^\perp$ зветься відображення (гладких) полів

$$R^\perp: X, Y, \xi \mapsto R^\perp(X, Y)\xi := \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

Впр. $R^\perp$ має властивості аналогічні до R (або $\overline{R}$): 3-лінійність за всіма аргументами відносно додавання і множення на функції (зокрема, це означає визначеність $R_p^\perp$ у кожній $p \in M$), а також симетрії

$$R^\perp(X, Y)\xi = -R^\perp(Y, X)\xi,$$

$$\overline{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = -\overline{g}(R^\perp(X, Y)\eta, \xi)$$

для будь-яких полів X, Y і нормальних полів ξ, η на M .

Домножимо тепер праву частину $(\overline{R}(X, Y)\xi)^\perp$ на довільне нормальне (теж не обов'язково одиничне) поле η . В силу зв'язку між A і B , перші два доданки дають

$$-\overline{g}(B(X, A_\xi Y), \eta) + \overline{g}(B(Y, A_\xi X), \eta) =$$

$$= -g(A_\eta X, A_\xi Y) + g(A_\eta Y, A_\xi X),$$

що, в силу "самоспряженості" A_ξ і A_η , дорівнює

$$-g(A_\xi A_\eta X, Y) + g(Y, A_\eta A_\xi X) = -g((A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi)X, Y).$$

Далі позначаємо $[A_\xi, A_\eta] := A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$ – "операторний коммутатор".

Cor. (Рівняння Річчі) Для будь-яких гладких полів X, Y і гладких нормальних полів ξ, η на M

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)\xi, \eta) = -g([A_\xi, A_\eta]X, Y) + \bar{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \eta).$$

Rem. Для гіперповерхонь нормальні простори одновимірні, тому локально в околі кожної точки M завжди $\xi = f\eta$ або $\eta = f\xi$ для деякої функції f . В силу

властивостей лінійності, симетрій $\bar{R}$, $R^\perp$ (з Впр. вище) і кососиметричності $[A_\xi, A_\eta]$ за ξ, η , зліва і справа маємо нулі:

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)\xi, \xi) = \bar{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \xi) = g([A_\xi, A_\xi]X, Y) = 0.$$

Rem. Для $(\bar{M}, \bar{g})$ постійної секційної кривини c аналогічно до міркувань вище маємо

$$\bar{R}(X, Y)\xi = c(\bar{g}(dr(Y), \xi)dr(X) - \bar{g}(dr(X), \xi)dr(Y)) = 0.$$

Cor. (Рівняння Річчі для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y і гладких нормальних полів ξ, η на M

$$\bar{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = g([A_\xi, A_\eta]X, Y).$$

Існування і єдиність занурень

Наступна теорема узагальнює теорему Бонне з теорії поверхонь і демонструє значення рівнянь Гаусса і Кодацці. Через $\overline{M}_c^m$ тут і далі будемо позначати стандартний m -вимірний простір постійної секційної кривини c : евклідовий простір E^m для $c = 0$, сферу $S_{\frac{1}{\sqrt{c}}}^m$ (з індукованою з E^{m+1} метрикою) для $c > 0$ та гіперболічний простір (в моделі Пуанкаре)

$$H_c^m := \left(\mathbb{R}_+^m, -\frac{1}{c(x^m)^2} \sum_{i=1}^m (dx^i)^2 \right)$$

для $c < 0$, де $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m > 0\}$.

Th. (Основна теорема теорії гіперповерхонь у просторах постійної кривини)

1. Існування. Нехай M – однозв'язний n -вимірний гладкий многовид, g – ріманова метрика на M , а b – симетрична 2-форма на ньому. Нехай ці форми задовольняють рівняння Гаусса і Кодацці для гіперповерхні у $\overline{M}_c^{n+1}$:

$$c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) = g(R(X, Y)Z, W) - \\ - (b(X, W)b(Y, Z) - b(X, Z)b(Y, W)),$$

$$(\nabla_X b)(Y, Z) = (\nabla_Y b)(X, Z)$$

(для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M), де ∇ і R – ріманова зв'язність і тензор кривини g відповідно. Тоді існує занурення $r: M \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ таке, що g і b – його перша і друга (відносно деякого глобального одиничного нормального поля) фундаментальні форми відповідно.

2. Єдиність. Нехай M – зв'язний n -вимірний орієнтовний гладкий многовид, $r, \tilde{r}: M \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ – його занурення з першими і другими ф.ф. $g, \tilde{g}$ і $b, \tilde{b}$ відповідно. Нехай $g = \tilde{g}$ і $b = \tilde{b}$ або $b = -\tilde{b}$ (тотожно). Тоді існує ізометрія $F: \overline{M}_c^{n+1} \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ така, що $\tilde{r} = F \circ r$.

► Див., наприклад, Dajczer – Tojeiro. ◀

Rem. Тут можна вважати многовиди і занурення k -гладкими, де $k \geq 3$, g – $(k-1)$ -гладкою, b – $(k-2)$ -гладкою. Умова орієнтовності в другій частині несуттєва і потрібна лише для коректної визначеності глобальних скалярних других ф.ф. відносно деяких глобальних одиничних нормальних полів (інакше доведеться говорити про "форми, визначені з точністю до знака" або вводити векторне розшарування

ранга 1, що перетвориться на нормальне при зануренні). У першій частині вона не згадується, бо впливає з однозв'язності.

Rem. Справедливою є також версія цієї теореми для довільної ковимірності (у $\overline{M}_c^{n+q}$), що включає вже нормальну зв'язність і рівняння Річчі, див. формулювання і доведення там же.

Існують також теореми єдиності, що включають лише першу ф.ф., наприклад, теорема Кон-Фоссена для опуклих (див. далі) поверхонь у E^3 та її узагальнення Погорєловим на негладкі поверхні. Вони ще зветься "теоремами про жорсткість": підмноговид не можна нетривіально ізометрично "згинати", лише рухати у просторі, до якого він занурений.

Основні рівняння у локальних координатах

Використовуємо всі ті ж локальні позначення і домовленості, що й вище. Тензори (поля) R і $\bar{R}$ локально задаються розкладами

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) \frac{\partial}{\partial u^i} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial u^l}, \quad \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^c}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} = \bar{R}_{abc}^d \frac{\partial}{\partial x^d}$$

для $i, j, k = \overline{1, n}$, $a, b, c = \overline{1, n+q}$ відповідно з функціональними коефіцієнтами. Згадаємо, що тензор Рімана – це 4-форма, що визначена як $R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$ (аналогічно для $\bar{R}$) і має локальні коефіцієнти

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \\ &= g\left(R_{jkl}^m \frac{\partial}{\partial u^m}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = g_{im} R_{jkl}^m \end{aligned}$$

для $i, j, k, l = \overline{1, n}$. І аналогічно

$$\bar{R}_{abcd} = \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \bar{g}_{ae} \bar{R}_{bcd}^e$$

для $a, b, c, d = \overline{1, n+q}$.

Запишемо рівняння Гаусса для $X = \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^l}$, $Z = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $W = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $i, j, k, l = \overline{1, n}$. Зліва маємо (згадуючи, що $dr \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = r_i = r_i^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, де $r_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}$):

$$\begin{aligned} & \bar{R} \left(dr \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right), dr \left(\frac{\partial}{\partial u^l} \right), dr \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right), dr \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) = \\ & = r_i^a r_j^b r_k^c r_l^d \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = r_i^a r_j^b r_k^c r_l^d \bar{R}_{abcd}. \end{aligned}$$

У правій частині перший доданок дорівнює, очеви-

дно, R_{ijkl} . Для другого:

$$\begin{aligned} \bar{g} \left(B \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right), B \left(\frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \right) = \\ = \bar{g} \left(b_{ki}^\alpha \xi_\alpha, b_{lj}^\beta \xi_\beta \right) = \sum_{\alpha=1}^q b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha \end{aligned}$$

в силу ортонормованості базиса нормальних полів.
І аналогічно для третього.

Cor. (Локальний запис рівнянь Гаусса) Для будь-яких $i, j, k, l = \overline{1, n}$

$$r_i^a r_j^b r_k^c r_l^d \bar{R}_{abcd} = R_{ijkl} - \sum_{\alpha=1}^q \left(b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha - b_{il}^\alpha b_{jk}^\alpha \right).$$

Rem. Рівняння для загальних полів можна вивести з цих за лінійністю.

Rem. Для гіперповерхні справа буде вираз з коефіцієнтами скалярної другої ф.ф. $R_{ijkl} - (b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk})$.

Rem. Для $(\overline{M}, \overline{g})$ постійної секційної кривини c зліва буде $c(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$ (з формул вище).

Rem. Згадаємо локальну формулу для секційної кривини у напрямку площини σ , що натягнута на $v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ і $w = w^i \frac{\partial}{\partial u^i}$:

$$K_{int}(\sigma) = \frac{R_{ijkl} v^i w^j v^k w^l}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) v^i w^j v^k w^l}.$$

Для зовнішньої кривини з виведення локального запису рівняння Гаусса маємо:

$$K_{ext}(\sigma) = \frac{\sum_{\alpha} (b_{ik}^{\alpha} b_{jl}^{\alpha} - b_{il}^{\alpha} b_{jk}^{\alpha}) v^i w^j v^k w^l}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) v^i w^j v^k w^l}.$$

Рем. Для гіперповерхні у E^{n+1} маємо звичні рівняння Гаусса:

$$R_{ijkl} = b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}.$$

Зокрема, при $n = 2$ єдиним нетривіальним (з точністю до симетрій) буде

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12}^2,$$

звідки, записуючи формулу секційної кривини для $v = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $w = \frac{\partial}{\partial u^2}$, отримуємо вираз для гауссової

(єдиної секційної і єдиної зовнішньої у кожній точці) кривини

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Тепер запишемо рівняння Кодацці для $X = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Z = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $i, j, k = \overline{1, n}$. Домножимо також обидві частини на локальне базисне нормальне поле $\xi_\alpha = \xi_\alpha^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, $\alpha = \overline{1, q}$. Аналогічно до рівнянь Гаусса, зліва маємо

$$\begin{aligned} & \bar{g} \left(\bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}, \xi_\alpha \right) = \\ & = \bar{R} \left(dr \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right), dr \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right), dr \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right), \xi_\alpha \right) = \xi_\alpha^a r_i^b r_j^c r_k^d \bar{R}_{abcd}. \end{aligned}$$

Для виразів справа за означенням маємо

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}^\perp B \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}^\perp \left(B \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) - \\
& - B \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - B \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \\
& = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}^\perp \left(b_{ki}^\beta \xi_\beta \right) - B \left(\Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - B \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \Gamma_{ji}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \\
& = \frac{\partial b_{ki}^\beta}{\partial u^j} \xi_\beta + b_{ki}^\beta \sum_{\gamma=1}^q \mu_{\beta\gamma|j} \xi_\gamma - \Gamma_{jk}^l b_{li}^\beta \xi_\beta - \Gamma_{ji}^l b_{kl}^\beta \xi_\beta.
\end{aligned}$$

Домножаючи на ξ_α , в силу ортонормованості отримаємо

$$\left(\frac{\partial b_{ik}^\alpha}{\partial u^j} - \Gamma_{jk}^l b_{il}^\alpha - \Gamma_{ij}^l b_{kl}^\alpha \right) + b_{ik}^\beta \mu_{\beta\alpha|j}.$$

Суму перших трьох виразів тут зазвичай позначають через $b_{ik,j}^\alpha$ (коваріантна похідна b_{ik}^α за u^j).

Cor. (Локальний запис рівнянь Кодацці) Для будь-яких $i, j, k = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, q}$

$$\xi_\alpha^a r_i^b r_j^c r_k^d \overline{R}_{abcd} = b_{ik,j}^\alpha - b_{ij,k}^\alpha + b_{ik}^\beta \mu_{\beta\alpha|j} - b_{ij}^\beta \mu_{\beta\alpha|k}.$$

Rem. Знову ж, рівняння для загальних полів можна отримати з цих. Для гіперповерхні справа залишається лише вираз $b_{ik,j} - b_{ij,k}$ з коваріантних похідних коефіцієнтів скалярної другої ф.ф., частина з коефіцієнтами скрута зникає. Для підмноговида у многовиді постійної секційної кривини зліва буде 0. Комбінуючи ці дві умови, отримуємо класичні рівняння Кодацці

$$b_{ik,j} = b_{ij,k}.$$

Нарешті запишемо рівняння Річчі для $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $\xi = \xi_\beta$, $\eta = \xi_\alpha$, $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta = \overline{1, q}$. Аналогічно до рівнянь Кодацці, зліва маємо

$$\bar{g} \left(\bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \xi_\beta, \xi_\alpha \right) = \xi_\alpha^a \xi_\beta^b r_i^c r_j^d \bar{R}_{abcd}.$$

Задамо $R^\perp$ локально розкладенням

$$R^\perp \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \xi_\beta = (R^\perp)_{\beta ij}^\alpha \xi_\alpha.$$

Впр. Аналогічно до формули для локальних коефіцієнтів тензора кривини перевірити, що

$$(R^\perp)_{\beta ij}^\alpha = \frac{\mu_{\beta\alpha|j}}{\partial u^i} - \frac{\mu_{\beta\alpha|i}}{\partial u^j} + \sum_{\gamma=1}^q \left(\mu_{\beta\gamma|j} \mu_{\gamma\alpha|i} - \mu_{\beta\gamma|i} \mu_{\gamma\alpha|j} \right)$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta = \overline{1, q}$. Зокрема, цей вираз кососиметричний за парами i, j і α, β .

Виписуючи локальний вираз розкладення Вейнгартена, ми встановили, що

$$A_{\xi_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = b_{ik}^\alpha g^{kl} \frac{\partial}{\partial u^l},$$

звідки маємо

$$A_{\xi_\beta} \left(A_{\xi_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) = b_{ik}^\alpha g^{kl} A_{\xi_\beta} \left(\frac{\partial}{\partial u^l} \right) = b_{ik}^\alpha g^{kl} b_{lm}^\beta g^{ms} \frac{\partial}{\partial u^s}$$

для будь-яких α, β, i . Міняючи тут α і β місцями, отримаємо вираз для комутатора:

$$[A_{\xi_\beta}, A_{\xi_\alpha}] \frac{\partial}{\partial u^i} = (b_{ik}^\alpha b_{lm}^\beta - b_{ik}^\beta b_{lm}^\alpha) g^{kl} g^{ms} \frac{\partial}{\partial u^s}.$$

Тому в правій частині рівняння Річчі маємо

$$\begin{aligned} g \left([A_{\xi\beta}, A_{\xi\alpha}] \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) &= (b_{ik}^\alpha b_{lm}^\beta - b_{ik}^\beta b_{lm}^\alpha) g^{kl} g^{ms} g_{sj} = \\ &= (b_{ik}^\alpha b_{lm}^\beta - b_{ik}^\beta b_{lm}^\alpha) g^{kl} \delta_j^m = (b_{ik}^\alpha b_{lj}^\beta - b_{ik}^\beta b_{lj}^\alpha) g^{kl}. \end{aligned}$$

Cor. (Локальний запис рівнянь Річчі) Для будь-яких $i, j = \overline{1, n}, \alpha, \beta = \overline{1, q}$

$$\xi_\alpha^a \xi_\beta^b r_i^c r_j^d \overline{R}_{abcd} = -g^{kl} (b_{ik}^\alpha b_{jl}^\beta - b_{ik}^\beta b_{jl}^\alpha) + (R^\perp)_{\beta ij}^\alpha.$$

Rem. І знову випадок загальних полів можна отримати з цього. Для гіперповерхні обидві частини нульові. Для підмноговида у многовиді постійної секційної кривини зліва 0, і отримуємо формулу для $(R^\perp)_{\beta ij}^\alpha$ у термінах другої ф.ф.

Цілком геодезичні підмноговиди

Розглянемо гладкий рімановий многовид (M, g) з рімановою зв'язністю ∇ . Тут і далі вважаємо, що гладкість та, що необхідна для конкретної задачі.

Згадаємо, що регулярна (гладка) крива $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ є геодезичною (M, g) , якщо для її натуральної параметризації (тобто такої, що $g(\gamma', \gamma') = 1$, але достатньо, щоб це була константа) $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$. Тут, щоб знайти $\nabla_{\gamma'} \gamma'(s_0)$ для $s_0 \in (\alpha, \beta)$, треба продовжити γ' на деяку відкриту $U \ni \gamma(s_0)$ полем X (тобто для будь-якого $s \in \gamma^{-1}(U)$ $\gamma'(s) = X_{\gamma(s)}$), і тоді $\nabla_{\gamma'} \gamma'(s_0) := (\nabla_X X)_{\gamma(s_0)}$ (як у конструкції лівої частини розкладень Гаусса і Вейнгартена, і аналогічно доводиться незалежність від продовження; насправді

це окремий випадок тієї конструкції). У цій побудові параметр вже не обов'язково є натуральним.

Нагадаємо також, що для будь-якої $p \in M$ і для будь-якого $v \in T_p M$ існує і єдина геодезична $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ для деякого $\varepsilon > 0$ така, що $\gamma(0) = p$ і $\gamma'(0) = v$ (тобто випущена з p у напрямку v). Єдиність тут більш точно означає, що для будь-яких двох геодезичних $\gamma, \mu: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ якщо існує $t_0 \in (\alpha, \beta)$ таке, що $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$ і $\gamma'(t_0) = \mu'(t_0)$, то $\gamma = \mu$ тотожно. Зауважимо, що постійні криві $\gamma = p$, що випущені у напрямку $v = 0$, теж вважають геодезичними.

Нехай тепер (M, r) – підмноговид у рімановому многовиді $(\overline{M}, \overline{g})$ з першою ф.ф. g , усі інші пов'язані об'єкти теж позначаємо як раніше.

Pr. (Розкладення Гаусса для кривої) Для будь-якої гладкої кривої $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ маємо у кожній точці кривої ортогональне розкладення на дотичну і нормальну компоненти:

$$\overline{\nabla}_{(r \circ \gamma)'} (r \circ \gamma)' = dr(\nabla_{\gamma'} \gamma') + B(\gamma', \gamma').$$

Rem. Тобто це рівність полів уздовж кривої $r \circ \gamma$ (або уздовж γ зі значеннями у $T\overline{M}$). Їх можна визначити як гладкі відображення $\zeta: (\alpha, \beta) \rightarrow T\overline{M}$ такі, що для усіх $t \in (\alpha, \beta)$ $\zeta(t) \in T_{(r \circ \gamma)(t)} \overline{M}$. Зокрема, справа

$$dr(\nabla_{\gamma'} \gamma')(t) := d_{\gamma(t)} r \left(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t) \right) \in d_{\gamma(t)} r(T_{\gamma(t)} M) \subset T_{(r \circ \gamma)(t)} \overline{M}$$

i

$$B(\gamma', \gamma')(t) := B_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \in N_{\gamma(t)} M \subset T_{(r \circ \gamma)(t)} \overline{M}.$$

► Продовжимо γ' полем X на окіл $U \ni \gamma(t_0)$ як вище. У свою чергу, продовжимо $dr(X)$ на окіл $V \ni r(\gamma(t_0))$ полем $\bar{X}$ (де вважаємо $U \subset r^{-1}(V)$, за необхідності зменшивши околи). Тоді для всіх $t \in \gamma^{-1}(U)$

$$\bar{X}_{r(\gamma(t))} = d_{\gamma(t)}r(X_{\gamma(t)}) = d_{\gamma(t)}r(\gamma'(t)) = (r \circ \gamma)'(t)$$

за означенням диференціала, тобто $\bar{X}$ продовжує $(r \circ \gamma)'$. Запишемо розкладення Гаусса:

$$\bar{\nabla}_X X = dr(\nabla_X X) + B(X, X).$$

Для будь-якого $t \in \gamma^{-1}(U)$ тоді за означеннями зліва маємо у $\gamma(t)$

$$(\bar{\nabla}_X X)_{\gamma(t)} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X})_{r(\gamma(t))} = \bar{\nabla}_{(r \circ \gamma)'} (r \circ \gamma)'(t),$$

а справа –

$$d_{\gamma(t)}r \left((\nabla_X X)_{\gamma(t)} \right) + B(X, X)_{\gamma(t)} =$$

$$= d_{\gamma(t)}r \left(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t) \right) + B_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)),$$

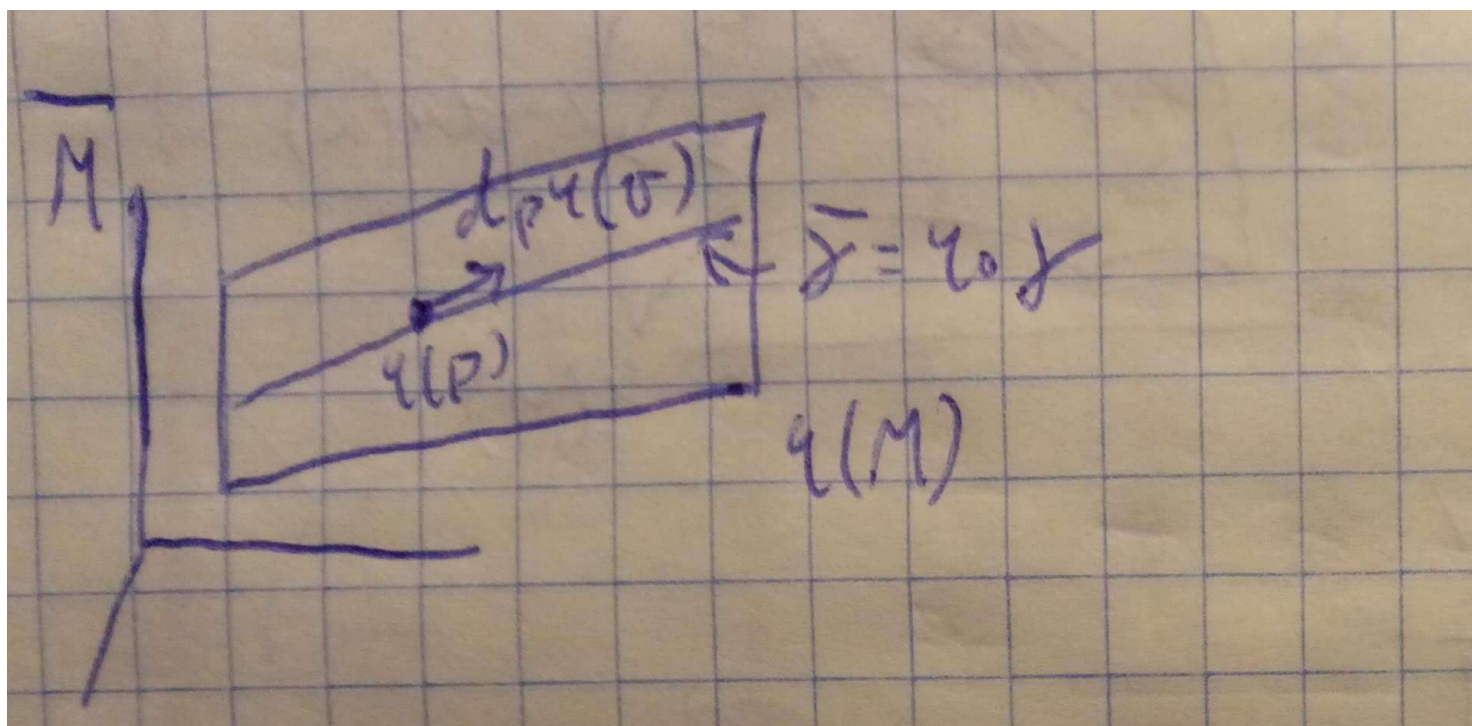
тобто якраз праву частину потрібної формули у t . ◀

Cor. Якщо $r \circ \gamma$ – геодезична $(\overline{M}, \overline{g})$, то γ – геодезична (M, g) .

► Натурально параметризуємо γ (вона регулярна, якщо $r \circ \gamma$ регулярна). Тоді за означеннями диференціала та першої ф.ф.

$$\overline{g}((r \circ \gamma)', (r \circ \gamma)') = \overline{g}(dr(\gamma'), dr(\gamma')) = g(\gamma', \gamma') = 1,$$

тобто $r \circ \gamma$ теж натурально параметризована. Оскільки зліва у розкладенні Гаусса маємо $\overline{\nabla}_{(r \circ \gamma)'} (r \circ \gamma)' = 0$, то й справа обидві компоненти нульові, зокрема, $dr(\nabla_{\gamma'} \gamma') = 0$, а тоді й $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, бо r – занурення. ◀



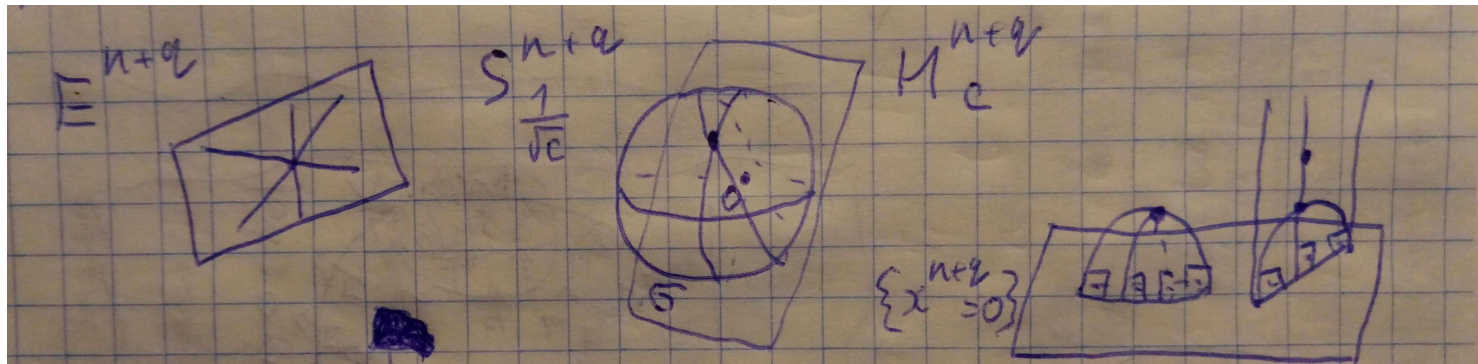
def. Підмноговид (M, r) у рімановому $(\bar{M}, \bar{g})$ називається цілком геодезичним, якщо для будь-яких $p \in M$ і $v \in T_p M$ будь-яка геодезична $\bar{\gamma}$ многовида $(\bar{M}, \bar{g})$, що випущена з $r(p)$ у напрямку $dr_p(v)$, лежить у $r(M)$, тобто існує крива γ в M така, що $\bar{\gamma} = r \circ \gamma$.

Rem. При цьому γ – геодезична в (M, g) з Cor. Іншими словами, цілком геодезичні підмноговиди "складаються" з геодезичних $(\overline{M}, \overline{g})$, що у них також є геодезичними. Зокрема, ми можемо побудувати приклади цілком геодезичних підмноговидів у стандартних просторах постійної кривини c , бо маємо опис усіх геодезичних таких просторів.

Ex.1. У $\overline{M}_0^{n+q} = E^{n+q}$ геодезичні – проміжки прямих, тому афінні підпростори (а також їхні відкриті підмножини) цілком геодезичні.

2. При $c > 0$ геодезичні $\overline{M}_c^{n+q} = S_{\frac{1}{\sqrt{c}}}^{n+q}$ (стандартної гіперсфери радіуса $\frac{1}{\sqrt{c}}$ у $\mathbb{R}^{n+q+1}$) – проміжки великих

кіл (тобто перетинів $S_{\frac{1}{\sqrt{c}}}^{n+q} \cap \sigma$, де σ – площина $\mathbb{R}^{n+q+1}$, що проходить через 0). Тому відкриті підмножини великих сфер (перетинів $S_{\frac{1}{\sqrt{c}}}^{n+q} \cap \sigma$, де σ – підпростір $\mathbb{R}^{n+q+1}$, що проходить через 0) цілком геодезичні.



3. При $c < 0$ геодезичні $\overline{M}_c^{n+q} = H_c^{n+q}$ (гіперболічно-го простору у моделі Пуанкаре) – проміжки напівкіл і напівпрямих у $\mathbb{R}_+^{n+q}$, що ортогональні до абсолюта

(гіперплощини $\{x^{n+q} = 0\}$), тому відкриті підмножини напівсфер і напівпросторів, що ортогональні до абсолюта, – цілком геодезичні.

4. Одновимірні цілком геодезичні підмноговиди у будь-якому рімановому многовиді – це геодезичні.

def. Підмноговид (M, r) у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$ будемо називати геодезичним в $p \in M$, якщо для будь-якого $v \in T_p M$ будь-яка геодезична $\overline{\gamma}$ многовида $(\overline{M}, \overline{g})$, що випущена з $r(p)$ в напрямку $d_p r(v)$, лежить у $r(M)$.

Rem. Звичайно, підмноговид цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли він геодезичний у кожній точці.