Середня кривина

def. Нехай (M, r) – n-вимірний підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$. Його полем середньої кривини зветься

$$H := \frac{1}{n}\mathsf{Tr}_g B := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i),$$

де $\{E_1, \ldots, E_n\}$ – поля, що утворюють у кожній точці своєї області визначення ортонормований базис дотичного простору M (відносно значення першої ф.ф. g у цій точці). Якщо $H = 0$ в усіх точках M, то підмноговид зветься мінімальним.

Rem. Аналогічно до нормальних полів у Lem. вище, такі поля максимальної гладкості існують в околі кожної точки, але, взагалі кажучи, тільки локально (це теж випливає з методу Грама – Шмідта або можна використати паралельне перенесення – Впр.) Отже, друга формула визначає H локально у околі кожної точки M.

Rem. Потрібно перевірити коректність. Введемо локальні координати (усі позначення як вище) і розкладемо $E_i = E_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ для кожного i. Умова ортонормованості $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ дає для будь-яких i, j

$$g_{kl}\, E_i^k\, E_j^l = \delta_{ij}.$$

Побудуємо матрицю $E = (E_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ (і G як вище), тоді ці умови означають, що

$$E^T G E = I.$$

Зокрема, звідси випливає, що E невироджена (чому?). Домножимо зліва на $(E^T)^{-1}$ і справа на E^{-1}:

$$G = (E^T)^{-1} E^{-1} = (EE^T)^{-1},$$

$$EE^T = G^{-1},$$

тобто для будь-яких i, j

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^i \, E_k^j = g^{ij}.$$

Тоді локально

$$H = \frac{1}{n} \sum_k B(E_k, E_k) = \frac{1}{n} \sum_k b_{ij}^{\alpha} \, E_k^i \, E_k^j \, \xi_\alpha = \frac{1}{n} b_{ij}^{\alpha} \, g^{ij} \, \xi_\alpha.$$

Цей вираз не залежить від вибору $\{E_1, \ldots, E_n\}$ (але й від локальних координат теж в силу означення).

Cor. H – коректно визначене нормальне поле на M, $(k-2)$-гладке для k-гладкого підмноговида.

Rem. У випадку гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ можемо аналогічно до другої ф.ф. записати поле середньої кривини у вигляді $H\,\xi$, де тепер H – функція.

def. У цьому випадку H зветься середньою кривиною гіперповерхні.

Rem. Функція H визначена, взагалі кажучи, лише локально (і є $(k-2)$-гладкою), причому її знак залежить від вибору ξ. Але модуль H коректно і однозначно визначений завжди. За побудовою,

$$H = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}_g b := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b(E_i, E_i).$$

Локально поле середньої кривини у випадку гіперповерхні має вигляд $\frac{1}{n} b_{ij}\, g^{ij}\, \xi$, тому $H = \frac{1}{n} b_{ij}\, g^{ij}$.

Ex.1. Тор Кліффорда у E^4: $r \in C^\infty(T^2, E^4)$, де $T^2 = S^1 \times S^1$, тому у якості локальних координат (u^1, u^2) можна брати кутові параметри відповідних кіл. Отже, визначимо (коректність очевидна):

$r(u^1, u^2) := (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2)$.

Диференціюємо:

$r_1 = (-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2)$,

$r_2 = (-\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2)$.

Знаходимо коефіцієнти першої ф.ф.:

$$g_{11} = \langle r_1, r_1 \rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle r_1, r_2 \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle r_2, r_2 \rangle = 1.$$

Тобто метрика пласка (поверхня локально ізометрична E^2; зауважимо, що ізометричне вкладення плаского двовимірного тора у E^4 повинне існувати за теоремою Неша – Кейпера). Зокрема, невиродженість матриці Грама (у даному випадку одиничної) означає, що r_1 і r_2 дійсно утворюють базис образу дотичної площини у кожній точці, тобто лінійно незалежні, а отже r – занурення. Воно є вкладенням, бо T^2 компактний, а r – ін'єкція.

Оберемо ортонормований базис нормальних полів (тут глобальний):

$$\xi_1 = r = (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2),$$

$\xi_2 = (\sin u^1 \sin u^2, -\sin u^1 \cos u^2, -\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2).$

Дійсно, це нормальні поля, бо

$$\langle r_1, \xi_1 \rangle = \langle r_1, \xi_2 \rangle = \langle r_2, \xi_1 \rangle = \langle r_2, \xi_2 \rangle = 0,$$

і базис ортонормований, бо

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = 1, \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0.$$

Другі похідні:

$$r_{11} = r_{22} = (-\cos u^1 \cos u^2, -\cos u^1 \sin u^2,$$

$$-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2) = -r = -\xi_1,$$

$$r_{12} = (\sin u^1 \sin u^2, -\sin u^1 \cos u^2,$$

$$-\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2) = \xi_2.$$

Тому коефіцієнти другої ф.ф.:

$$b_{11}^1 = \langle r_{11}, \xi_1 \rangle = -1,$$

$$b_{11}^2 = \langle r_{11}, \xi_2 \rangle = 0,$$

$$b_{12}^1 = \langle r_{12}, \xi_1 \rangle = 0,$$

$$b_{12}^2 = \langle r_{12}, \xi_2 \rangle = 1,$$

$$b_{22}^1 = \langle r_{22}, \xi_1 \rangle = -1,$$

$$b_{22}^2 = \langle r_{22}, \xi_2 \rangle = 0.$$

У нас

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{одинична, тому} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

теж одинична, і $g^{ij} = \delta^{ij}$. Поле середньої кривини $H = H^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{2}\, b^\alpha_{ij}\, g^{ij}\, \xi_\alpha$. У нас це буде

$$H = \frac{1}{2}\, b^\alpha_{ij}\, \delta^{ij}\, \xi_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} b^\alpha_{ii}\, \xi_\alpha,$$

тобто

$$H^1 = \frac{1}{2}(b^1_{11} + b^1_{22}) = -1,$$

$$H^2 = \frac{1}{2}(b^2_{11} + b^2_{22}) = 0,$$

і отже

$$H = H^1 \xi_1 + H^2 \xi_2 = -\xi_1 = -r.$$

Rem. Зауважимо, що сума квадратів координатних функцій r дорівнює 1, тобто $r(T^2) \subset S^3 \subset E^4$: тор

Кліффорда – (гіпер)поверхня у сфері S^3. Якщо ототожнити TS^3 з підмножиною TE^4, можна вважати ξ_2 нормальним полем цього тора у S^3 (оскільки воно ортогональне радіусу-вектору r у E^4, отже, є дотичним до S^3, див. нижче). Проекція H на це поле дорівнює 0, отже середня кривина тора Кліффорда у S^3 нульова (чому?) – це мінімальна поверхня.

Ex. 2. (багатовимірний тор Кліффорда, інше означення).

$r: T^n \to E^{2n}$. Знову, оскільки $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$, у якості лок. координат $(u^1, \ldots, u^n)$ беремо кутові параметри відповідних кіл. Отже,

$r(u^1, \ldots, u^n) := (\cos u^1, \sin u^1, \ldots, \cos u^n, \sin u^n)$. (очевидно, кор. визначене на T^n, ∞-гладке)

Диференціюємо:

$r_i = (0, \ldots, 0, \underset{2i-1}{-\sin u^i}, \underset{2i}{\cos u^i}, 0, \ldots, 0)$, $i = \overline{1,n}$

Тому коеф. I ф.ф.:

$g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Це знову пласка (локально ізометрична E^n) метрика.

Зокрема, з того, що це метрика, випливає занурення r, як і у Ex. 1.

Оберемо базис нормальних полів (тут глобальний):

$\xi_\alpha := (0, \ldots, 0, \underset{2\alpha-1}{\cos u^\alpha}, \underset{2\alpha}{\sin u^\alpha}, 0, \ldots, 0)$, $\alpha = \overline{1,n}$.

Очевидно, це норм. поля, бо $\langle r_i, \xi_\alpha \rangle = 0$ $\forall i, \alpha$; і базис ортонормований: $\langle \xi_\alpha, \xi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$

$\forall\, \alpha, \beta$.

Другі похідні:

$$r_{ij} = \begin{cases} (0, \dots, 0, \underset{2i-1}{-\cos u^i}, \underset{2i}{-\sin u^i}, 0, \dots, 0), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

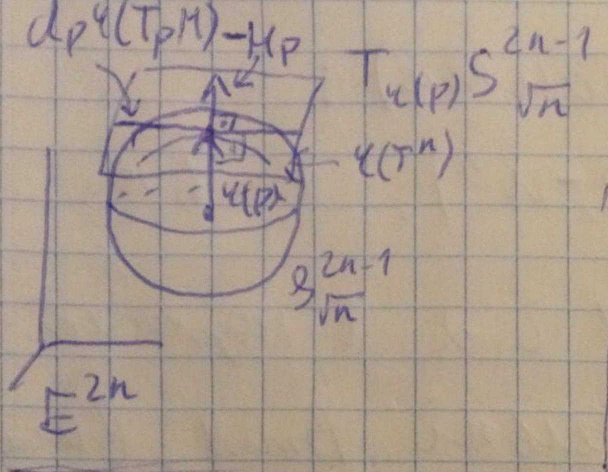
Звідси коеф. II ф.ф.:

$$b^\alpha_{ij} = \langle r_{ij}, \xi_\alpha \rangle = \begin{cases} -1, & i = j = \alpha, \\ 0 & \text{у інших випадках} \end{cases}$$

Оскільки $G = I$, $G^{-1} = I$, тобто $g^{ij} = \delta^{ij}$ $\forall\, i, j$.

Тобто знову $H = H^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b^\alpha_{ii} \xi_\alpha = -\frac{1}{n}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = -\frac{1}{n} r$.

<u>Rem.</u> Знову ж таки тут $r(T^n) \subset S^{2n-1}_{\sqrt{n}} \subset E^{2n}$ (сума квадратів коорд. $= n$). Оскільки проекція H_p на $T_{r(p)} S^{2n-1}_{\sqrt{n}} = r(p)^\perp$ дорівнює 0 $\forall\, p$, поле середньої кривини (T^n, r) у $S^{2n-1}_{\sqrt{n}}$ нульове (<u>Впр.</u>), тому



це мінімальний підмноговид у сфері (детальніше про сферу див. нижче).

Ex. 3. (узагальнений гелікоїд ~~[illegible]~~).

$\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \to E^{n+k+1}$ $\quad n \in N, k \in N$: Для $a \neq 0$ визначимо ∞-гладке

$$\varphi(u^1,\dots,u^{n+1}) = (u^1\cos u^{n+1}, u^1\sin u^{n+1}, \dots, u^k\cos u^{n+1}, u^k\sin u^{n+1}, u^{k+1}, \dots, u^n, a u^{n+1})$$

(це гелікоїд при $n=k=1$).

Отже:

$$\varphi_i = \begin{cases} (0,\dots,0,\underset{2i-1}{\cos u^{n+1}},\underset{2i}{\sin u^{n+1}},0,\dots,0), & i=\overline{1,k}, \\ (0,\dots,0,\underset{k+i}{1},0,\dots,0), & i=\overline{k+1,n}, \\ (-u^1\sin u^{n+1}, u^1\cos u^{n+1}, \dots, -u^k\sin u^{n+1}, u^k\cos u^{n+1}, 0,\dots,0,a), & i=n+1. \end{cases}$$

Тому коеф. I ф. ф.

$$g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j=\overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{k}(u^i)^2 + a^2, & i=j=n+1, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(додатньо визн. форма, тому φ - занурення).

Задано базис норм. полів (знову глобальний):

$$\xi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+(u^\alpha)^2}}(0,\dots,0,\underset{2\alpha-1}{-a\sin u^{n+1}},\underset{2\alpha}{a\cos u^{n+1}},0,\dots,0,-u^\alpha),\quad \alpha=\overline{1,k}.$$

Вони нормальні: $\langle r_i, \xi_\alpha\rangle = 0$ $\forall\, i,\alpha$ і нормовані: $\langle \xi_\alpha, \xi_\alpha\rangle = 1$ $\forall \alpha$, але не ортогональні. Втім, вони все ще лін. незалежні у $\forall$ точці, і тому утворюють базис норм. простору, відносно якого можна підраховувати коеф. II ф.ф.

Другі похідні:

$$r_{ij} = \begin{cases} (0,\dots,0,\underset{\substack{2i-1\\(2j-1)}}{-\sin u^{n+1}},\underset{\substack{2i\\(2j)}}{\cos u^{n+1}},0,\dots,0), & i=\overline{1,k},\ j=n+1 \text{ або } i=n+1,\ j=\overline{1,k},\\ (-u^1\cos u^{n+1},-u^1\sin u^{n+1},\dots,-u^k\cos u^{n+1},-u^k\sin u^{n+1},0,\dots,0), & i=j=n+1,\\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси "узагальнені" коеф. II ф.ф. [redacted]

[redacted] [redacted] b^α_{ij} – це коефіцієнти при

ξ_α у розкладенні Гаусса для r_{ij}. Нам достатньо буде того, що $r_{ii}=0$ при $i=\overline{1,n}$ і $\langle r_{n+1\,n+1}, \xi_\alpha\rangle = 0$ $\forall\ \alpha=\overline{1,k}$, тобто $r_{n+1\,n+1}$ – дотичний. Отже, $b^\alpha_{ii}=0$ $\forall\ i=\overline{1,n+1}$, $\alpha=\overline{1,k}$: м-ці $B^\alpha := (b^\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ мають нульові діагоналі.

Оскільки

$$G=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \sum_{i=1}^{k}(u^i)^2+a^2 \end{pmatrix},\quad G^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(u^i)^2+a^2} \end{pmatrix},$$

тобто

$$H=\frac{1}{n+1}H^\alpha\xi_\alpha=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} b^\alpha_{ii}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(u^i)^2+a^2}\,b^\alpha_{n+1\,n+1}\right)\xi_\alpha=0.$$

Цей підмноговид – мінімальний у E^{n+k+1}.

Rem. Для ф-ли H ортонормованість $\{\xi_\alpha\}$ не потрібна, достатньо того, що це базис у $\forall$ точці.

Впр. Чи буде мінімальним узагальнення:

$$r(u^1,\dots,u^{n+1})=(u^1\cos a_1u^{n+1},\,u^1\sin a_1u^{n+1},\dots,u^k\cos a_ku^{n+1},\,u^k\sin a_ku^{n+1},\,u^{k+1},\dots,u^n,\,au^{n+1})?$$

Основні рівняння геометрії підмноговидів

Почнемо з k-гладкого ріманового многовида $(\overline{M},\overline{g})$, де $k \geqslant 3$, а вимірність $\geqslant 2$. Як завжди, нехай $\overline{\nabla}$ – ріманова зв'язність $\overline{g}$. Нагадаємо, що тензор (оператор) кривини $(\overline{M},\overline{g})$ визначається як відображення

$$\overline{\mathsf{R}}\colon \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \to \mathcal{X}^{k-3}(\overline{M})\colon$$

$$X, Y, Z \mapsto \overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z := \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Цей вираз є 3-лінійним відносно додавання і множення на функції з $C^{k-1}(\overline{M})$, тобто, наприклад,

$$\overline{\mathsf{R}}(fX + hY, Z)W = f\overline{\mathsf{R}}(X,Z)W + h\overline{\mathsf{R}}(Y,Z)W,$$

і аналогічно для інших аргументів. Звідси випливає його ''тензорність'': для будь-якої $p \in \overline{M}$ і для будь-яких полів X, Y, Z на $\overline{M}$ вектор $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p$ однозначно визначений векторами X_p, Y_p, Z_p. Іншими словами, визначене 3-лінійне відображення

$$\overline{\mathsf{R}}_p\colon T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

таке, що

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p = \overline{\mathsf{R}}_p(X_p, Y_p)Z_p$$

для будь-яких X, Y, Z.

Тензор кривини використовується для визначення усього, що пов'язане з кривиною ріманових многовидів. Виникає природне питання: як, аналогічно до метрики і зв'язності, перенести кривину на підмноговид? Отже, нехай (M, r) – k-гладкий підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$ вимірності $n \geqslant 2$. Усі пов'язані з ним об'єкти позначаємо як раніше: g, ∇, B і т. д. Нехай тепер X, Y, Z – гладкі поля на M. Позначимо

$$\overline{\mathsf{R}}(X, Y)Z \colon p \in M \mapsto \overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_p r(X_p), d_p r(Y_p)) d_p r(Z_p) \in T_{r(p)}\overline{M}.$$

Це поле на M зі значеннями у $T\overline{M}$ ($(k-3)$-гладке). Щоб його знайти, для кожної $p \in M$ продовжимо, як раніше, поля $dr(X), dr(Y), dr(Z)$ на деякий окіл $r(p)$ полями $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ відповідно. В силу властивостей $\overline{\mathsf{R}}$, тоді маємо

$$(\overline{\mathsf{R}}(X, Y)Z)_p = (\overline{\mathsf{R}}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z})_{r(p)}.$$

За означенням,

$$\overline{\mathsf{R}}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]}\overline{Z} =$$

$$= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\left(\overline{\nabla}_Y Z\right)} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\left(\overline{\nabla}_X Z\right)} - \overline{\nabla}_{\overline{[X,Y]}}\overline{Z},$$

оскільки за побудовою $\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}$ продовжує $\overline{\nabla}_Y Z$, $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}$ продовжує $\overline{\nabla}_X Z$, і, як ми показали у одному з доведень попереднього розділу, $[\overline{X}, \overline{Y}]$ продовжує поле $dr([X, Y])$. Тому для точок $r(M)$ звідси випливає

$$\overline{\mathsf{R}}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

де у перших двох членах ми застосовуємо $\overline{\nabla}_X$ і $\overline{\nabla}_Y$ відповідно до полів на M зі значеннями у $T\overline{M}$ так само, як ми це робили раніше з дотичними і нормальними полями; коректність такого позначення доводиться аналогічно до Lem.1. і 2. вище. При цьому до цих полів ми можемо застосувати розкладення Гаусса, зокрема,

$$\overline{\nabla}_Y Z = dr(\nabla_Y Z) + B(Y, Z).$$

Сума продовжень дотичного і нормального доданків продовжує $\overline{\nabla}_Y Z$ (це не обов'язково те ж продовження, що вище, але в силу коректності це не важливо):

$$\overline{\overline{\left(\overline{\nabla}_Y Z\right)}} = \overline{\nabla_Y Z} + \overline{B(Y,Z)}.$$

Тоді у точках $r(M)$ з лінійності, розкладень Гаусса і Вейнгартена маємо

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z) + \overline{\nabla}_X (B(Y,Z)) =$$

$$= dr\,(\nabla_X \nabla_Y Z) + B(X, \nabla_Y Z) - dr\left(A_{B(Y,Z)} X\right) + \nabla^{\perp}_X B(Y,Z).$$

Міняємо місцями X та Y:

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = dr\,(\nabla_Y \nabla_X Z) + B(Y, \nabla_X Z) -$$

$$- dr\left(A_{B(X,Z)} Y\right) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z).$$

Нарешті, розкладення Гаусса дає

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = dr\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right) + B([X,Y],Z).$$

Позначимо через R тензор кривини (M,g):

$$\mathsf{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Тоді з формул вище робимо висновок:

<u>Cor.</u> Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z = dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right) +$$

$$+B(X,\nabla_Y Z) - B(Y,\nabla_X Z) - B([X,Y],Z) +$$

$$+\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y B(X,Z).$$

Рівняння Гаусса

Ортогонально спроєктуємо $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p$ на $d_pr(T_pM)$ у кожній $p \in M$, отримавши дотичну компоненту

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)^T = dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right).$$

Інколи цю рівність і звуть рівнянням Гаусса, але часто її множать (відносно $\overline{g}$) у точках $r(M)$ на $dr(W)$ для деякого поля W на M. Тоді справа маємо

$$\overline{g}\left(dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right), dr(W)\right) =$$

$$= g\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y, W\right) =$$

$$= g(\mathsf{R}(X,Y)Z,W) - \overline{g}(B(X,W),B(Y,Z)) + \overline{g}(B(Y,W),B(X,Z))$$

за означенням g і зв'язком A з B.

Cor. (Рівняння Гаусса) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z, dr(W)) = g(\mathsf{R}(X,Y)Z, W) -$$

$$-\left(\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) - \overline{g}(B(X,Z), B(Y,W))\right).$$

Згадаємо, що для $p \in M$ і 2-вимірного векторного підпростора (площини) $\sigma \subset T_pM$ секційною кривиною (M, g) (у p) у напрямку σ зветься

$$K(\sigma) = \frac{g_p(\mathsf{R}_p(v,w)w, v)}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2},$$

де v, w – якась пара лінійно незалежних векторів з σ; це число не залежить від v, w, тільки від σ і геометрії многовида.

Тут ми будемо цю секційну кривину звати внутрішньою кривиною підмноговида (M, r) у напрямку σ і позначати $K_{int}(\sigma)$.

<u>def.</u> Зовнішньою кривиною підмноговида (M, r) у напрямку площини $\sigma \subset T_pM$ зветься

$$K_{ext}(\sigma) := \frac{\overline{g}_{r(p)}(B_p(v,v), B_p(w,w)) - \overline{g}_{r(p)}(B_p(v,w), B_p(v,w))}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2},$$

де $v, w \in \sigma$ – лінійно незалежні вектори.

<u>Впр.</u> Вираз справа не залежить від вибору v, w, тільки від σ і геометрії підмноговида (можна, наприклад, довести це як для секційної кривини, перевіривши, що $\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) - \overline{g}(B(X,Z), B(Y,W))$ має ті ж

симетрії, що й тензор Рімана $g(\mathsf{R}(X,Y)Z,W)$ многовида (M,g), за $X,Y,Z,W)$.

<u>Cor.</u> (Теорема Гаусса про кривину) Нехай $p \in M$ і $\sigma \subset T_pM$ – площина. Тоді секційна кривина $(\overline{M},\overline{g})$ у напрямку $d_pr(\sigma) \subset d_pr(T_pM) \subset T_{r(p)}\overline{M}$ (це площина, бо r – занурення) дорівнює

$$\overline{K}(d_pr(\sigma)) = K_{int}(\sigma) - K_{ext}(\sigma).$$

► Запишемо рівняння Гаусса у p і підставимо v,w,w,v (для лінійно незалежних $v,w \in \sigma$) замість значень X,Y,Z,W відповідно:

$$\overline{g}_{r(p)}(\overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_pr(v),d_pr(w))d_pr(w),d_pr(v)) = g_p(\mathsf{R}_p(v,w)w,v)-$$

$$-\left(\overline{g}_{r(p)}(B_p(v,v),B_p(w,w)) - \overline{g}_{r(p)}(B_p(v,w),B_p(v,w))\right).$$

Поділивши на нормуючий знаменник

$$\overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(v))\overline{g}_{r(p)}(d_p r(w), d_p r(w)) - \overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(w))^2 =$$

$$= g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2$$

(за означенням g), отримаємо вирази для кривин. ◀

<u>Rem.</u> У випадку гіперповерхні доданки, що містять другу ф.ф., можна переписати з використанням відповідної скалярної форми (для (локального) одиничного нормального поля ξ):

$$\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) = \overline{g}(b(X,W)\xi, b(Y,Z)\xi) = b(X,W)b(Y,Z),$$

і аналогічно для другого. Так само зовнішня кривина має вигляд:

$$K_{ext}(\sigma) = \frac{b_p(v,v)b_p(w,w) - b_p(v,w)^2}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2}.$$

Rem. Нехай $(\overline{M}, \overline{g})$ має постійну секційну кривину c. Тоді, як відомо,

$$\overline{\mathsf{R}}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = c(\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z})\overline{X} - \overline{g}(\overline{X}, \overline{Z})\overline{Y}),$$

звідки у точках $r(M)$

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z = c(\overline{g}(dr(Y), dr(Z))dr(X) - \overline{g}(dr(X), dr(Z))dr(Y)) =$$

$$= c(g(Y,Z)dr(X) - g(X,Z)dr(Y)).$$

Cor. (Рівняння і теорема Гаусса для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M

$$c(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) = g(\mathsf{R}(X,Y)Z, W) -$$

$$- (\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) - \overline{g}(B(X,Z), B(Y,W))) \,.$$

Для будь-якої $p \in M$ і площини $\sigma \subset T_pM$

$$K_{int}(\sigma) - K_{ext}(\sigma) = c.$$

Rem. Тобто зовнішні кривини однозначно визначені рімановою геометрією (M, g) і зберігаються при його ізометріях. Зокрема, при $c = 0$ $K_{int} = K_{ext}$. У E^3 при $n = \dim M = 2$ (коли зовнішня кривина, як і секційна, у кожній точці одна – гауссова кривина) це і є оригінальна теорема Гаусса (theorema egregium).

Ex. Розглянемо гіперсферу з центром x_0 радіуса R

$$S_R^n(x_0) := \{x \mid \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = R^2\} \subset E^{n+1},$$

що задана (∞-гладким) вкладенням $r\colon S^n \to E^{n+1}$ стандартної сфери. Нехай $(u^1,\dots,u^n)$ – якісь локальні координати на $U \subset S^n$. Тоді, диференціюючи умову з означення сфери

$$\langle r - x_0, r - x_0\rangle = R^2$$

за u^i, отримаємо (як і раніше, тут всюди використовуємо ототожнення $T_x\mathbb{R}^{n+1}$ з $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$2\langle r_i, r - x_0\rangle = 0$$

для усіх $i = \overline{1,n}$, що означає $0 \neq r - x_0 \perp d_p r(T_p S^n)$ для усіх $p \in U$ (а отже і для усіх $p \in S^n$, оскільки ця умова не залежить від локальних координат). Тобто можна обрати (глобальне) гладке одиничне нормальне поле двома способами:

$$\xi := \pm\frac{r - x_0}{|r - x_0|} = \pm\frac{r - x_0}{R}.$$

Диференціюємо попередню рівність ще раз за u^j:

$$\langle r_{ij}, r - x_0 \rangle + \langle r_i, r_j \rangle = 0,$$

тобто

$$b_{ij} = \langle r_{ij}, \xi \rangle = \pm \frac{1}{R} \langle r_{ij}, r - x_0 \rangle = \mp \frac{1}{R} \langle r_i, r_j \rangle = \mp \frac{1}{R} g_{ij}$$

для усіх $i, j = \overline{1, n}$. Тобто незалежно від локальних координат $b = \mp \frac{1}{R} g$ на S^n. Зокрема, з теореми Гаусса тоді для будь-якої $p \in S^n$ і площини $\sigma \subset T_p S^n$

$$K_{int}(\sigma) = K_{ext}(\sigma) = \frac{b_p(v,v) b_p(w,w) - b_p(v,w)^2}{g_p(v,v) g_p(w,w) - g_p(v,w)^2} = \frac{1}{R^2},$$

тобто g – метрика на S^n постійної секційної кривини $\frac{1}{R^2}$ (1 для стандартного вкладення).