39.18 – з 39.17 у 1. Y повинен бути лін. зв'язним (бо $\forall f \in C(X,Y)$ $f \sim$ постійному $f(x)$, $x \in X$, але $f(x)$ і $g(x)$ для $f \neq g$ можуть лежати у різних зв. комп. Y; якщо ж Y лін. зв., то $\forall$ 2 постійних ген: $f(x) \sim g(x)$.)

39.21(6) Ан-но $S^3 \setminus S^1$ у 39.13(3), $S^n \setminus S^m \cong \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \sim S^{n-m-1}$ за 39.13(2) (гомео-зм – стереогр. проекція). Тому $\forall x \in S^n \setminus S^m$

$$\pi_1(S^n \setminus S^m, x) = \left[\begin{array}{ll} \{[e_x]\}, & n = m+1,\ n \geq m+3 \\ \cong \mathbb{Z}, & n = m+2 \end{array}\right.$$

39.21(10) $X = S^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$, де $\mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}^2$ $\forall i$, $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Можна побудувати гомео-зм $\Phi: X \to S^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, стягнувши ці диски у точки. Нехай $\Psi: S^2 \setminus \{x_n\} \to \mathbb{R}^2$ – стереогр.

відн. x_n

пр., тоді $\Psi \circ \Phi: X \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\Psi(x_i)\}_{i=1}^{n-1}$ – гомео-зм. Отже, $\pi_1(X, x) \cong$

$$\cong \pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{\Psi(x_i)\}_{i=1}^{n-1}, \Psi(\Phi(x))\right) \left[\begin{array}{l} \cong \pi_1(\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n-1}, \overset{\forall \text{ точка}}{y}) \cong \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle,\ n \geq 2 \\ = \{[e_{\Psi(\Phi(x))}]\},\ n = 1. \end{array}\right.$$

39.21(7) $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1$

$\mathbb{R}P^3 = S^3 / \mathbb{Z}_2$, тобто $S^3/\sim$: $x \sim -x$, і ан-но S^1. Якщо $f: S^3 \setminus S^1 \to S^1$ – деф. ретракція така, що $f(-x) = -f(x)$

$\forall x$, то вона факторизується у деф. ретракцію

$\tilde{f} : \mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1 : \{x, -x\} \mapsto \{f(x), -f(x)\}$

(гомотопія теж факторизується). Тоді $\mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1 \sim \mathbb{RP}^1 \cong S^1 \Rightarrow$

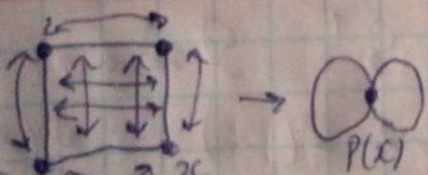
$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

<u>39.21(8)</u> $X = T^2 \setminus \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^2$ – ручка.

$X \cong Y/\sim$, де Y – квадрат з діркою, а $\sim$ – як для T^2:

Деф. ретракція $f : Y \to Z$, де Z – межа квадрата:

факторизується у деф. ретракцію $\tilde{f} : X \to Z/\sim \cong S^1 \vee S^1$

(

), тому $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a, b \rangle$.

39.21

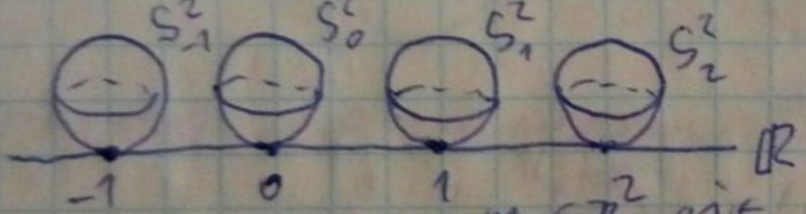
(5.) $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$

За 39.9, $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$

Універсальним накриттям $S^2 \vee S^1$ є $X := \left(\mathbb{R} \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} S^2_n\right)/\sim$,

де $\sim$ $\forall n$ ототожнює 1 точку $x_n \in S^2_n$ з $n \in \mathbb{R}$:

(див. 32.11)

X 

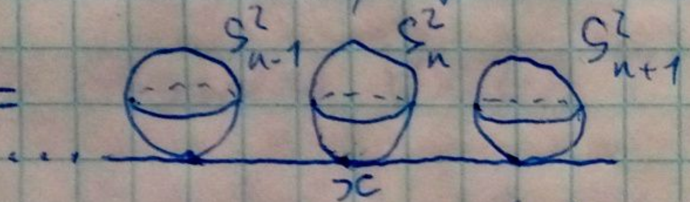
, "гірлянда". Однозв'язна.

$\mathbb{Z}$ діє на X: $\underbrace{\text{факторизацією}}_{m \in \mathbb{Z}^2 \text{ діє}}$ $x \mapsto x+m$, $S^2_n \mapsto S^2_{n+m}$.

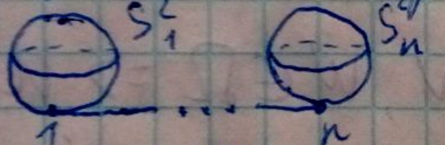
Це непер. цілком розр. дія, і $X/\mathbb{Z} \cong S^2 \vee S^1$ (намотуємо гірлянду). Тому дійсно $(X, S^2 \vee S^1, p)$ — унів. накр.,

і тому $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) \simeq \pi_1(S^2 \vee S^1, \varphi(x)) \simeq \mathbb{Z}$ $\left(\begin{array}{l} \pi_1(S^2 \setminus \{x,y\}, z) \simeq \mathbb{Z} \\ \pi_1(S^2 \cup [x,y], z) \simeq \mathbb{Z} \end{array} \right)$

Покажемо, що накриваючий простір букета $S^2 \vee S^1$

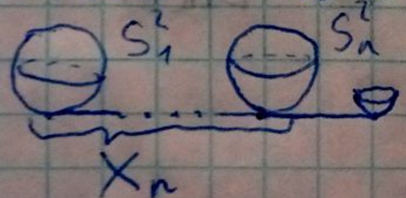
$X =$ 

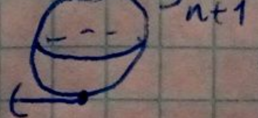
дійсно однозв'язний. $\forall$ петлі $f \in C(I, X)$ у т. $x \in X$ $f(I)$ – компакт, а тому перетинає лише скінч. кільк. сфер S^2_n (бо, наприклад, $f(I)$ обмежена у м-ці, що індукована вкладенням X у $\mathbb{R}^3$). Тому достатньо довести однозв'язність "скінченного" аналога

$X_n =$ 

$\forall n$. За індукцією: при $\underline{n=1}$ $X_1 \cong S^2$ однозв.

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$: Нехай X_n однозв. Використаємо $\underline{32.11}$: $X_{n+1} = U \cup V$,

де $U :=$ 

– відкрита і $\sim X_n \Rightarrow$ однозв'язна за припущенням і V: 

– відкрита і $\sim S^2_{n+1} \Rightarrow$ однозв.

Тоді $\emptyset \neq U \cap V =$  – лін. зв'язний, тому X_{n+1} однозв. за $\underline{32.11}$.

32.5. X - антидискретний, $x \in X$. $\pi_1(X, x)$?

$\{[e_x]\}$ ($\forall$ відображення в X неперервне, тому $\forall f, g: Y \to X$ гомотопні і зокрема $\forall$ 2 петлі f, g у x гомотопні:

$$F(t,s): \begin{cases} f(t), & s=0 \\ g(t), & s=1 \\ x, & \text{решта } (t,s) \end{cases} \quad \text{- гомотопія}).$$

X - дискретний, $x \in X$. $\pi_1(X, x)$? Коли він однозв'язний

Тоді $\{[e_x]\}$, бо усі петлі постійні: $f \in C(I, X) \Rightarrow$ $f(I)$ міститься у зв. компоненті x, тобто $\{x\}$.

X однозв'язний $\Leftrightarrow$ $|X| = 1$, (коли є лін. зв'язним).

32.7. Показати, що зв'язна двокрапка

$X = \{x, y\}$; $T = \{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$ однозв'язна.

Показано, що вона лін. зв'язна. Для цього достатньо побудувати шлях $f \in C(I, X)$: $f(0) = x$, $f(1) = y$ (тоді $\overline{f}$ зв'язує y з x, e_x - x з собою, e_y - y з собою)

$$f(t) := \begin{cases} x, & t \in [0,1) \\ y, & t = 1 \end{cases}.$$

Непер.: $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\{x\}) = [0,1)$, $f^{-1}(\{x,y\}) = I$ - відкр. в I.

Тоді $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$ за лін. зв'язністю, тому достатньо знайти $\pi_1(X,x)$. Нехай $f \in C(I,X)$ - петля в x: $f(0) = f(1) = x$.

$$F(t,s) := \begin{cases} f(t), & s = 0 \\ x, & s \in (0,1] \end{cases}.$$

Воно непер. $I \times I \to X$: $F^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $F^{-1}(\{x\}) = (f^{-1}(\{x\}) \times I) \cup (I \times (0,1])$ і $F^{-1}(\{x,y\}) = I \times I$ відкр. в $I \times I$.

$F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = x$, тому це гом., $f \sim e_x$.

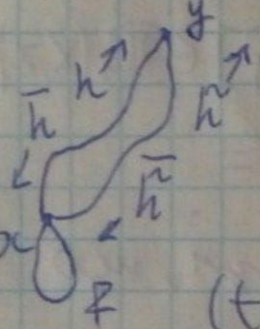
33.C. (Перша частина Впр. 4.2 лекцій).

Нехай $h, \tilde{h} \in C(I, X)$ - шляхи, $h(0) = \tilde{h}(0) = x$, $h(1) = \tilde{h}(1) = y$.

З ними пов'язані ізоморфізми фунд. груп:

$\alpha : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) : [f] \mapsto [\bar{h} * f * h]$ і

$\tilde{\alpha} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) : [f] \mapsto [\bar{\tilde{h}} * f * \tilde{h}]$



Показати, що $h \sim \tilde{h} \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha}$.

$h \sim \tilde{h} \Rightarrow \bar{h} \sim \bar{\tilde{h}}$: якщо F - відн. гомотопія, то $(t, s) \mapsto F(1-t, s)$ - гом. $\bar{h}$ і $\bar{\tilde{h}}$. Тому $\bar{h} * f * h \sim$
$\sim \bar{\tilde{h}} * f * \tilde{h} \Rightarrow \alpha([f]) = \tilde{\alpha}([f])\ \forall\ [f] \in \pi_1(X, x)$.

33.I. Якщо h - петля в x, то відп. $\alpha : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ має вигляд $\alpha([f]) = [h]^{-1}[f][h]$, тобто є спряженням (внутрішнім автоморфізмом) у $\pi_1(X, x)$.

З дов.: $\alpha([f]) = [\bar{h} * f * h] = [\bar{h}][f][h] = [h]^{-1}[f][h]$.

33.J. (Друга частина Впр. 4.2.). α не залежить від $[h]$ $\Leftrightarrow \pi_1(X, x)$ абелева.

(Тут $\pi_1(X,x)$ аб. $\Leftrightarrow$ $\pi_1(X,y)$ аб., бо α – ізоморфізм. Тому (якщо X лін. зв. і $\pi_1(X,x)$ аб., то й $\forall y \in X$ $\pi_1(X,y)$ аб.).

$\Leftarrow$. Нехай $\pi_1(X,x)$ аб. Треба показати, що $\forall h, \tilde{h}$, що сполучають x і y відп. ізоморфізми $\alpha = \tilde{\alpha}$. $\forall [f] \in \pi_1(X,x)$

$$\tilde{\alpha}^{-1}(\alpha([f])) = \left[\begin{matrix}\text{див. опис} \\ \tilde{\alpha}^{-1} \text{ в лекціях}\end{matrix}\right] = [\tilde{h} * (\bar{h} * f * h) * \bar{\tilde{h}}] =$$

$$= [\overline{(h * \bar{\tilde{h}})} * f * (h * \bar{\tilde{h}})] = \beta([f]),$$

де β – ізоморфізм, що відп. петлі $h * \bar{\tilde{h}}$ в x. Тут використали

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f} \quad \text{і} \quad \bar{\bar{f}} = f.$$

$$\left(\overline{f*g}(t) = f*g(1-t) = \begin{cases} f(2-2t), & 1-t \in [0,\frac{1}{2}] \\ g(1-2t), & 1-t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} = \begin{cases} \bar{g}(2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \bar{f}(2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} = \bar{g} * \bar{f}(t)\right)$$

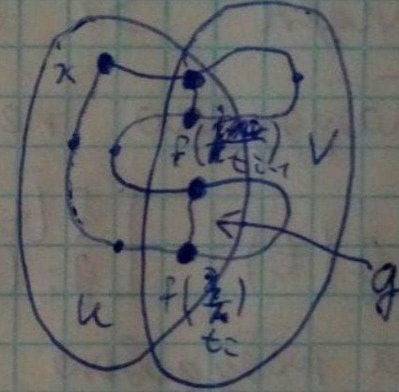
Тобто $\tilde{\alpha}^{-1}(\alpha([f])) = \beta([f]) = \left[\begin{matrix}33.1 \text{ або} \\ \text{безпосередньо}\end{matrix}\right] = [h * \bar{\tilde{h}}]^{-1}[f][h * \bar{\tilde{h}}] = [f]$,

бо $\pi_1(X,x)$ аб. Т.ч., $\tilde{\alpha}^{-1} \circ \alpha = id_{\pi_1(X,x)} \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha}$.

$\Rightarrow$. Абелевість $\pi_1(X,x)$ $\Leftrightarrow$ внутрішній автоморфізм тривіальний, тобто $[f] = [h]^{-1}[f][h] = \alpha([f])$ $\forall [f]$.

Але за умовою із-м α, що відповідає h [петлі в x), дорівнює $id_{\pi_1(x,x)}$, що відп. e_x. Це й дає потрібне.

37.11. X – лін. зв. ТП, $X = U \cup V$, U і V відкриті, однозв'язні, $\emptyset \neq U \cap V$ лін. зв. Тоді X однозв'язний.



В силу лін. зв., дост. показати, що $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для деякої $x \in X$. Нехай для визначеності $x \in U$.

$\forall$ петлі f у x: $f \in C(I, X) \Rightarrow \{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ – відкр. покр. комп. I. Застосуємо лему Лебега: $\exists$ число Лебега $\delta > 0$ і $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \delta$. Тоді $\forall\ i = \overline{1,n}$ $f([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U$ або $\subset V$.

~~[illegible]~~ За необхідності об'єднавши ці відрізки, отримаємо розбиття $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ таке, що $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ для непарних i, $\subset V$ – для парних. За побудовою m непарне. Зокрема, $f(t_1), \dots, f(t_{m-1}) \in U \cap V$.

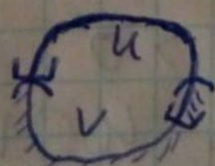
Для кожного парного $i > 0$ з'єднаємо $f(t_{i-1})$ і $f(t_i)$ шляхом g_i у лін. зв. $U \cap V$: $g_i \in C([t_{i-1}, t_i], U \cap V)$,

$g_i(t_{i-1}) = f(t_{i-1})$, $g_i(t_i) = f(t_i)$. Тоді g_i і $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ шляхи в однозв'язному V зі спільними початком і кінцем. За критерієм однозв'язності, $g_i \sim f|_{[t_{i-1},t_i]}$. Побудуємо петлю g, замінивши усі $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ на g_i:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [t_{i-1},t_i], \ i \text{ непарне.} \\ g_i(t), & t \in [t_{i-1},t_i], \ i>0 \text{ парне.} \end{cases}$$

За побудовою $g \in C(I,X)$, $g(0)=g(1)=x$ – петля в x, $g \sim f$ і $g(I) \subset U$. Оскільки U однозв., $g \sim e_x$:
$f \sim g \sim e_x$.

Лін. зв'язність X в умові зайва: вона випливає з лін. зв. U, V і того, що $U \cap V \neq \emptyset$.

32.12. Умова відкритості U і V у 32.11 суттєва.
Дійсно, розіб'ємо $X = S^1$: 

U, V - однозв., $U \cap V \neq \emptyset$ і лін. зв., але X неоднозв. U - не відкр.