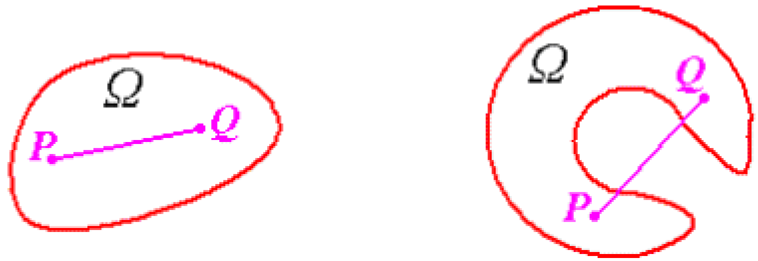
# Лекція 8. Теорема про чотири вершини овалу. Інтегральна кривина і нерівність Фенхеля.

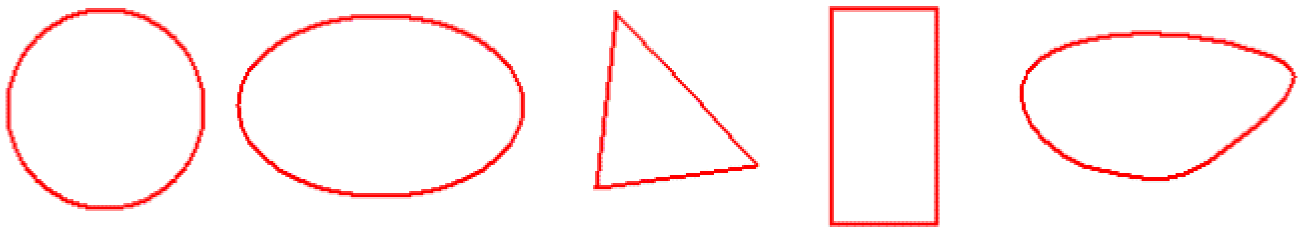
## 1. Теорема про чотири вершини овалу

**Визначення.** Підмножина Ω в площині $I\!R^2$ називається *опуклою*, якщо для будь-яких точок $P$ і $Q$, що належать Ω, відрізок $PQ$ також належить Ω. Опукла підмножина з непустою внутрішністю називається *опуклим тілом*.

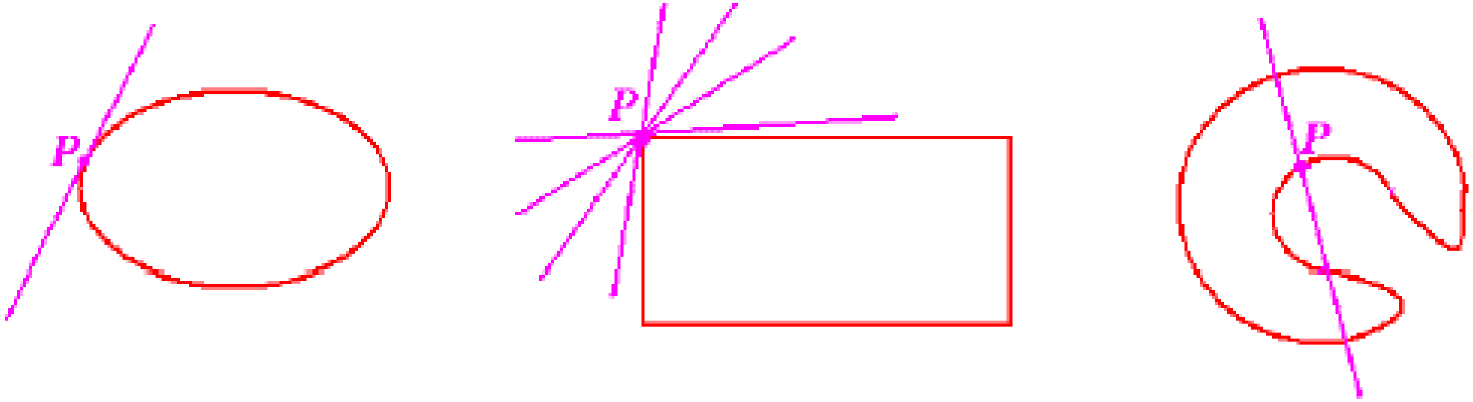



**Визначення.** *Овалом* називається замкнута крива в $I\!R^2$, що обмежує опукле тіло.

*Приклади.* Опуклі багатокутники, кола, еліпси – ці криві є овалами.



**Визначення.** Нехай $\gamma$ – овал в $\mathbb{R}^2$. Пряма, що проходить через точку $P$ на $\gamma$ так, що овал $\gamma$ розташовується по одну сторону (в одній півплощині) відносно цієї прямої, називається *опорною прямою* овалу в точці $P$.




**Твердження.** *Нехай $\gamma$ – овал в $\mathbb{R}^2$.*

*Через кожну точку $P$ кривої $\gamma$ можна провести опорну пряму.*

*Якщо $\gamma$ є регулярно параметризованою кривою, то опорна пряма в кожній точці $P$ кривої $\gamma$ є єдиною і співпадає з дотичною прямою кривої $\gamma$ в точці $P$.*

**Твердження.** *Нехай $\gamma$ – регулярна (класу $C^2$) замкнута крива в $\mathbb{R}^2$.*

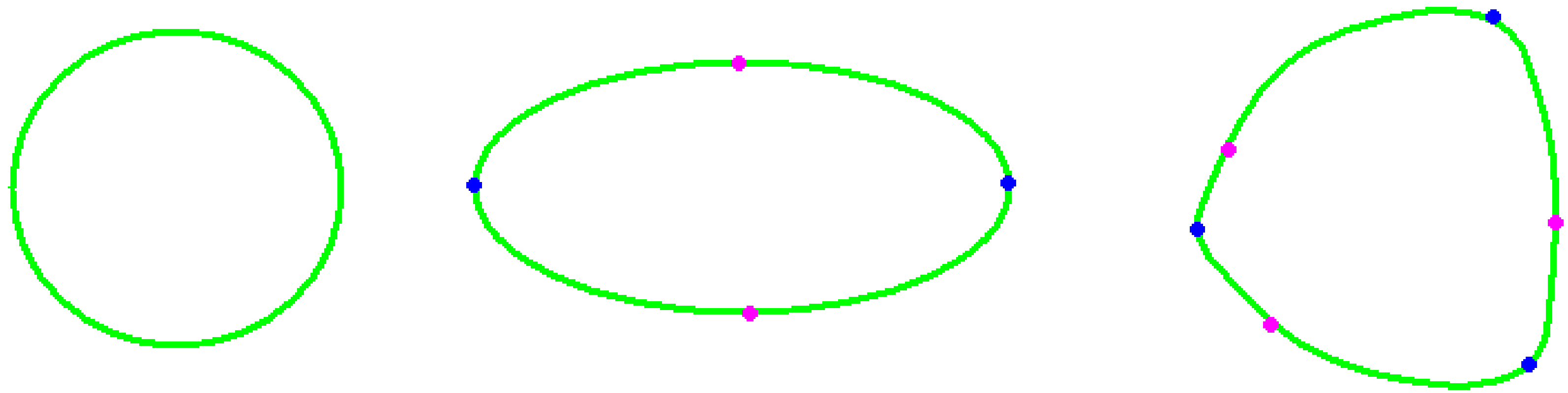
*Припустимо, що:*

1) *крива $\gamma$ не має точок самоперетину,*
2) *кривина $k > 0$.*

*Тоді крива $\gamma$ є овалом.*

Нехай $\gamma$ – регулярна (класу $C^2$) крива в $\mathbb{R}^2$.

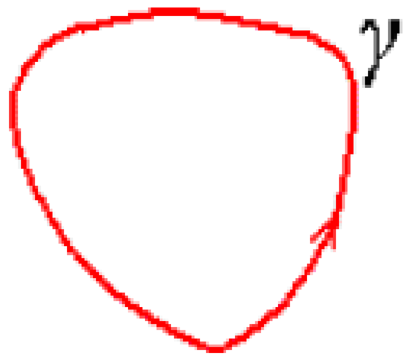
**Визначення.** *Вершиною* кривої $\gamma$ називається така її точка $P$, в якій кривина $k$ має локальний мінімум або локальний максимум, тобто $k'(P)=0$ і при переході через точку $P$ похідна $k'$ змінює знак.



**Теорема (про чотири вершини овалу).** *Нехай $\gamma$ – регулярна (класу $C^3$) замкнута крива в $\mathbb{R}^2$, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

*Тоді на кривій $\gamma$ є щонайменше 4 вершини.*

Доведення. Параметризуємо криву $\gamma$ натуральним параметром $s$ і позначимо її радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(s)$.

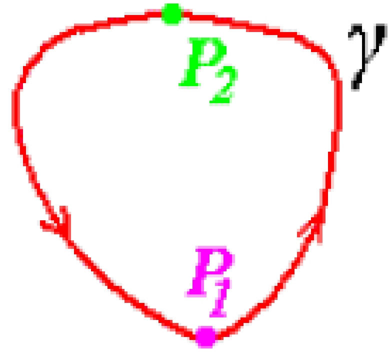



Будемо розглядати $\vec{f}(s)$ як періодичну вектор-функцію, задану на всій числовій прямій. Період вектор-функції $\vec{f}(s)$ дорівнює довжині $L$ замкнутої кривої $\gamma$.

Кривина $k(s)$ кривої $\gamma$ також є періодичною функцією, $k(s+L)=k(s)$.

Оскільки вектор-функція $\vec{f}(s)$ є гладкою класу $C^3$, кривина $k(s)$ є гладкою класу $C^1$.

Функція $k(s)$, як періодична неперервно диференційовна функція, має хоча б одну точку максимуму $s_1$ і одну точку мінімуму $s_2$ на періоді $[0,L]$:



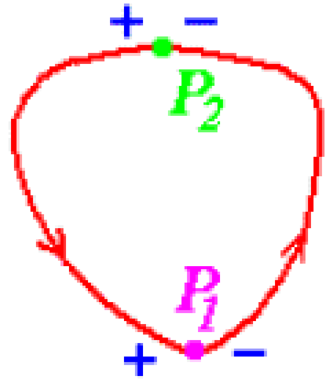

$$k(s_1) = \max_{s\in[0,L]} k(s),$$

$$k(s_2) = \min_{s\in[0,L]} k(s).$$

Тобто, овал $\gamma$ містить, щонайменше, дві вершини – $P_1(s_1)$ і $P_2(s_2)$.

Покажемо, що на овалі $\gamma$ є ще, щонайменше, дві інші вершини.

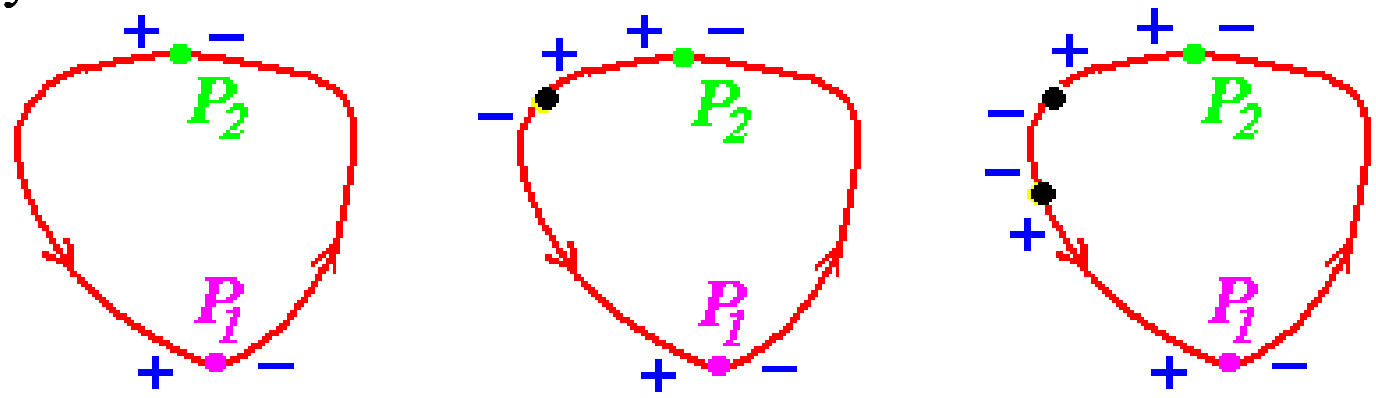
Розглянемо загальний випадок, коли вершини $P_1$ і $P_2$ є ізольованими.




В цьому випадку похідна $k'$ змінює знак з «+» на «–» при переході через точку $P_1$ і з «–» на «+» при переході через точку $P_2$.

Розіб'ємо замкнуту криву $\gamma$ на дві дуги $P_1P_2$ і $P_2P_1$.

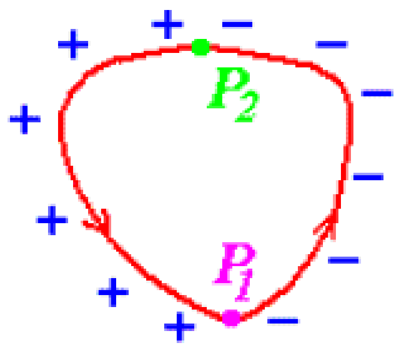
Якщо на якійсь з дуг $P_1P_2$ або $P_2P_1$ міститься ще хоча б одна вершина, відмінна від $P_1$ і $P_2$, то тоді, з огляду на парність кількості перемін знаку похідної $k'$, виникне ще одна (четверта) вершина, і твердження по наявність щонайменше чотирьох вершин виконується.



Але чи може бути така ситуація, що на жодній з дуг $P_1P_2$ або $P_2P_1$ немає жодної додаткової вершини, а, отже крива має тільки дві вершини $P_1$ і $P_2$?

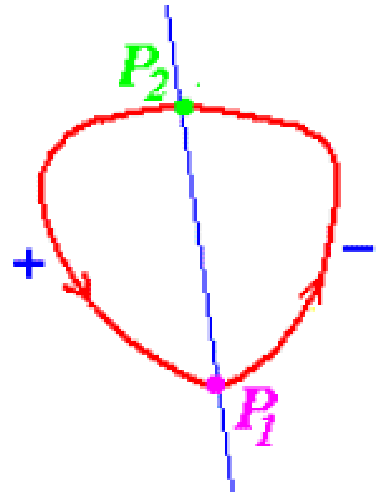
Доведемо від противного, що така ситуація не є можливою.

Отже, припустимо, що на жодній з дуг $P_1P_2$ або $P_2P_1$ немає жодної вершини, тобто, похідна $k'$ змінює свій знак тільки в точках $P_1$ і $P_2$, а всередині дуг $P_1P_2$ або $P_2P_1$ зміни знаку вже не відбувається.




Тобто, будемо припускати, що на дузі $P_1P_2$ маємо $k' \le 0$, а на дузі $P_2P_1$ маємо $k' \ge 0$.

Тоді проведемо пряму $\Gamma$ через точки $P_1$ , $P_2$.




З опуклості тіла,обмеженого овалом $\gamma$, випливає, що пряма $\Gamma$ перетинає криву $\gamma$ тільки в точках $P_1$ , $P_2$ .

Як наслідок, дуги $P_1P_2$ і $P_2P_1$ лежать в різних півплощинах відносно прямої $\Gamma$.

Пряма $\Gamma$ задається у вигляді $<\vec{x},\vec{e}>+c=0$, де $\vec{e}$ – одиничний нормальний вектор прямої $\Gamma$ .

Відхилення точки $P$ від прямої $\Gamma$ обчислюється за формулою

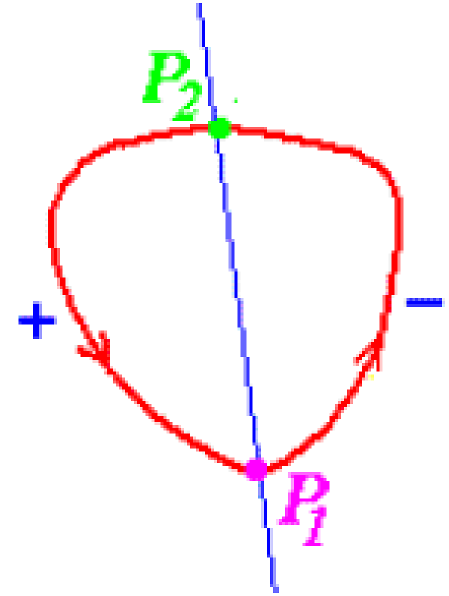
$$h(P) = <\vec{x}_P,\vec{e}>+c,$$

де $\vec{x}_P$ – радіус-вектор точки $P$ в $\mathbb{R}^2$.

Розглянемо відхилення точок кривої $\gamma$ від прямої $\Gamma$ :

$$h(s) = <\vec{f}(s),\vec{e}>+c.$$

Функція відхилення $h(s)$ обертається в нуль в точках $P_1$, $P_2$.




Оскільки дуги $P_1P_2$ і $P_2P_1$ лежать в різних півплощинах відносно прямої $\Gamma$, на кожній з цих дуг функція відхилення $h$ не змінює знак.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що:

$h<0$ для точок всередині дуги $P_1P_2$,

$h>0$ для точок всередині дуги $P_2 P_1$.

Згадаємо, що

$k' \leq 0$ в точках дуги $P_1P_2$,

$k' \geq 0$ в точках дуги $P_2 P_1$.

Розглянемо добуток $w(s)= h(s)\, k'(s)$.

За побудовою отримуємо, що величина $w \geq 0$ в усіх точках кривої $\gamma$.

Більше того, виконується строга оцінка

$$\oint_{\gamma} w\, ds > 0,$$

оскільки неперервна функція $w(s)$ не може бути тотожно нульовою.

Обчислимо вказаний інтеграл.

Маємо:

$$\oint\limits_{\gamma} w\,ds = \int\limits_0^L h\,k'\,ds = hk\Big|_0^L - \int\limits_0^L h'\,k\,ds =$$

[ крива замкнута, тому $h(L)k(L) - h(0)k(0) = 0$ ]

$$= -\int\limits_0^L h'\,k\,ds = -\int\limits_0^L (< \vec{f}(s), \vec{e} > + c)'\,k\,ds = -\int\limits_0^L < \vec{f}\,', \vec{e} > k\,ds = -\int\limits_0^L < \vec{\tau}, \vec{e} > k\,ds =$$

[ використаємо формулу Френе $\vec{\nu}\,' = -k\vec{\tau}$ ]

$$= -\int\limits_0^L < k\vec{\tau}, \vec{e} > ds = \int\limits_0^L < \vec{\nu}\,', \vec{e} > ds = \int\limits_0^L < \vec{\nu}, \vec{e} >'\,ds = < \vec{\nu}(L), \vec{e} > - < \vec{\nu}(0), \vec{e} > = 0,$$

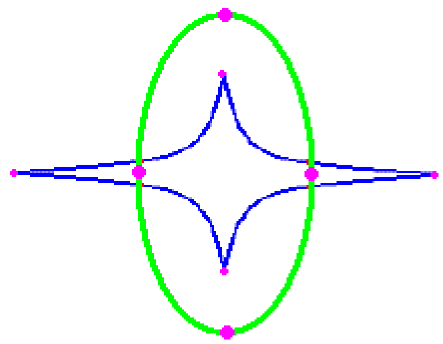
оскільки $\vec{\nu}(L) = \vec{\nu}(0)$ з огляду на замкнутість кривої $\gamma$.

Таким чином, ми отримали $\oint\limits_{\gamma} w\,ds = 0$. Але ж повинні мати $\oint\limits_{\gamma} w\,ds > 0$.

Отримали протиріччя, яке і доводить теорему.

**Інтерпретація.** *Нехай* $\gamma$ – *регулярна (класу* $C^3$*) замкнута крива в* $\mathbb{R}^2$*, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

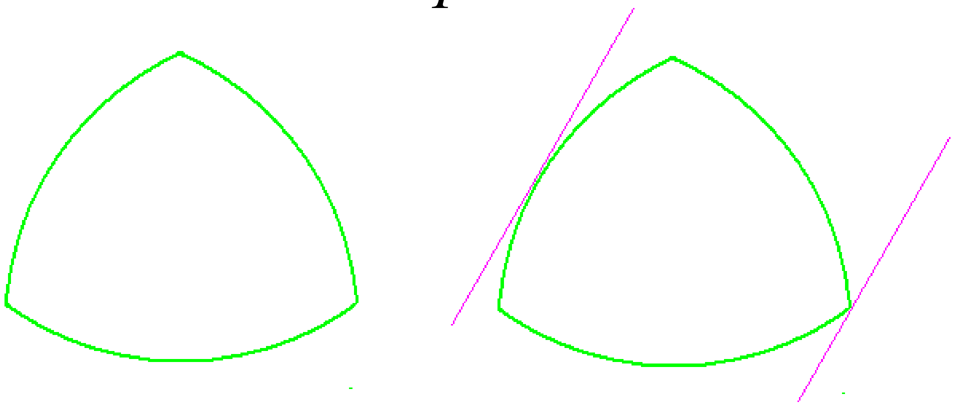
*Тоді на еволюті кривої* $\gamma$ *є щонайменше 4 сингулярних точки.*



**Уточнення.** *Нехай* $\gamma$ – *регулярна (класу* $C^3$*) замкнута крива в* $\mathbb{R}^2$*, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

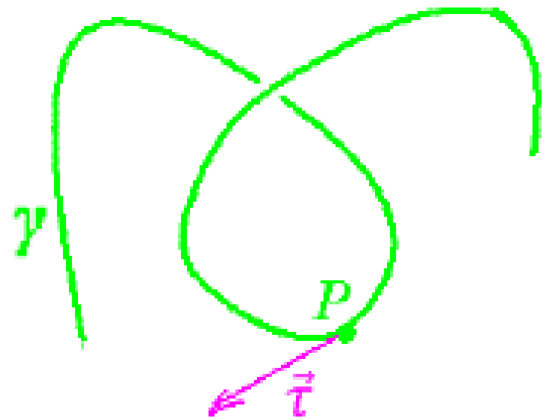
*Припустимо, що крива* $\gamma$ *має сталу ширину.*

*Тоді крива* $\gamma$ *має щонайменше 6 вершин.*



## 2. Індикатриса дотичних регулярної кривої в $\mathbb{R}^3$

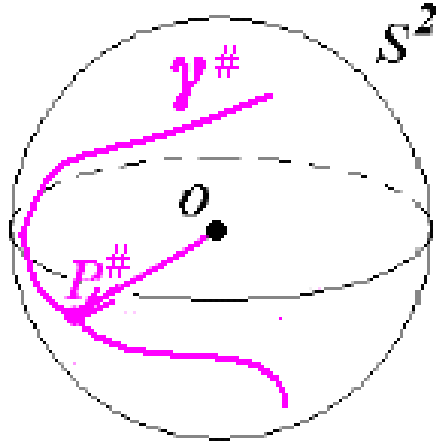
Нехай $\gamma$ – регулярна орієнтована крива в $\mathbb{R}^3$.




В кожній точці $P$ на кривій $\gamma$ визначений одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$. Перенесемо його в початок координат $O$.

Кінець перенесеного вектора задає точку $P^\#$ в $\mathbb{R}^3$.

Оскільки вектор $\vec{\tau}$ має одиничну довжину, точка $P^\#$ розташовується на сфері $S^2$ одиничного радіусу з центром в точці $O$.




Коли точка $P$ рухається вздовж кривої $\gamma$, відповідна їй точка $P^\#$ рухається на сфері $S^2$, замітаючи деяку підмножину $\gamma^\# \subset S^2$. Ця підмножина $\gamma^\#$ називається *індикатрисою дотичних* кривої $\gamma$.

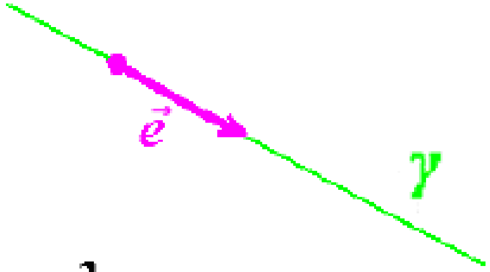
Якщо крива $\gamma$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b),$$

то її індикатриса дотичних $\gamma^\#$ задається радіус-вектором

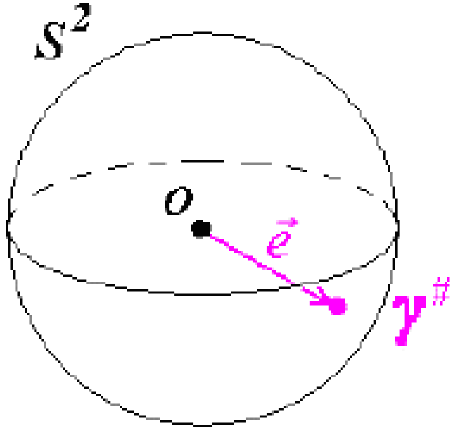
$$\vec{x} = \frac{\vec{f}'}{|\vec{f}'|}, \quad t \in (a,b).$$

*Зауваження.* Якщо крива $\gamma$ параметризована натуральним параметром,
$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$
то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ задається радіус-вектором
$$\vec{x} = \vec{f}'(s), \quad s \in (a,b),$$
оскільки натуральна параметризація характеризується умовою $|\vec{f}'(s)| \equiv 1$.




*Приклад* 1. Якщо $\gamma$ – пряма з одиничним напрямним вектором $\vec{e}$, то її індикатриса дотичних – це точка на сфері, кінцева точка вектора $\vec{e}$.

Дійсно, пряма $\gamma$ задається радіус-вектором
$$\vec{x} = \vec{e}t + \vec{x}_0.$$

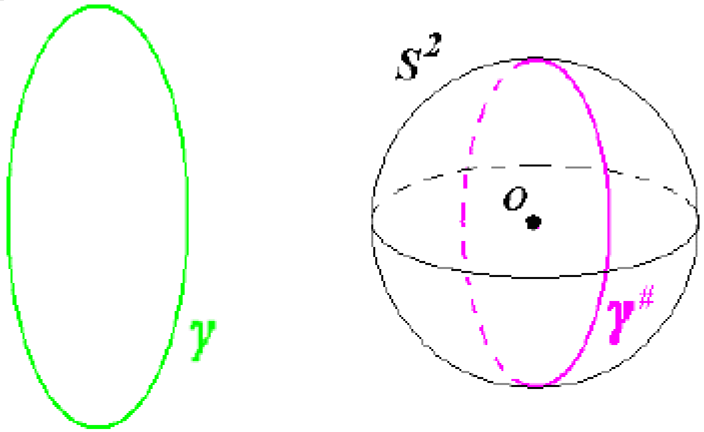



Обчислюючи похідну вектор-функції $\vec{f}(t) = \vec{e}t + \vec{x}_0$, отримуємо $\vec{f}' = \vec{e}$. Одиничний дотичний вектор
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{f}'}{|\vec{f}'|} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{\vec{e}}{1} = \vec{e}$$

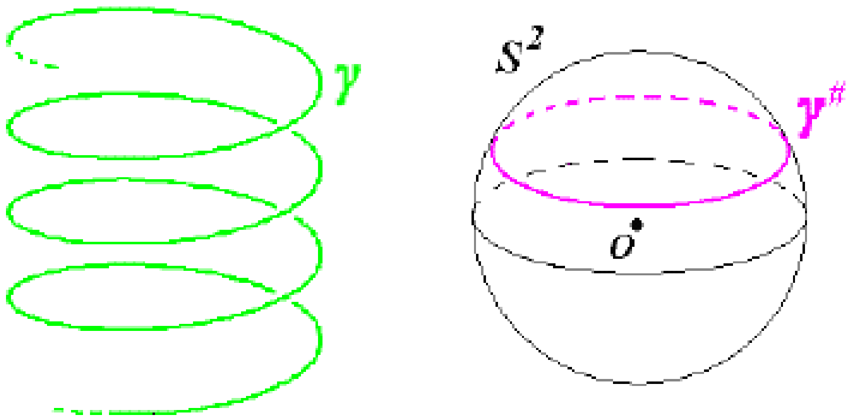
Отже, відповідна індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ задається радіус-вектором
$$\vec{x} = \vec{e}$$
і представляє собою одну точку на сфері $S^2$.

Така тривіальність кривої $\gamma^{\#}$ відображає той факт, що для прямої усі її дотичні прямі направлені в одному й тому ж напрямку.

*Приклад* 2. Якщо $\gamma$ – деяке коло, розташоване в двомірній площині $\Pi$ в $\mathbb{R}^3$, то його індикатриса дотичних $\gamma^\#$ – це велике коло (коло одиничного радіусу) на сфері $S^2$, яке утворюється перетином сфери $S^2$ та площини $\Pi^\#$, що проходить через точку $O$ паралельно площині $\Pi$.




*Приклад* 3. Якщо $\gamma$ – гвинтова лінія в $\mathbb{R}^3$, то її індикатриса дотичних $\gamma^\#$ – це деяке маленьке коло на сфері $S^2$, яке утворюється перетином сфери $S^2$ та деякої площини, що не проходить через точку $O$.



*Задачі.*

1. Доведіть, що якщо до кривої $\gamma$ застосувати паралельний перенос або гомотетію, то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ не зміниться.

2. Доведіть, що якщо до кривої $\gamma$ застосувати обертання, то таке ж обертання буде застосовуватись і до її індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$.

3. Доведіть, що якщо на кривій $\gamma$ змінити орієнтацію (напрям руху), то до індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$ потрібно застосувати відображення сфери $S^2$, яке відображає точки сфери в їх діаметрально протилежні точки.

**Твердження (властивості індикатриси дотичних)**

*Нехай $\gamma$ – регулярна класу гладкості $C^m$, $m\geq 2$, крива в $\mathbb{R}^3$.*

*Припустимо, що крива $\gamma$ не має точок перегину, тобто, $k \neq 0$.*

*Тоді індикатриса дотичних $\gamma^\#$ є регулярною класу гладкості $C^{m-1}$ кривою.*

*При цьому натуральний параметр $s^\#$ на кривій $\gamma^\#$ пов'язаний з натуральним параметром $s$ на кривій $\gamma$ співвідношенням*

$$ds^\# = k\, ds.$$

*Як наслідок, довжина індикатриси дотичних $\gamma^\#$ дорівнює інтегральній кривині кривої $\gamma$:*

$$l(\gamma^\#) = \int_\gamma k\, ds$$

Доведення. Задамо криву $\gamma$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s)\ , \quad s \in (a,b),$$

в натуральній параметризації. Тоді її індикатриса дотичних $\gamma^\#$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\tau}(s), \quad s \in (a,b).$$

Оскільки $\vec{\tau}(s) = \vec{f}\,'(s)$ і вектор-функція $\vec{f}(s)$ є гладкою класу $C^m$, то вектор-функція $\vec{\tau}(s)$ є гладкою класу $C^{m-1}$.

Щоб проаналізувати регулярність кривої $\gamma^{\#}$, обчислимо похідну її радіус-вектора, застосувавши формулу Френе:

$$\vec{\tau}' = k\vec{\nu}$$

Як наслідок, $|\vec{\tau}'| = k|\vec{\nu}| = k$.

Оскільки $k \neq 0$ за умовою, то $|\vec{\tau}'| \neq 0$, отже крива $\gamma^{\#}$ є регулярною.

Більше того, для натурального параметра $s^{\#}$ на кривій $\gamma^{\#}$ маємо:

$$\frac{ds^{\#}}{ds} = |\vec{\tau}'| = k.$$

Тому

$$ds^{\#} = k\,ds$$

Проінтегрувавши останню рівність по інтервалу визначення кривих $\gamma$ і $\gamma^{\#}$ , отримуємо:

$$l(\gamma^{\#}) = \int_{s^{\#}(a)}^{s^{\#}(b)} ds^{\#} = \int_a^b k\,ds = \int_\gamma k\,ds$$

Твердження доведене.

*Зауваження.* Особливі точки на індикатрисі дотичних $\gamma^{\#}$ виникають (породжуються) точками перегину на кривій $\gamma$ .

**Твердження.** *Якщо регулярна крива $\gamma$ є замкнутою, то її індикатриса $\gamma^{\#}$ також є замкнутою кривою.*

Доведення. Замкнута регулярна крива $\gamma$, параметризована натуральним параметром $s$, представляється вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(s)$, яка є періодичною,

$$\vec{f}(s+l) = \vec{f}(s) \ ,$$

період $l$ – довжина замкнутої кривої $\gamma$.

Похідна $\vec{f}\,'(s)$ періодичної вектор-функції $\vec{f}(s)$ також є періодичною,

$$\vec{f}\,'(s+l) = \vec{f}\,'(s) \ .$$

Значить, індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$, задана радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}\,'(s),$$

є замкнутою кривою, що і вимагалось довести.

*Зауваження.* Обернене твердження в загальному випадку не є вірним – контрприкладом є гвинтова лінія. Але воно становиться вірним лише за деяких додаткових умов, як, наприклад, в Теоремі Вигодського (дивись Yu.A. Aminov, *Differential geometry and topology of curves*) .

**Твердження (нерівність Фенхеля)** *Якщо* $\gamma$ *є регулярною* (*класу* $C^2$) *замкнутою кривою в* $\mathbb{R}^3$, *то має місце нерівність*

$$\int_\gamma k\, ds \geq 2\pi .$$

*Нерівність є оптимальною – вона перетворюється в рівність тоді, і тільки тоді, коли* $\gamma$ *є плоскою опуклою кривою.*

**Твердження (нерівність Фері-Мілнора)** *Якщо* $\gamma$ *є регулярною* (*класу* $C^2$) *замкнутою кривою в* $\mathbb{R}^3$, *що є завузленою, то має місце нерівність*

$$\int_\gamma k\, ds > 4\pi .$$

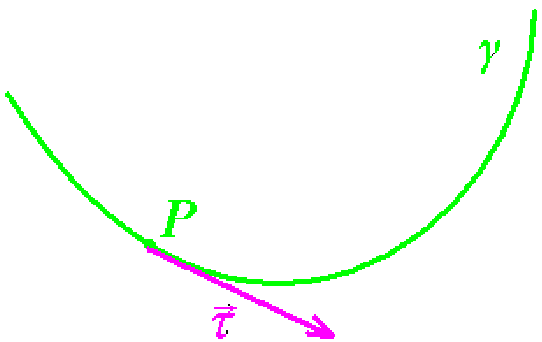
Доведення полягає в аналізі властивостей індикатриси дотичних $\gamma^\#$ і встановленню оцінок знизу для її довжини, що і призводить до оцінок на інтегральну кривину кривої $\gamma$ (дивись Yu.A. Aminov, *Differential geometry and topology of curves*) .

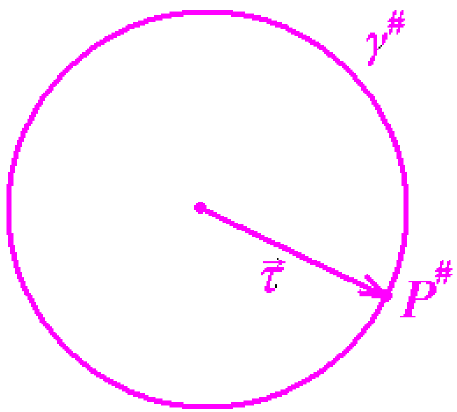
*Зауваження.* Визначення і твердження стосовно поняття індикатриси дотичних можуть бути розповсюджені на випадок кривих в багатомірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n>3$.

## 3. Індикатриса дотичних – випадок плоских кривих

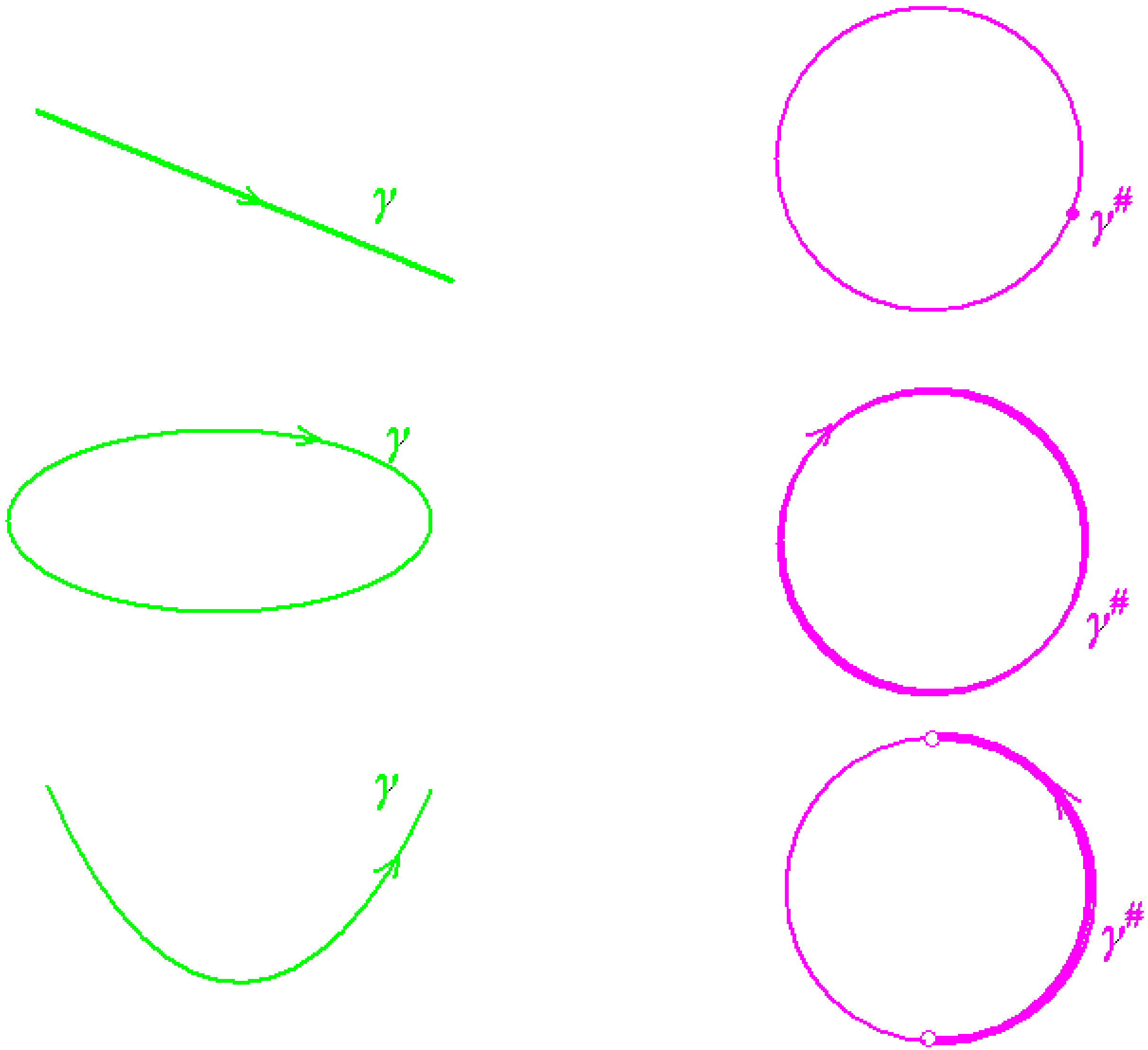
Нехай $\gamma$ – регулярна крива в площині $\mathbb{R}^2$.
Індикатриса дотичних $\gamma^\#$ кривої $\gamma$ – це параметризація одиничного кола $S^1$.

| Крива $\gamma$ | Індикатриса дотичних $\gamma^\#$ |
|---|---|
| $\vec{x} = \vec{f}(s)$ | $\vec{x} = \vec{\tau}(s) = \dfrac{d\vec{f}}{ds}$ |
| $\vec{x} = \vec{f}(t)$ | $\vec{x} = \vec{\tau}(t) = \dfrac{1}{\left\lvert \dfrac{d\vec{f}}{dt} \right\rvert} \dfrac{d\vec{f}}{dt}$ |

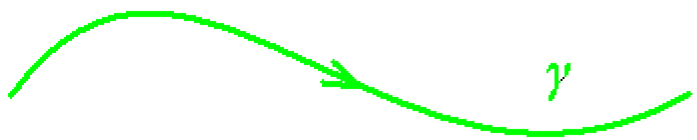


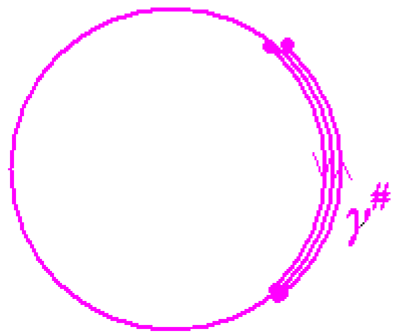



*Приклад* 1

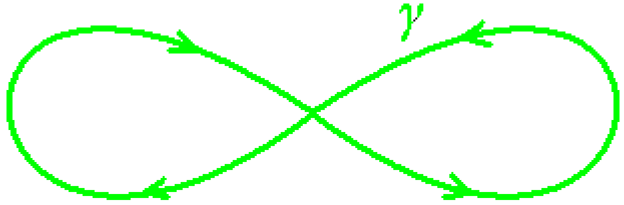


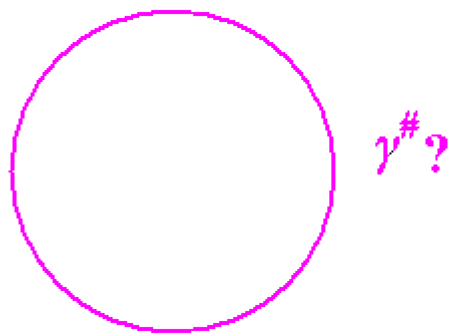
*Приклад* 2



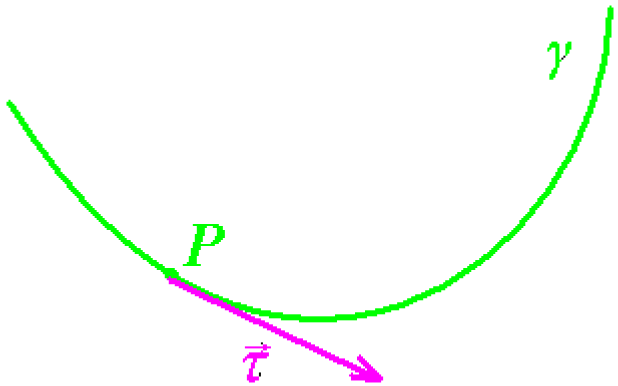

*Приклад 3*

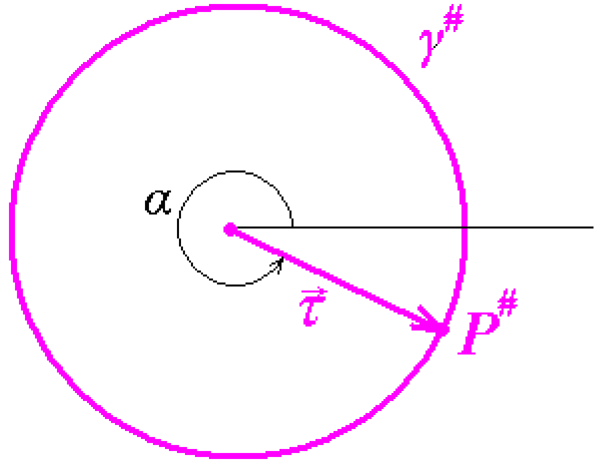


*Нагадування:*

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



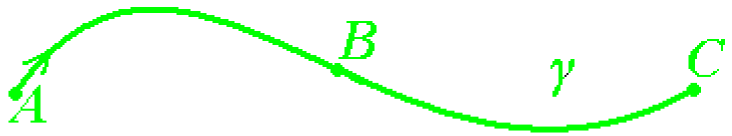

Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ кривої $\gamma$, як траєкторія точки, що рухається по колу $S^1$, представляється функцією

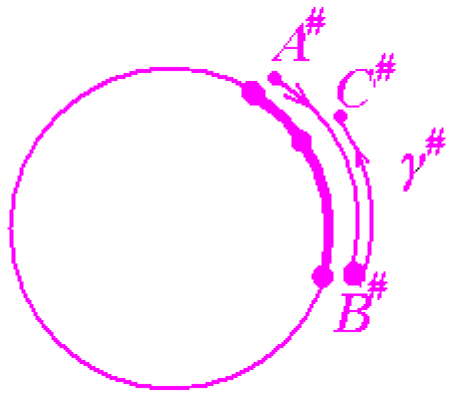
$$\alpha = \alpha(s)$$

*Нагадування:* $k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ , $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$

Точкам перегину на кривій $\gamma$ відповідають сингулярні точки на індикатрисі дотичних.

Зміна знаку кривини $k^*$ при переході через точку перегину на кривій $\gamma$ відповідає зміна напрямку рух по колу при побудові індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$.




*Наслідок.* Інтегральна кривина кривої $\gamma$ дорівнює довжині індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$ з врахуванням кратності (пройдений шлях):

$$\int_\gamma k\,ds = l(\gamma^{\#})$$

А інтегральна кривина зі знаком кривої $\gamma$ дорівнює отриманий приріст кута (переміщення) на індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$ :

$$\int_\gamma k^*\,ds = \alpha(C) - \alpha(A)$$

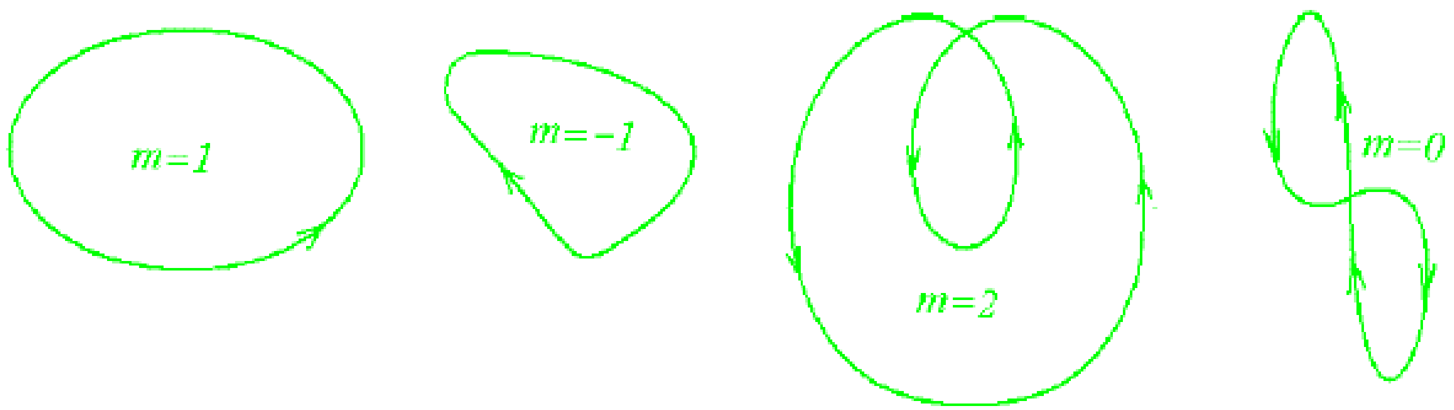
**Твердження (інтегральна кривина замкнутої плоскої кривої).**

*Якщо регулярна крива* $\gamma$ *в* $\mathbb{R}^2$ *є замкнутою, то її інтегральна кривина «зі знаком» є кратною* $2\pi$:

$$\int_\gamma k\, ds = 2\pi m,\ m \in Z$$

Ідея доведення. Коли точка $P$ пробігає один раз всю замкнуту криву $\gamma$, одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$ робить один або декілька повних обертань на кут $2\pi$.

*Приклади-ілюстрації* (*перевірте*)



**Задачі для практичного заняття і самостійної роботи**

**Задача 8.1.** Побудуйте індикатрису дотичних наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^2 \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^3 \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \; 0 < t < 2\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at} \sin t \\ x^2 = e^{at} \cos t \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

Опишіть індикатрису дотичних як траєкторію точки, що рухається по одиничному колу.

**Задача 8.2.** Побудуйте індикатрису дотичних для овалу Кассіні

$$((x^1 - 1)^2 + (x^2)^2)\,((x^1 + 1)^2 + (x^2)^2) - c^2 = 0$$

Проаналізуйте залежність форми індикатриси від параметру $c$.

*Зауваження.* Для неявно заданої регулярної кривої

$$F(x,y)=0$$

кривина обчислюється за формулою

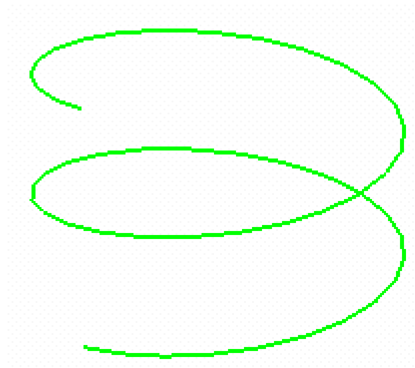
$$k = \frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{((F'_x)^2 + (F'_y)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Як наслідок, точки перегину ($k=0$) неявно задано регулярної кривої знаходяться з наступної системи:

$$\begin{cases} F = 0 \\ F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2 = 0 \end{cases}$$

**Задача 8.3.** Побудуйте індикатрису дотичних, індикатрису головних нормалей і індикатрису бінормалей для гвинтової лінії

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t\ , \ -\infty < t < \infty \\ x^3 = ht \end{cases}$$



**Задача 8.4.** Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds$ для наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = a\sin t + c \\ x^2 = b\cos t + d \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$

2) $\begin{cases} x^1 = a\cosh t + c \\ x^2 = b\sinh t + d \end{cases}$, $-\infty < t < \infty$

3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt^3 \end{cases}$, $-\infty < t < \infty$

4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at}\sin t \\ x^2 = e^{at}\cos t \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$

Підказка. Згадати зв'язок інтегральної кривини «зі знаком» та «довжини» індикатриси дотичних кривої.

**Задача 8.5.** Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds$ для наступних плоских кривих:

**Задача 8.6.** Розглянемо регулярну криву $\gamma$ в $I\!R^3$, задану натуральними рівняннями

$$k=k(s),\ \kappa=\kappa(s),\ 0 < s < L.$$

Проаналізуйте регулярність та обчисліть довжину індикатриси дотичних, індикатриси головних нормалей і індикатриси бінормалей кривої $\gamma$.

**Задача 8.7.** Нехай $\gamma$ – регулярна замкнута крива в $I\!R^3$. Її індикатриса дотичних – це замкнута крива $\gamma^{\#}$, розташована на сфері одиничного радіусу $S^2$ в $I\!R^3$.

Доведіть, що крива $\gamma^{\#}$ не може бути розташована в жодній відкритій півсфері сфери $S^2$.