

Основи алгебраїчної топології

Петров Є.В.

1 квітня 2025 р.

Зміст

1	Гомотопія	3
2	Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність	7
3	Гомотопії шляхів	11
4	Фундаментальна група	14
5	Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи	18
6	Однозв'язні простори	23
7	Накриття	26
8	Накриття та шляхи	33
9	Накриття та фундаментальні групи	37
	9.1 Теорема про обчислення фундаментальної групи	37
	9.2 Приклади обчислення фундаментальних груп	42
10	Підняття у накриваючий простір. Морфізми накрить	47
	10.1 Підняття відображень у накриваючий простір	47
	10.2 Морфізми накрить. Ізоморфні накриття. Накриття з відміченими точками	54
11	Автоморфізми накрить та регулярні накриття	61

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри	76
Література	87

Алгебраїчна (алгебрична) топологія – це розділ топології, що вивчає інваріанти алгебраїчної природи: групи, кільця, векторні простори тощо, які певним чином визначаються даним топологічним простором. Найчастіше вони є інваріантами відносно слабшого за гомеоморфність відношення еквівалентності – гомотопічної еквівалентності. Алгебраїчна топологія як предмет систематичного вивчення виникла у кінці дев'ятнадцятого сторіччя у роботах Анрі Пуанкаре (як і два основні підходи, яким ми приділятимемо увагу – гомотопічний і гомологічний), але й досі займає центральне місце в топології та її застосуваннях. Ми почнемо з деяких важливих для неї загальнотопологічних понять.

1 Гомотопія

У цьому розділі ми побачимо, що топологія встановлює відношення еквівалентності не тільки між просторами, а й між відображеннями. Поняття гомотопії формалізує інтуїтивне уявлення про "деформацію" одного відображення в інше. Нагадаємо, що літерою I традиційно позначається відрізок $[0, 1]$.

Означення 1.1. Нехай $f, g: X \rightarrow Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. *Гомотопією* f і g зветься неперервне відображення $F: X \times I \rightarrow Y$ таке, що $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$ для будь-якої $x \in X$. Гомотопія F відображень f і g зветься *A -гомотопією*, де $A \subset X$ – деяка підмножина, якщо крім цього $F(x, s) = f(x) = g(x)$ для будь-яких $x \in A$ і $s \in I$. Якщо існує гомотопія (відповідно, A -гомотопія) f і g , то говорять, що f *гомотопне* (A -гомотопне) g і пишуть $f \sim g$ ($f \sim_A g$).

Зауваження. Тут на $X \times I$ вводиться, як зазвичай, топологія прямого добутку. A -гомотопію ще називають гомотопією, що *зв'язана на A* . З означення випливає, що для її існування необхідне співпадіння f і g на A : $f|_A = g|_A$. "Звичайна" гомотопія (т. зв. *вільна*) – це \emptyset -гомотопія.

Твердження 1.1. *A -гомотопність відображень є відношенням еквівалентності на $\{f \in C(X, Y) \mid f|_A = f_A\}$ (підмножині неперервних відображень з X у Y , що збігаються на A з деяким фіксованим f_A). Зокрема, гомотопність – відношення еквівалентності на $C(X, Y)$.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом еквівалентності для A -гомотопності (звичайно, вони тоді будуть виконуватися й у частковому випадку гомотопності).

- $f \underset{A}{\sim} g$ для будь-якого f з $f|_A = f_A$: неважко перевірити, що $F(x, s) := f(x)$ задає потрібну A -гомотопію.
- Якщо $f \underset{A}{\sim} g$ і F – відповідна A -гомотопія, то визначимо $G: X \times I \rightarrow Y$ умовою $(x, s) \mapsto F(x, 1-s)$. Воно неперервне як композиція неперервних відображень, $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$, $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ для $x \in X$, $G(x, s) = F(x, 1-s) = f_A(x) = f(x) = g(x)$ для $x \in A$, $s \in I$, тому G – A -гомотопія g і f . Отже, $g \underset{A}{\sim} f$.
- Нехай $f \underset{A}{\sim} g$, $g \underset{A}{\sim} h$. Зауважимо, що при цьому $h|_A = g|_A = f|_A = f_A$ за означенням A -гомотопності. Нехай F і G – відповідні A -гомотопії. Визначимо $H: X \times I \rightarrow Y$ умовою

$$H(x, s) := \begin{cases} F(x, 2s), & s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(x, 2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене, бо при $s = \frac{1}{2}$ маємо $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ за умовою. Його неперервність впливає з неперервності F і G (аналогічно до неперервності добутку шляхів; див. також [3, с. 63-64]). При цьому $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ для $x \in X$ і $H(x, s) = f_A(x) = f(x) = h(x)$ для $x \in A$, $s \in I$ за властивостями F і G . Отже, H – A -гомотопія, тобто $f \underset{A}{\sim} h$.

■

Зауваження. Гомотопія F задає для кожного $s \in I$ відображення $f_s := F(\cdot, s): X \rightarrow Y$ (тобто $f_s(x) = F(x, s)$ для $x \in X$), що є неперервним як композиція неперервних $x \mapsto (x, s)$ (перевірте, що таке відображення $X \rightarrow X \times I$ дійсно неперервне) і F . Тобто гомотопію можна розуміти як "неперервну сім'ю" відображень $\{f_s\}_{s \in I} \subset C(X, Y)$ або як "шлях" $I \rightarrow C(X, Y): s \mapsto f_s$. При цьому за означенням $f_0 = f$ і $f_1 = g$, тобто цей "шлях" з'єднує f і g у $C(X, Y)$.

Виникає природне запитання: чи можна ввести топологію на $C(X, Y)$ так, щоби гомотопії дійсно були шляхами у цьому просторі? Відповідь міститься у наступній вправі (див. також [2, с. 145-148], [3, с. 145-148, 186-187] або [14, с. 281-290]).

Вправа 1.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Для будь-яких компактної $K \subset X$ і відкритої $U \subset Y$ позначимо

$$W(K, U) := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

1. Показати що $\{W(K, U)\}$ (для усіх пар K і U) є передбазою деякої топології на $C(X, Y)$. Вона зветься *компактно-відкритою*.
2. Показати, що якщо X компактний а Y метричний з метрикою ρ , то компактно-відкрита топологія на $C(X, Y)$ породжується метрикою *рівномірної збіжності*

$$\sigma(f, g) := \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}.$$

Показати, що для $Y = \mathbb{R}$ (з евклідовою метрикою) збіжність послідовності функцій у цій метриці рівносильна рівномірній збіжності (хоча б для випадку $X = I$).

3. Показати, що якщо X локально компактний та хаусдорфовий, то шляхи у $C(X, Y)$ з компактно-відкритою топологією – це в точності відображення вигляду $s \mapsto F(\cdot, s)$, де F – деяка гомотопія.

Зауваження. З аналогічних міркувань випливає, що для кожної $x \in X$ відображення $I \rightarrow Y: s \mapsto F(x, s)$ неперервне, а отже є шляхом, що з'єднує точки $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$. Зокрема, $f(x)$ і $g(x)$ повинні тоді лежати в одній компоненті лінійної зв'язності Y (в силу твердження 28.2 лекцій з топології).

Наслідок 1.1. *Якщо $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопні, то для будь-якої $x \in X$ її образи $f(x)$ і $g(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності Y .*

Приклад 1.1. Нехай $X = \{x\}$ – одноточковий простір. Будь-які відображення $f, g: X \rightarrow Y$ у довільний простір Y мають вигляд $f: x \mapsto f(x)$, $g: x \mapsto g(x)$ (і автоматично є неперервними як постійні). Якщо f і g гомотопні, то $f(x)$ і $g(x)$ можна з'єднати шляхом в Y за попереднім наслідком. Неважко побачити, що в даному випадку вірно й обернене: якщо $h: I \rightarrow Y$ – шлях, що з'єднує $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x, s) := h(s)$ задає гомотопію f і g .

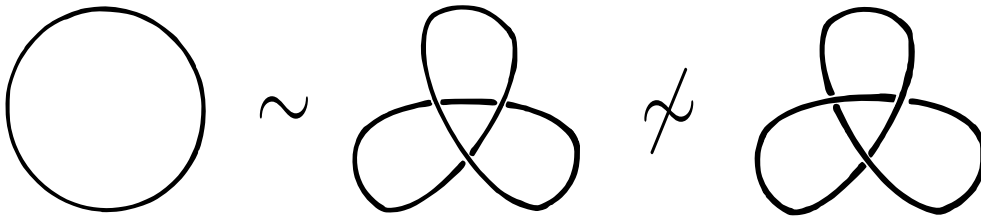
Приклад 1.2. Нехай $Y \subset \mathbb{R}^n$ – опукла підмножина. Тоді для будь-яких топологічного простору X , підмножини $A \subset X$ і відображень $f, g \in C(X, Y)$ таких, що $f|_A = g|_A$, маємо $f \underset{A}{\sim} g$. Дійсно, відображення $F: X \times I \rightarrow Y$, що визначене умовою $F(x, s) := (1-s)f(x) + sg(x)$ (тобто з'єднує $f(x)$ і $g(x)$ відрізками, пор. з прикладом 23.7 лекцій з топології) є тоді неперервним і задовольняє означенню A -гомотопії f і g .

Вправа 1.2. Показати, що те ж саме вірно для зірчатої $Y \subset \mathbb{R}^n$ і $A = \emptyset$ (тобто для вільних гомотопій).

Приклад 1.3. Нехай тепер $Y \subset S^n$ – відкрита напівсфера n -вимірної сфери для $n \geq 1$, тобто її перетин з відкритим напівпростором \mathbb{R}^{n+1} відносно деякої гіперплощини, що проходить через початок координат (центр сфери), а простір X довільний. Аналогічно до минулого прикладу можна показати, що тоді будь-які $f, g \in C(X, Y)$ є A -гомотопними (звичайно, якщо $f|_A = g|_A$). Гомотопія F при цьому будується за допомогою менших дуг великих кіл сфери (випишіть її явно, використовуючи формулу з прикладу 23.8 лекцій з топології).

Зауваження. Інколи розглядають гомотопії між відображеннями, що задовольняють деяким додатковим обмеженням, такі, що усі ”проміжні” відображення f_s задовольняють тим же обмеженням. У цьому випадку гомотопію зазвичай називають *ізотопією*.

Приклад 1.4. *Вузлом* називається вкладення кола S^1 у \mathbb{R}^3 (тобто будь-яке ін’єктивне неперервне відображення $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в силу компактності кола і наслідку 20.4 курсу топології). *Ізотопією* вузлів f і g зветься їх гомотопія $F \in C(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$ така, що $f_s = F(\cdot, s): S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$. Якщо існує ізотопія вузлів, вони називаються *ізотопними*. Нижче зображені т. зв. *тривіальний вузол*, вузол, що ізотопний тривіальному, і вузол, що їм не ізотопний – *трилисник* (але доведення цієї неізотопності потребує спеціальних інваріантів). Детальніше див., наприклад, у [6, с. 213-239], [7] та [11, с. 209-238, с. 239-271 перекладу].



Розглянемо цікавий приклад застосування гомотопії до задачі продовження відображень (іншими прикладами цього класу топологічних задач є теорема Тітце з курсу топології та вправа 2.3 далі). Нагадаємо, що межею стандартної замкненої кулі є стандартна сфера: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Твердження 1.2. *Нехай Y – топологічний простір і $n \geq 1$. Неперервне відображення $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ продовжується до неперервного $\bar{f}: D^n \rightarrow Y$ (тобто $\bar{f}|_{S^{n-1}} = f$) тоді й тільки тоді, коли воно гомотопне постійному відображенню.*

Доведення. \Rightarrow Отже, нехай $f \in C(S^{n-1}, Y)$ продовжується до $\bar{f} \in C(D^n, Y)$. Виберемо $x_0 \in S^{n-1}$ і покладемо $F(x, s) := \bar{f}((1-s)x + sx_0)$. Таке $F: S^{n-1} \times I \rightarrow Y$ коректно визначене в силу опуклості D^n , неперервне як композиція неперервних, $F(\cdot, 0) = \bar{f}|_{S^{n-1}} = f$ і $F(\cdot, 1) = \bar{f}(x_0) = f(x_0)$ – постійне відображення. Тобто F і буде потрібною гомотопією.

\Leftarrow Тепер нехай існує гомотопія F відображення f і постійного відображення S^{n-1} у точку $y_0 \in Y$. Побудуємо $\bar{f}: D^n \rightarrow Y$ наступним чином:

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} y_0, & |x| \in [0, \frac{1}{2}]; \\ F\left(\frac{x}{|x|}, 2 - 2|x|\right), & |x| \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Зауважимо, що \bar{f} коректно визначене і неперервне, оскільки при $|x| = \frac{1}{2}$ маємо $F\left(\frac{x}{|x|}, 1\right) = y_0$. При цьому для $|x| = 1$ (тобто $x \in S^{n-1}$) за побудовою $\bar{f}(x) = F(x, 0) = f(x)$. Таким чином, $\bar{f}|_{S^{n-1}} = f$. \blacksquare

2 Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність

Відношення еквівалентності між топологічними просторами не обмежуються гомеоморфністю. Розглянемо більш загальне відношення, що є основним саме для алгебраїчної топології.

Означення 2.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Неперервні відображення $f: X \rightarrow Y$ і $g: Y \rightarrow X$ зветься *гомотопічно оберненими* одне до одного, якщо $g \circ f \sim id_X$ і $f \circ g \sim id_Y$. Якщо такі f і g існують, то X та Y називають *гомотопічно еквівалентними* й пишуть $X \sim Y$.

Лема 2.1. Нехай $f_0, f_1: X \rightarrow Y$, $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ – неперервні відображення топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ – такі підмножини, що $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, і $f_0 \sim_A f_1$, $g_0 \sim_B g_1$. Тоді $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Доведення. З умови випливає, що $f_0|_A = f_1|_A$ і $g_0|_B = g_1|_B$, тому $(g_0 \circ f_0)|_A = (g_1 \circ f_1)|_A$. Якщо F – A -гомотопія f_0 і f_1 , а G – B -гомотопія g_0 і g_1 , то $H(x, s) := G(F(x, s), s)$ визначає A -гомотопію $g_0 \circ f_0$ і $g_1 \circ f_1$. Дійсно, це неперервне відображення $X \times I \rightarrow Z$ як композиція неперервних, $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x))$ та аналогічно для $s = 1$, і $H(x, s) = G(F(x, s), s) = G(f_0(x), s) = g_0(f_0(x)) = g_1(f_1(x))$ для $x \in A$ та довільного $s \in I$, бо $f_0(x) \in B$. \blacksquare

Твердження 2.1. Гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.

Доведення. Перевіримо аксіоми еквівалентності.

- $X \sim X$ для будь-якого простору X : достатньо взяти $f = g = id_X$.
- Умови $X \sim Y$ та $Y \sim X$ еквівалентні за означенням (воно симетричне відносно X та Y).
- Покажемо тепер транзитивність. Нехай $X \sim Y$ та $Y \sim Z$, тобто існують $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, X)$, $h \in C(Y, Z)$ і $k \in C(Z, Y)$ такі, що $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_Z$ і $k \circ h \sim id_Y$. Тоді $h \circ f \in C(X, Z)$ і $g \circ k \in C(Z, X)$ гомотопічно обернені:

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ id_Y \circ k = h \circ k \sim id_Z,$$

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X,$$

де перші гомотопності в кожному рядку випливають з умови та попередньої леми для випадку вільних гомотопій (застосованої двічі, до кожної з композицій). Таким чином, $X \sim Z$.

■

Приклад 2.1. Якщо $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфізм, то f і f^{-1} неперервні та гомотопічно обернені (бо вони просто обернені). Отже, гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні.

Приклад 2.2. Простір \mathbb{R}^n гомотопічно еквівалентний одноточковому простору $\{y\}$. Дійсно, вибір відображень тут невеликий: нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{y\}$ переводить всі точки \mathbb{R}^n в y , а $g: \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводить y в якусь $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обидва ці відображення постійні, а отже неперервні. Тоді $f \circ g = id_{\{y\}}$ і $(g \circ f)(x) = x_0$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$. З прикладу 1.2 випливає, що постійне відображення $g \circ f$ опуклої \mathbb{R}^n в себе гомотопне $id_{\mathbb{R}^n}$ (при цьому $F(x, s) = (1-s)x_0 + sx$ задає потрібну гомотопію). Отже, f і g гомотопічно обернені. Також зауважимо, що в силу транзитивності тоді $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Далі цей приклад узагальнимо у прикладі 2.4.

Вправа 2.1. Показати, що з $X \sim Y$ і $Z \sim W$ випливає $X \times Z \sim Y \times W$. Так, в силу попереднього прикладу, циліндр гомотопічно еквівалентний колу: $S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1 \times \{y\} \cong S^1$.

Зауваження. Ці приклади демонструють, зокрема, що гомотопічна еквівалентність є слабшим за гомеоморфність відношенням еквівалентності: класи гомотопічної еквівалентності, взагалі кажучи, ширші. Вона не зберігає компактність і навіть потужність множини (але зберігає зв'язність та лінійну зв'язність, див. наступну вправу). Далі ми наведемо ще декілька прикладів гомотопічних еквівалентностей, що пов'язані з поняттям ретракції.

Вправа 2.2. Показати, що якщо $X \sim Y$ і простір X зв'язний (відповідно, лінійно зв'язний), то й простір Y (лінійно) зв'язний. Більш того, у загальному випадку гомотопічно еквівалентні X та Y мають однакові кількості компонент зв'язності та лінійної зв'язності відповідно. Чи вірні аналогічні твердження для властивостей локальних зв'язності та лінійної зв'язності?

Означення 2.2. Ретракцією топологічного простору X на його підмножину $A \subset X$ зветься будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow A$ таке, що $f|_A = id_A$, тобто $f(x) = x$ для будь-якої $x \in A$. Множину A у цьому випадку зовуть ретрактом X .

Приклад 2.3. Будь-яка одноточкова підмножина $\{x\} \subset X$ будь-якого простору є його ретрактом: відповідною ретракцією є постійне відображення у x .

Вправа 2.3. Показати, що $A \subset X$ є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли будь-яке неперервне відображення $g: A \rightarrow Y$ можна продовжити неперервним $\bar{g}: X \rightarrow Y$.

Означення 2.3. Ретракція простору X на $A \subset X$ зветься *деформаційною* (відповідно, *строгою деформаційною*), якщо вона гомотопна (A -гомотопна) тотожному відображенню id_X . У цьому випадку A називають (*строгим*) *деформаційним ретрактом* X .

Зауваження. Тут, коли йдеться про гомотопність ретракції $f: X \rightarrow A$ і тотожного $id_X: X \rightarrow X$, фактично мається на увазі не f , а його композиція з включенням $i: A \rightarrow X$.

Твердження 2.2. Якщо $A \subset X$ – деформаційний ретракт топологічного простору X , то $X \sim A$.

Доведення. Дійсно, нехай $f: X \rightarrow A$ – деформаційна ретракція, а $i: A \rightarrow X$ – відображення включення. Тоді $f \circ i = id_A$ та $i \circ f \sim id_X$ за умовою (див. попереднє зауваження). Отже, ці відображення гомотопічно обернені, тому $X \sim A$.

■

Приклад 2.4. Всі ретракти будь-якої опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$, зокрема, всі одноточкові підмножини $\{x\} \subset X$, є строгими деформаційними. Дійсно, якщо A – ретракт X , то відповідна ретракція f та id_X збігаються на A (обидва дорівнюють id_A), а тому A -гомотопні за прикладом 1.2. Аналогічно, всі ретракти будь-якої зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$ є деформаційними в силу вправи 1.2. Тоді з попереднього твердження випливає, що, зокрема, $X \sim \{x\}$ для будь-якої зірчатої (зокрема опуклої) $X \subset \mathbb{R}^n$ і кожної $x \in X$.

Приклад 2.5. Аналогічно до попереднього прикладу, всі ретракти будь-якої відкритої напівсфери S^n для $n \geq 1$ є строгими деформаційними в силу прикладу 1.3. Зокрема, така напівсфера гомотопічно еквівалентна кожній свої точці.

Приклад 2.6. Сфера S^{n-1} є строгим деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (тут $n \geq 1$). Дійсно, $f(x) := \frac{x}{|x|}$, очевидно, визначає ретракцію. При цьому $F(x, s) := (1-s)\frac{x}{|x|} + sx$ задає неперервне відображення $F: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (бо відрізок $[\frac{x}{|x|}, x]$ не проходить через 0), $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ і $F(x, s) = x$ для будь-яких $x \in S^{n-1}$, $s \in I$. Отже, F є S^{n-1} -гомотопією, тому ретракція f – строга деформаційна. Зокрема, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ за попереднім твердженням. Інший спосіб це побачити – використати вправу 2.1: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, як пам'ятаємо, гомеоморфний $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (ми використовували цей факт у прикладі 23.11 з курсу топології), що, у свою чергу, гомотопічно еквівалентний $S^{n-1} \times \{y\} \cong S^{n-1}$.

Означення 2.4. Топологічний простір X зветься *стяжним*, якщо він гомотопічно еквівалентний одноточковому простору: $X \sim \{y\}$.

Твердження 2.3. *Топологічний простір X стяжний тоді й тільки тоді, коли існує $x_0 \in X$ така, що $\{x_0\}$ – деформаційний ретракт X .*

Доведення. \Rightarrow Нехай X стяжний, тобто існують гомотопічно обернені $f: X \rightarrow \{y\}$ і $g: \{y\} \rightarrow X$. Це постійні відображення (пор. з прикладом 2.2), зокрема, g переводить y у якусь $x_0 \in X$. Тоді $g \circ f: x \mapsto x_0$ – ретракція X на $\{x_0\}$, і $g \circ f \sim id_X$ за умовою, тобто ця ретракція деформаційна.

\Leftarrow Достатність тут випливає з твердження 2.2. ■

Зауваження. Насправді в якості x_0 можна використати будь-яку точку X (перевірте; це випливає з наступного твердження і того, що будь-які два постійні відображення у лінійно зв'язний простір гомотопні за

прикладом 1.1). З прикладів 2.4 і 2.5 випливає, що зірчаті (зокрема опуклі) підмножини \mathbb{R}^n та відкриті напівсфери S^n (при $n \geq 1$) стяжні. Іншим прикладом стяжного простору є скінченне (зв'язне) *дерево*, яке можна побудувати, послідовно склеюючи відрізки кінцями. Наступне твердження легко виводиться з вправи 2.2, але ми доведемо його безпосередньо.

Твердження 2.4. *Будь-який стяжний топологічний простір є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай X стяжний. З попереднього твердження випливає, що ретракція f на деяку $\{x_0\} \subset X$ гомотопна id_X . В силу наслідку 1.1, тоді для будь-якої $x \in X$ точки $x_0 = f(x)$ та $x = id_X(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X . Це й означає, що цей простір лінійно зв'язний.

■

3 Гомотопії шляхів

Наступна вправа демонструє, що поняття гомотопності шляхів у топологічному просторі є не дуже змістовним без додаткових обмежень. Це мотивує наступне за цією вправою означення.

Вправа 3.1. Показати, що шляхи $f, g: I \rightarrow X$ у топологічному просторі X гомотопні (вільно, тобто у сенсі означення 1.1 при $A = \emptyset$) тоді й тільки тоді, коли $f(I)$ та $g(I)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X .

Означення 3.1. Шляхи f і g у топологічному просторі X зі спільним початком та кінцем ($f(0) = g(0)$ і $f(1) = g(1)$) будемо називати *гомотопними*, якщо вони $\{0, 1\}$ -гомотопні. Класи еквівалентності шляхів відносно цього відношення еквівалентності (тобто $\{0, 1\}$ -гомотопності) звуться їх *гомотопічними класами*.

Зауваження. Тобто f і g гомотопні, якщо існує $\{0, 1\}$ -гомотопія (або *гомотопія з закріпленими кінцями*) – відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = f(0) = g(0)$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, для кожного s відображення $f_s = F(\cdot, s)$ (див. зауваження після твердження 1.1) теж буде шляхом з тими ж початком та кінцем, що f і g . Нагадаємо, що $\{0, 1\}$ -гомотопність є відношенням еквівалентності в силу твердження 1.1. У подальшому

гомотопність шляхів будемо завжди розуміти саме в сенсі цього нового означення, при цьому писатимемо просто $f \sim g$, а описану вище $\{0, 1\}$ -гомотопію F будемо називати *гомотопією шляхів f і g* . Гомотопічний клас шляху f позначатимемо через $[f]$ (тобто $[f] = [g]$ означає, що $f \sim g$).

Приклад 3.1. З прикладу 1.2 випливає, що у опуклій підмножині $X \subset \mathbb{R}^n$ будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні (це вірно й для зірчатої X , і взагалі для будь-якого стяжного простору, як покажемо далі у твердженні 6.1).

Приклад 3.2. Аналогічно, будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем у відкритій напівсфері S^n для $n \geq 1$ гомотопні за прикладом 1.3 (звичайно, така напівсфера теж стяжна).

Лема 3.1. *Нехай $f_0, f_1, g_0, g_1: I \rightarrow X$ – шляхи у просторі X , причому $f_0(0) = f_1(0) = x$, $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0) = y$, $g_0(1) = g_1(1) = z$. Якщо $f_0 \sim f_1$ і $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Доведення. Нехай F, G – гомотопії f_0 і f_1 , g_0 і g_1 відповідно. Визначимо відображення $H: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$H(t, s) := \begin{cases} F(2t, s), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t - 1, s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1}{2}$ маємо $F(1, s) = y = G(0, s)$ для будь-якого $s \in I$ за умовою. При цьому $H(\cdot, 0) = f_0 * g_0$, $H(\cdot, 1) = f_1 * g_1$, $H(0, \cdot) = F(0, \cdot) = x$ і $H(1, \cdot) = G(1, \cdot) = z$. Отже, H – гомотопія шляхів $f_0 * g_0$ і $f_1 * g_1$. ■

Зауваження. Нагадаємо, що, взагалі кажучи, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?). Але він є таким ”у гомотопічному сенсі”, як демонструє наступна лема.

Лема 3.2. *Нехай $f, g, h: I \rightarrow X$ – шляхи у просторі X такі, що $f(1) = g(0) = y$, $g(1) = h(0) = z$. Тоді $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Доведення. За означенням добутку шляхів маємо

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ g(4t - 1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ h(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Аналогічно,

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(4t - 2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ h(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{4}]; \\ g(4t - s - 1), & t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]; \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t \in [\frac{s+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{4}$ і $t = \frac{s+2}{4}$ маємо $f(1) = y = g(0)$ і $g(1) = z = h(0)$ відповідно. Крім того, $F(\cdot, 0) = (f * g) * h$, $F(\cdot, 1) = f * (g * h)$, $F(0, \cdot) = f(0)$, $F(1, \cdot) = h(1)$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Зокрема, звідси випливає, що для гомотопічних класів шляхів можна писати $[f * g * h]$, не розставляючи дужки (замість $[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$). За індукцією отримуємо, що це так і для довільної скінченної кількості шляхів.

Лема 3.3. Нехай $f: I \rightarrow X$ – шлях у просторі X з початком $f(0) = x$ та кінцем $f(1) = y$. Тоді $e_x * f \sim f \sim f * e_y$.

Доведення. Нагадаємо, що постійний шлях e_x – це просто постійне відображення I в точку x . Доведемо другу гомотопність, перша доводиться аналогічно (зробіть це). За означенням добутку шляхів:

$$(f * e_y)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & t \in [0, \frac{s+1}{2}]; \\ y, & t \in [\frac{s+1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{s+1}{2}$ маємо $f(1) = y$, і $F(\cdot, 0) = f * e_y$, $F(\cdot, 1) = f$, $F(0, \cdot) = f(0) = x$, $F(1, \cdot) = y$. Таким чином, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Лема 3.4. Нехай $f: I \rightarrow X$ – шлях у просторі X з початком $f(0) = x$ та кінцем $f(1) = y$. Тоді $f * \bar{f} \sim e_x$ і $\bar{f} * f \sim e_y$.

Доведення. Згадаймо, що обернений шлях \bar{f} визначений умовою $\bar{f}(t) = f(1 - t)$. Зауважимо, що друга гомотопність впливає з першої (просто поміняємо f та \bar{f} місцями і помітимо, що $\overline{\bar{f}} = f$), отже достатньо довести першу. За означенням добутку:

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(2 - 2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

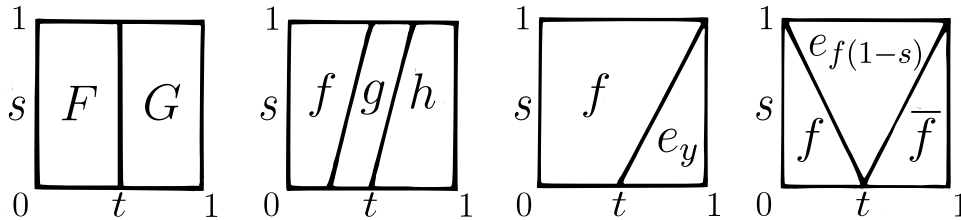
Визначимо відображення $F: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$F(t, s) := \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1 - s), & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2 - 2t), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{2}$ і $t = \frac{1+s}{2}$ маємо одне й те саме значення $f(1 - s)$. При цьому $F(\cdot, 0) = f * \bar{f}$, $F(\cdot, 1) = e_x$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = f(0) = x$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Деяке уявлення про логіку побудови гомотопій в цих лемах дають наступні діаграми, де область визначення $I \times I$ розділена на частини, кожна з яких позначена символом відображення, що "відповідає" за гомотопію на цій підмножині:



4 Фундаментальна група

Необхідні відомості з теорії груп можна знайти у доповненні, зокрема, означення групи, гомоморфізма та ізоморфізма груп (означення А.1, А.2 та А.3 відповідно). У цьому та інших розділах, що присвячені фундаментальній групі, будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення. Нагадаємо також, що $G \simeq H$ означає ізоморфізмість груп G і H .

Означення 4.1. Нехай X – топологічний простір. *Петлею* (або *замкненим шляхом*) у точці $x \in X$ зветься шлях $f: I \rightarrow X$ з початком та кінцем у x : $f(0) = f(1) = x$.

Теорема 4.1 (Конструкція фундаментальної групи). *Гомотопічні класи петель у точці x топологічного простору X з операцією $[f][g] := [f * g]$ утворюють групу.*

Доведення. Перш за все, зауважимо, що для петель f і g у x добуток $f * g$ визначений і теж є петлею у x , тому можна говорити про його клас $[f * g]$. Переконаємося тепер у коректності введеної операції. Дійсно, якщо $[f_0] = [f_1]$ і $[g_0] = [g_1]$, то $[f_0 * g_0] = [f_1 * g_1]$ за лемою 3.1. Асоціативність операції випливає з леми 3.2:

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f][g * h] = [f]([g][h])$$

для будь-яких гомотопічних класів петель $[f]$, $[g]$ і $[h]$. З леми 3.3 маємо, що $[f][e_x] = [e_x][f] = [f]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[e_x]$ є нейтральним елементом (одиницею групи). Нарешті, з леми 3.4 випливає, що $[f][\bar{f}] = [\bar{f}][f] = [e_x]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[\bar{f}]$ є елементом, що обернений до $[f]$: $[f]^{-1} = [\bar{f}]$. Разом це й означає, що гомотопічні класи $[f]$ з даною операцією утворюють групу. ■

Означення 4.2. Група, що описана в теоремі 4.1, зветься *фундаментальною групою* простору X у точці x . Її позначають через $\pi_1(X, x)$:

$$\pi_1(X, x) = \{[f] \mid f \in C(I, X): f(0) = f(1) = x\}.$$

Зауваження. Фундаментальну групу ще називають *першою гомотопічною групою*. Сенс цієї назви, а також індексу 1 у її позначенні, стане зрозумілим пізніше (див. розділ 14).

Вправа 4.1. Нехай f – петля в x . Оскільки $f(0) = f(1) = x$, це відображення факторизується у неперервне $\hat{f} := f/\sim: I/\{0,1\} \rightarrow X$, де $I/\{0,1\}$ можна ототожнити з S^1 (згадаймо приклад 16.5 лекцій з топології). І навпаки, для будь-якого неперервного $\hat{f}: S^1 \rightarrow X$, що переводить точку $1 = e^0 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ у x , відображення $f: I \rightarrow X: t \mapsto \hat{f}(e^{2\pi it})$ є петлею в x . Тут ототожнюємо S^1 з множиною комплексних чисел модуля 1, як ми вже робили раніше у курсі топології. Показати, що тоді $\{1\}$ -гомотопним відображенням кола відповідають гомотопні шляхи, тобто множина гомотопічних класів таких відображень (відносно $\{1\}$ -гомотопії) таким чином ототожнюється з $\pi_1(X, x)$, більш того, це ототожнення можна перетворити на ізоморфізм груп. Для цього, звичайно, доведеться визначити

добуток класів відображень $S^1 \rightarrow X$ (див. задачу 32.3 у [3]). Таким чином, отримуємо альтернативний опис фундаментальної групи.

Приклад 4.1. Фундаментальна група одностовового простору, очевидно, тривіальна: $\pi_1(\{x\}, x) = \{[e_x]\}$.

Приклад 4.2. Для опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якої $x \in X$ кожна петля f у x гомотопна постійній в силу прикладу 3.1: $[f] = [e_x]$. Тому фундаментальна група також тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$.

Твердження 4.1. *Нехай шлях $h: I \rightarrow X$ з'єднує точки x та y топологічного простору X . Тоді відображення фундаментальних груп*

$$\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y): [f] \mapsto [\bar{h} * f * h]$$

коректно визначене та є ізоморфізмом груп.

Доведення. Зауважимо, що для будь-якого класу $[f] \in \pi_1(X, x)$ шлях f починається і закінчується в x , тому визначений добуток $(\bar{h} * f) * h$, що починається і закінчується в y , а отже його клас $[\bar{h} * f * h]$ належить до $\pi_1(X, y)$. Перевіримо коректність визначення α : якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то з леми 3.1 (застосованої двічі) випливає, що $(\bar{h} * f_0) * h \sim (\bar{h} * f_1) * h$, тобто $[\bar{h} * f_0 * h] = [\bar{h} * f_1 * h]$.

Покажемо тепер, що α – гомоморфізм груп. Для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\begin{aligned} \alpha([f][g]) &= \alpha([f * g]) = [\bar{h} * f * g * h] = [\bar{h} * f * e_x * g * h] = \\ &= [\bar{h} * f * h * \bar{h} * g * h] = [\bar{h} * f * h][\bar{h} * g * h] = \alpha([f])\alpha([g]), \end{aligned}$$

де третя рівність випливає з лем 3.1 і 3.3, а четверта – з лем 3.1 і 3.4 (і, звичайно, ми постійно використовуємо лему 3.2, записуючи гомотопічні класи добутків без розставлення дужок).

Розглянемо відображення

$$\beta: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x): [f] \mapsto [h * f * \bar{h}].$$

Це теж коректно визначений гомоморфізм груп, що перевіряється аналогічно до α . Покажемо, що α і β взаємно обернені. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\beta(\alpha([f])) = [h * \bar{h} * f * h * \bar{h}] = [e_x * f * e_x] = [f],$$

де теж використали усі перелічені вище леми (як саме?). Таким чином, $\beta \circ \alpha = id_{\pi_1(X, x)}$. Аналогічно встановлюємо, що $\alpha \circ \beta = id_{\pi_1(X, y)}$. Це означає, що α і β дійсно взаємно обернені, тому вони є бієкціями, а отже ізоморфізмами груп. ■

Наслідок 4.1. Якщо топологічний простір X лінійно зв'язний, то фундаментальні групи у будь-яких двох точках X ізоморфні: $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ для будь-яких $x, y \in X$.

Зауваження. Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору не залежить від точки з точністю до ізоморфізма. Тому часто для такого простору X позначають через $\pi_1(X)$ єдиний клас еквівалентності (ізоморфності) його фундаментальних груп, і говорять про нього просто як про *фундаментальну групу* X . Наприклад, кажуть, що фундаментальна група опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ тривіальна (в силу прикладу 4.2): $\pi_1(X) = \{e\}$. Зауважимо також, що α з твердження 4.1, взагалі кажучи, залежить від h .

Вправа 4.2. Показати, що α не змінюється при заміні h в межах гомотопічного класу (тобто на $\tilde{h} \sim h$). Показати також, що α взагалі не залежить від h тоді й тільки тоді, коли група $\pi_1(X, x)$ абелева (тобто $[f][g] = [g][f]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$).

Існує цікавий клас топологічних просторів, для яких фундаментальні групи завжди абелеві.

Приклад 4.3. Топологічною групою зветься множина G зі структурами групи та топологічного простору, що узгоджені у наступному сенсі: відображення добутку $\mu: G \times G \rightarrow G: (a, b) \mapsto ab$ та відображення взяття оберненого елемента $\iota: G \rightarrow G: a \mapsto a^{-1}$ є неперервними (де $G \times G$ розглядається з топологією прямого добутку). Прикладами топологічних груп є простір \mathbb{R}^n з операцією додавання векторів, коло $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ з операцією комплексного добутку, тори $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ зі структурами прямого добутку груп (див. означення А.4) і топологічних просторів, матричні групи $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ та $O(1, 1)$ з топологіями, що описані у прикладі 28.2, вправах 28.1 і 28.2 курсу топології, а також матрична група $GL(n, \mathbb{R})$ з прикладу 18.1 того ж курсу, топологія на якій вводиться аналогічним чином (як саме?).

Перевірте, що вони всі дійсно є топологічними групами. Детальніше з топологічними групами та їхніми загальнотопологічними властивостями можна ознайомитися за главою 5х у [3] або за доповненням 5 у [13].

Вправа 4.3. Показати, що для будь-якої топологічної групи G і для кожного її елемента $a \in G$ фундаментальна група $\pi_1(G, a)$ абелева. Тут можна використати критерій абелевості, що наведений у вправі 4.2, або діяти наступним чином. Помітимо, що для будь-яких петель $f, g: I \rightarrow$

G у точці $e \in G$ (одиниці цієї групи) їхній "груповий добуток", тобто відображення $f \odot g: I \rightarrow G: t \mapsto f(t)g(t)$, теж буде петлею у e в силу неперервності групової операції G (чому?). Таким чином, на множині $\Omega(G, e)$ таких петель виникає бінарна операція

$$\odot: \Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \rightarrow \Omega(G, e): (f, g) \mapsto f \odot g.$$

Показати, що ця операція перетворює $\Omega(G, e)$ на групу і що вона коректно "факторизується" у операцію

$$\odot: \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \rightarrow \pi_1(G, e): ([f], [g]) \mapsto [f \odot g].$$

Показати, що ця операція збігається з груповою операцією $\pi_1(G, e)$, тобто $[f] \odot [g] = [f][g]$ для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(G, e)$, і є комутативною, що й демонструє абелевість $\pi_1(G, e)$. Для цього можна розглянути шлях $(f * e_e) \odot (e_e * g)$ для довільних $f, g \in \Omega(G, e)$. Нарешті, показати, що усі фундаментальні групи топологічної групи ізоморфні навіть якщо вона не є лінійно зв'язною. Для цього можуть знадобитися техніка і результати наступного розділу та відображення *лівого зсуву* на довільний елемент $a \in G$, що діє множенням на цей елемент зліва: $L_a: G \rightarrow G: b \mapsto ab$. Воно, зокрема, є гомеоморфізмом G на себе (чому?). Див. також розділи 32.7х та 33.5х у [3].

5 Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи

Перевіримо тепер, що фундаментальна група – дійсно інваріант: гомотопічний (значення цього терміна пояснюється у зауваженні після наслідку 5.1), а отже й топологічний. Для цього знадобиться поняття індукованого гомоморфізма, що важливе й саме по собі.

Твердження 5.1 (Конструкція індукованого гомоморфізма). *Нехай X та Y – топологічні простори, $\varphi: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, точка $x \in X$. Тоді відображення*

$$\varphi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)): [f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

коректно визначене і має наступні властивості:

1. φ_* – гомоморфізм груп.

2. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ для будь-яких неперервних $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow Z$.

3. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}$.

4. Якщо відображення $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ гомотопні, F – їхня гомотопія і $\alpha: \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$ – ізоморфізм, що побудований з використанням шляху $t \mapsto F(x, t)$ як у твердженні 4.1, то $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$.

Доведення. Якщо $f: I \rightarrow X$ – петля в x , то з $f(0) = f(1) = x$ випливає $(\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x)$. Тому відображення $\varphi \circ f: I \rightarrow Y$, що неперервне як композиція неперервних, є петлею в $\varphi(x)$. Крім того, якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ за лемою 2.1 (для гомотопії шляхів f_0 і f_1 та тривіальної гомотопії), тому $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1]$. Отже, φ_* визначене коректно. Перевіримо заявлені властивості.

1. Для будь-яких гомотопічних класів петель $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо з означень

$$\begin{aligned} \varphi_*([f][g]) &= \varphi_*([f * g]) = [\varphi \circ (f * g)] = \\ &= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \varphi_*([g]), \end{aligned}$$

тобто φ_* – дійсно гомоморфізм.

2. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$:

$$\psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = (\psi \circ \varphi)_*([f])$$

за означеннями.

3. Це так, бо $(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]$ для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$.

4. Іншими словами, нам потрібно показати, що діаграма з груп та їхніх гомоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ & \nearrow \varphi_* & \downarrow \alpha \\ \pi_1(X, x) & & \\ & \searrow \psi_* & \downarrow \\ & & \pi_1(Y, \psi(x)) \end{array}$$

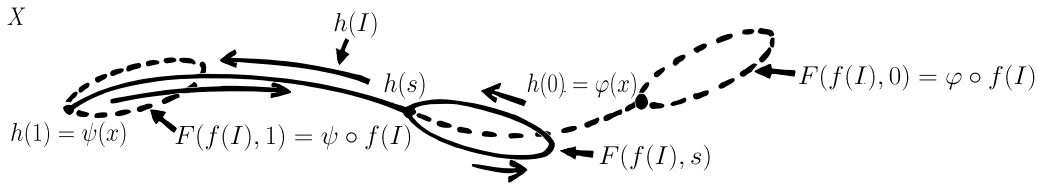
комутативна (тобто усі можливі комбінації стрілочок рівні). Отже, нехай F – гомотопія φ і ψ : $F(\cdot, 0) = \varphi$, $F(\cdot, 1) = \psi$. Позначимо шлях з умови через $h: I \rightarrow Y: t \mapsto F(x, t)$. Він з'єднує $F(x, 0) = \varphi(x)$ і $F(x, 1) = \psi(x)$. Тоді, згідно з побудовою у твердженні 4.1, для

довільного $[f] \in \pi_1(X, x)$ будемо мати $\alpha(\varphi_*([f])) = [\bar{h} * (\varphi \circ f) * h]$. Нам треба довести, що цей гомотопічний клас дорівнює $\psi_*([f]) = [\psi \circ f]$, тобто побудувати гомотопію петель $(\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $\psi \circ f$ у $\psi(x)$. За означеннями оберненого шляху і добутку шляхів, для кожного $t \in I$ маємо

$$((\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h)(t) = \begin{cases} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \varphi(f(4t - 1)), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Визначимо відображення $H: I \times I \rightarrow X$ умовою

$$H(t, s) := \begin{cases} F(x, 1 - 4t), & t \in [0, \frac{1-s}{4}]; \\ F(f(\frac{4t+s-1}{3s+1}), s), & t \in [\frac{1-s}{4}, \frac{1+s}{2}]; \\ F(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{cases}$$



Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{4}$ маємо вірну рівність $F(x, s) = F(f(0), s)$, а при $t = \frac{1+s}{2}$ — $F(x, s) = F(f(1), s)$. При цьому $H(0, s) = H(1, s) = F(x, 1) = \psi(x)$ для будь-якого $s \in I$, отже H дійсно є потрібною нам гомотопією петель $H(\cdot, 0) = (\bar{h} * (\varphi \circ f)) * h$ і $H(\cdot, 1) = \psi \circ f$. Ідея її побудови полягає у наступному: для кожного s ми проходимо уздовж h від точки $\psi(x) = h(1)$ до $h(s) = F(x, s)$, далі уздовж петлі $t \mapsto F(f(t), s)$ у точці $F(x, s)$ і назад у $\psi(x)$ уздовж h , як показано на рисунку вище.

■

Означення 5.1. Відображення φ_* з попереднього твердження будемо називати гомоморфізмом фундаментальних груп, що *індукований* відображенням φ (у точці x).

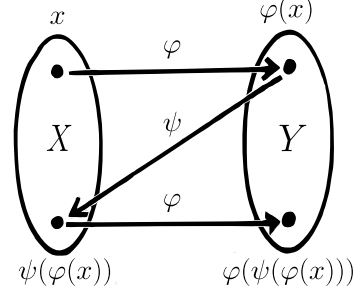
Зауваження. Звичайно, φ_* залежить не тільки від φ , а й від точки x , але її зазвичай не вказують явно у позначенні, що може привести до певних незручностей.

Твердження 5.2. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: Y \rightarrow X$ – гомотопічно обернені відображення топологічних просторів. Тоді

- $\varphi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $x \in X$;
- $\psi_*: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, \psi(y))$ – ізоморфізм груп для будь-якої $y \in Y$.

Доведення.

Те, що це гомоморфізми, вже доведено у пункті 1. попереднього твердження. Залишилося довести їх бієктивність. Фіксуємо якусь довільну $x \in X$, і далі розглядаємо такі індуковані гомоморфізми (див. також ілюстрацію справа):



$$\begin{aligned}\varphi_*: & \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)), \\ \psi_*: & \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x))), \\ \varphi'_*: & \pi_1(X, \psi(\varphi(x))) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))\end{aligned}$$

де штрих нам знадобився саме для компенсації відсутності базової точки у позначенні. З умови гомотопічної оберненості $\psi \circ \varphi \sim id_X$ маємо

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = \alpha \circ (id_X)_* = \alpha \circ id_{\pi_1(X, x)} = \alpha,$$

де перші три рівності випливають з пунктів 2., 4. і 3. попереднього твердження відповідно, а α – деякий ізоморфізм $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$. Зокрема, звідси випливає, що гомоморфізм ψ_* сюр'єктивний. Дійсно, для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$

$$[f] = \alpha(\alpha^{-1}([f])) = \psi_*(\varphi_*(\alpha^{-1}([f]))) \in \psi_*(\pi_1(Y, \varphi(x))).$$

Аналогічним чином з $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ отримуємо, що $\varphi'_* \circ \psi_* = \beta$ для деякого ізоморфізма $\beta: \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))$ (перевірте це). У свою чергу, з цього випливає ін'єктивність ψ_* . Дійсно, нехай $\psi_*([f]) = \psi_*([g])$ для деяких $[f], [g] \in \pi_1(Y, \varphi(x))$. Тоді

$$\beta([f]) = \varphi'_*(\psi_*([f])) = \varphi'_*(\psi_*([g])) = \beta([g]),$$

й тому $[f] = [g]$. Отже ψ_* – бієкція, а тоді й $\varphi_* = (\psi_*)^{-1} \circ \alpha$ теж. Аналогічно доведемо друге твердження, починаючи з $y \in Y$ (або просто використаємо симетричність гомотопічної еквівалентності).

■

Наслідок 5.1. Якщо лінійно зв'язні топологічні простори X та Y гомотопічно еквівалентні, то $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, y)$ для будь-яких точок $x \in X$ та $y \in Y$.

Доведення. Випливає з попереднього твердження та наслідку 4.1.

■

Зауваження. У позначеннях, що введені в зауваженні після наслідку 4.1, це виглядатиме як $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ для лінійно зв'язних гомотопічно еквівалентних просторів X та Y (або просто $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$, бо це класи ізоморфності груп). Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору зберігається (з точністю до ізоморфізма) при гомотопічних еквівалентностях – ϵ , як кажуть, його *гомотопічним інваріантом*. Зокрема, вона є й топологічним інваріантом. Точніше буде сказати, що гомотопічна інваріантність – це властивість *функтора* з категорії топологічних просторів з відміченими точками та їх неперервних відображень, що переводять відмічені точки у відмічені, у категорію груп та їх гомоморфізмів, що визначений конструкціями фундаментальної групи та індукованого гомоморфізма. Детальніше про цю термінологію див., наприклад, у [2, с. 153-157], [9, с. 911-918], [10, с. 162-165, с. 209-213 перекладу] або [12, с. 209-214].

Твердження 5.3. Для будь-яких топологічних просторів X, Y і будь-якої точки $(x, y) \in X \times Y$

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y),$$

тобто фундаментальна група прямого добутку X та Y ізоморфна прямому добутку їх фундаментальних груп (див. означення A.4).

Доведення. Зауважимо, що для будь-якої петлі f у (x, y) її композиції з канонічними проєкціями $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ є петлями у x та y відповідно. Тому можна коректно визначити відображення $\alpha: \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ умовою $\alpha([f]) := ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f])$. Це відображення буде гомоморфізмом груп:

$$\begin{aligned} \alpha([f][g]) &= ((p_X)_*([f][g]), (p_Y)_*([f][g])) = \\ &= ((p_X)_*[f](p_X)_*[g], (p_Y)_*[f](p_Y)_*[g]) = \\ &= ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f])((p_X)_*[g], (p_Y)_*[g]) = \alpha([f]) \alpha([g]) \end{aligned}$$

для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$ за означенням і гомоморфністю $(p_X)_*$ та $(p_Y)_*$. Щоб перевірити бієктивність α , побудуємо відображення $\beta: \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x, y))$, що переводить кожну пару гомотопічних класів $([g], [h]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ у гомотопічний клас $[(g, h)]$ відображення $(g, h): I \rightarrow X \times Y$, яке визначене умовою $t \mapsto (g(t), h(t))$ і є петлею у (x, y) (див. також зауваження після доведення теореми 26.1

курсу топології). Воно коректно визначене, бо з гомотопностей шляхів $g_0 \sim g_1$ і $h_0 \sim h_1$ випливає $(g_0, h_0) \sim (g_1, h_1)$ (перевірте це), і

$$\alpha(\beta([g], [h])) = \alpha([(g, h)]) = ([p_X \circ (g, h)], [p_Y \circ (g, h)]) = ([g], [h]),$$

$$\beta(\alpha([f])) = \beta([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = [(p_X \circ f, p_Y \circ f)] = [f],$$

тобто α і β взаємно обернені, а отже є ізоморфізмами. ■

Приклад 5.1. Згадаймо, що $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ для $n \geq 1$. Тоді з (топологічної) інваріантності фундаментальної групи, твердження 5.3, прикладу 4.2 та властивостей прямого добутку груп випливає, що

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x) \simeq \pi_1(S^{n-1}, y) \times \pi_1(\mathbb{R}, z) = \pi_1(S^{n-1}, y) \times \{[e_z]\} \simeq \pi_1(S^{n-1}, y)$$

для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, де $(y, z) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ – точка, у яку переходить x при гомеоморфізмі. Або у спрощених позначеннях для лінійно зв'язних просторів: $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ (при $n \geq 2$). Втім, цей ізоморфізм можна було встановити й без застосування добутків: він також випливає з прикладу 2.6 та гомотопічної інваріантності фундаментальної групи.

Зауваження. Твердження 5.3 також узагальнюється очевидним чином на прямиий добуток будь-якої скінченної кількості множників (за індукцією або безпосередньо).

6 Однозв'язні простори

Введемо клас просторів, для яких фундаментальні групи найпростіші – тобто тривіальні.

Означення 6.1. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається *однозв'язним*, якщо всі його фундаментальні групи тривіальні: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$.

Зауваження. Лінійно зв'язний простір, що гомотопічно еквівалентний однозв'язному, також буде однозв'язним в силу наслідку 5.1. З наслідку 4.1 випливає, що умову тривіальності фундаментальної групи достатньо перевірити в одній точці. Неформально кажучи, вона означає, що будь-яку петлю у цьому просторі можна стягнути в точку (тобто вона гомотопна постійній). Виявляється, що вірна й більш загальна умова:

Твердження 6.1. *Топологічний простір є однозв'язним тоді й тільки тоді, коли він є лінійно зв'язним і у ньому будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні.*

Доведення. \Leftarrow Достатність виконується автоматично, бо петлі – теж шляхи, отже за умовою кожна петля гомотопна постійній.

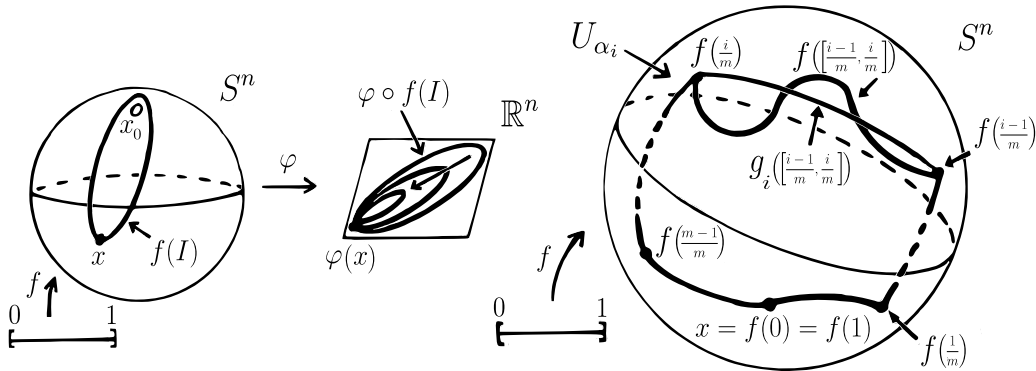
\Rightarrow Нехай тепер X однозв'язний, f і g – якісь шляхи в X , і $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Нам потрібно побудувати їх гомотопію, тобто відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = x$ і $F(1, s) = y$ для будь-яких $t, s \in I$. Цю задачу можна інтерпретувати як продовження на квадрат $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ неперервного відображення, що задане на його межі $\partial(I \times I)$. Зауважимо, що $I \times I$ гомеоморфний замкненому кругу D^2 . Гомеоморфізм можна побудувати, наприклад, за допомогою центральної проєкції у площині, і при ньому межа квадрата переходить у межу круга – коло S^1 . Тому для побудови потрібно нам гомотопії шляхів достатньо побудувати продовження деякого неперервного відображення $\hat{h}: S^1 \rightarrow X$ на D^2 (перевірте це формально, використавши композиції з відповідним гомеоморфізмом аналогічно до міркувань у прикладі 6.2 нижче). Згідно з твердженням 1.2, для цього, у свою чергу, потрібно, щоб \hat{h} було гомотопне постійному відображенню. Далі діємо аналогічно до вправи 4.1 (власне, потрібна гомотопність випливає з її твердження, але ми тут випишемо її окремо).

Розглянемо відображення $h: I \rightarrow X: t \mapsto \hat{h}(e^{2\pi it})$. Воно неперервне як композиція неперервних, і $h(0) = h(1) = \hat{h}(1)$, тобто це петля. За умовою однозв'язності існує гомотопія H петлі h та постійної петлі $e_{\hat{h}(1)}$. Визначимо тепер відображення $\hat{H}: S^1 \times I \rightarrow X$ умовою $\hat{H}(e^{2\pi it}, s) := H(t, s)$. Воно коректно визначене і неперервне (чому?), при цьому $\hat{H}(e^{2\pi it}, 0) = H(t, 0) = h(t) = \hat{h}(e^{2\pi it})$ і $\hat{H}(e^{2\pi it}, 1) = H(t, 1) = \hat{h}(1)$ для будь-якого t , тобто це гомотопія \hat{h} і постійного відображення в точку $\hat{h}(1)$. Це й завершує доведення. ■

Приклад 6.1. Будь-який стяжний простір є однозв'язним згідно з наслідком 5.1 і прикладом 4.1. Зокрема, у таких просторах (наприклад, у зірчатих підмножинах \mathbb{R}^n) будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні в силу попереднього твердження.

Приклад 6.2. Сфери S^n однозв'язні при $n \geq 2$. Дійсно, нехай f – петля у деякій $x \in S^n$. Треба встановити, що ця петля гомотопна постійній. Спочатку припустимо, що носій f не покриває всю сферу, тобто існує $x_0 \in S^n \setminus f(I)$. Позначимо через $\varphi: S^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ стереографічну проєкцію (див. приклад 14.5 з курсу топології), що є гомеоморфізмом. Тоді

$\varphi \circ f$ коректно визначене і неперервне, а отже є петлею в \mathbb{R}^n у точці $\varphi(x)$ (див. ілюстрацію нижче). Оскільки \mathbb{R}^n однозв'язний за попереднім прикладом, існує гомотопія F петлі $\varphi \circ f$ та постійної петлі $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F$ (що неперервне як композиція неперервних) є гомотопією $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 0) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$ і $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 1) = \varphi^{-1} \circ e_{\varphi(x)} = e_x$, яка нам і потрібна.



Тепер розглянемо загальний випадок (якщо існування петлі, носій якої покриває всю сферу, видається неможливим, можна згадати про класичний приклад *кривої Пеано* у площині, тобто шляху, образом якого є квадрат $I^2 = I \times I$, див. [3, с. 65-66], [6, с. 36-38] або [14, с. 271-275]). Цей приклад природним чином узагальнюється на шляхи в багатовимірних кубах I^n та багатьох інших компактах, зокрема S^n . Нашою задачею буде побудувати гомотопію петель f і деякої g такої, що $g(I) \neq S^n$. Тим самим ми зведемо цей випадок до попереднього й нарешті покажемо однозв'язність S^n . Розглянемо деяке покриття $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сфери S^n , що складається з відкритих напівсфер. За неперервністю f прообраз цього покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ є тоді відкритим покриттям компактного метричного простору I . Застосуємо до цього покриття лему Лебега і знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді з означення числа Лебега випливає, що для кожного i від 1 до m існує таке $\alpha_i \in A$, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$, а отже $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{\alpha_i}$: образ $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ міститься у деякій відкритій напівсфері. З прикладу 1.3 (і аналогічно до прикладу 3.2) тоді випливає, що для кожного i шлях $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ буде $\{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$ -гомотопний деякому шляху $g_i \in C([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}], U_{\alpha_i})$ з тими ж кінцями, носієм якого є дуга великого кола S^n (див. рисунок вище).

Визначимо тепер відображення $g: I \rightarrow S^n$ умовою $g|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} = g_i$ для кожного i . Зауважимо, що за побудовою $g_i(\frac{i-1}{m}) = f(\frac{i-1}{m}) = g_{i-1}(\frac{i-1}{m})$ для i від 2 до m , $g_1(0) = f(0) = x$ і $g_m(1) = f(1) = x$, тому g коректно визначене, неперервне і є петлею в x . Гомотопію між f і g можна побудувати,

”зшиваючи” гомотопії між їхніми частинами, аналогічно до доведення лема 3.1. Більш точно, нехай $F_i - \{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$ -гомотопія $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ та g_i для i від 1 до m . Тоді неважко перевірити, що відображення $F: I \times I \rightarrow S^n$, що задане умовою $F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times I} = F_i$ для кожного i , коректно визначене та є потрібною гомотопією. При цьому носій g міститься у скінченному об’єднанні дуг великих кіл S^n , а отже не дорівнює S^n (саме тут умова $n \geq 2$ є суттєвою). Отже, це потрібна нам петля, і, комбінуючи дві частини доведення, отримуємо $f \sim g \sim e_x$.

Приклад 6.3. Простір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ однозв’язний при $n \geq 3$ в силу попереднього прикладу, оскільки $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ за прикладом 5.1 (або просто в силу гомотопічної еквівалентності, що була встановлена у прикладі 2.6).

Приклад 6.4. Прямий добуток будь-яких двох однозв’язних просторів однозв’язний за теоремою 26.1 курсу топології (що забезпечує лінійну зв’язність) та твердженням 5.3. При цьому прямий добуток двох стяжних просторів стяжний за вправою 2.1. Це також вірно для прямого добутку довільної скінченної кількості просторів за очевидними узагальненнями згаданих тверджень.

Вправа 6.1. Показати, що вірне й обернене: якщо $X \times Y$ однозв’язний (відповідно, стяжний), то простори X та Y однозв’язні (стяжні). Узагальнити це на довільну скінченну кількість множників.

7 Накриття

Ми вже достатньо багато дізналися про фундаментальні групи, але поки що не маємо жодного нетривіального прикладу і навіть не знаємо, чому дорівнює фундаментальна група кола. У цьому та наступних розділах ми познайомимося з технікою накрить, що є одним з найважливіших інструментів алгебраїчної топології та її застосувань. Зокрема, за допомогою накрить, як побачимо, можна обчислювати фундаментальні групи. Накриття є окремим випадком більш загальної топологічної конструкції *розшарування* (див., наприклад, [2, с. 291-318] або [10, с. 375-384, с. 474-486 перекладу]).

Означення 7.1. Трійка (X, Y, p) , де $p: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивне неперервне відображення топологічних просторів, зветься *накриттям*, якщо для будь-якої $y \in Y$ існує відкрита $U \ni y$ така, що $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де

- усі U_α відкриті;

- $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ для будь-яких $\alpha \neq \beta$ (тобто об'єднання диз'юнктне);
- $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ є гомеоморфізмом для будь-якого α (відносно індукованих топологій).

При цьому X називають *накриваючим простором* цього накриття, Y – його *базою* (а також говорять, що (X, Y, p) – накриття простору Y), p – *накриваючим відображенням* (або просто накриттям), $p^{-1}(y)$ – *шаром* накриття над точкою $y \in Y$. Накриття зветься *універсальним*, якщо його накриваючий простір однозв'язний.

Зауваження. Також називатимемо окіл U з попереднього означення *правильно накритим*, а про множини U_α для $\alpha \in A$ будемо говорити, що вони *правильно накривають* U (і взагалі будемо так говорити про будь-яку відкриту множину U , що задовольняє умовам із означення). З означення тоді випливає, що правильно накриті околи утворюють відкрите покриття Y . Зауважимо також, що будь-яка відкрита підмножина $V \subset U$ правильно накритого околу також правильно накрита: якщо покласти $V_\alpha := (p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ для кожного $\alpha \in A$, то $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ також задовольняє усім умовам із означення (перевірте це).

Приклад 7.1. Будь-який гомеоморфізм $p: X \rightarrow Y$ задає приклад накриття (т. зв. *тривіальне накриття*). У цьому випадку в якості U можна взяти Y , а в якості єдиного U_α – X .

Вправа 7.1. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p відкрите, тобто у загальному випадку йому "заважає" бути гомеоморфізмом лише відсутність ін'єктивності (див. також лему 11.2 далі).

Приклад 7.2. Нехай Y – довільний топологічний простір, F – простір з дискретною топологією, $X = Y \times F$, і $p = p_Y: X \rightarrow Y$ – канонічна проєкція на Y . Тоді для $U = Y$ маємо $p^{-1}(Y) = Y \times F = \bigcup_{f \in F} Y \times \{f\}$ –

диз'юнктне об'єднання. Тут усі $Y \times \{f\}$ відкриті за побудовою топології прямого добутку (бо одноточкові $\{f\}$ відкриті у дискретному F), а обмеження $p|_{Y \times \{f\}}$ є гомеоморфізмами за пунктом 4. твердження 15.2 курсу топології, тому (X, Y, p) – накриття.

Вправа 7.2. Показати, що будь-яке накриття (X, Y, p) локально влаштоване як у попередньому прикладі: якщо $U \subset Y$ – правильно накритий окіл, то його прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфний добутку $U \times p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка U , а шар $p^{-1}(y)$ наділений індукованою з X топологією, що є дискретною.

Вправа 7.3. Показати, що якщо підмножина $A \subset Y$ бази накриття (X, Y, p) зв'язна (зокрема лінійно зв'язна), то усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in A$ рівнопотужні.

Зауваження. Якщо усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in Y$ складаються з n елементів, говорять, що накриття – n -листо́ве. Зауважимо, що для прообразу правильного накритого околу $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ з означення накриття доповненням до кожної відкритої U_α буде $\bigcup_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ – об'єднання відкритих множин, тому всі U_α будуть відкритозамкненими в $p^{-1}(U)$. Звідси можна вивести, що, наприклад, ортогональна проєкція $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ площини на вісь x не визначає накриття. Дійсно, якщо припустити, що існує правильно накритий окіл U , скажімо, точки 0 , то він повинен містити інтервал (a, b) , який теж буде правильно накритим, як було зауважено вище. Його прообраз $p^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ – смуга у площині, що є зв'язною, а отже єдина її непорожня відкритозамкнена підмножина – це вона сама. Тобто об'єднання $p^{-1}((a, b)) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ складається з єдиної $V_\alpha = (a, b) \times \mathbb{R}$, яка за означенням повинна бути гомеоморфна (a, b) . Але вони негомеоморфні (це випливає з прикладу 23.11 курсу топології), протиріччя. Інший спосіб прийти тут до суперечності – згадати, що індукована топологія шару накриття повинна бути дискретною (див. вправу 7.2).

Зауваження. Для нас особливе значення матимуть приклади, що утворені за допомогою дії групи на просторі (див. розділ 18 курсу топології). Для фіксованої дії λ групи G на множині X , як і раніше, будемо використовувати позначення з точками: $\lambda: G \times X \rightarrow X: (a, x) \mapsto \lambda(a, x) = a \cdot x$.

Означення 7.2. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *неперервною*, якщо для будь-якого $a \in G$ відображення $\lambda_a := \lambda(a, \cdot): X \rightarrow X: x \mapsto a \cdot x$ неперервне.

Зауваження. Для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$ за властивістю дії $\lambda_a(\lambda_b(x)) = a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$, тобто $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}$. Зокрема, $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \lambda_e = id_X$ (бо $\lambda_e(x) = e \cdot x = x$ для будь-якої $x \in X$), тобто відображення $\lambda_{a^{-1}}$ є оберненим до λ_a : $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$. Тому ці відображення є бієкціями. Якщо дія неперервна, то усі λ_a і обернені до них $\lambda_{a^{-1}}$ неперервні, тобто це гомеоморфізми:

Наслідок 7.1. Дія λ групи G на просторі X неперервна тоді й тільки тоді, коли $\lambda_a: X \rightarrow X$ є гомеоморфізмом для будь-якого $a \in G$.

Означення 7.3. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *цілком розривною*, якщо для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap \lambda_a(U) = \emptyset$ для будь-якого $a \in G, a \neq e$.

Зауваження. Це один зі способів вказати, що група діє на просторі "дискретно". З означень випливає, що будь-яка цілком розривна дія є вільною (зокрема ефективною). Для фіксованої дії далі будемо використовувати позначення $a \cdot U := \lambda_a(U) = \{a \cdot x \mid x \in U\}$. З означення випливає, що умова цілком розривності еквівалентна формально сильнішій умові:

Наслідок 7.2. Дія групи G на просторі X цілком розривна тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $a \cdot U \cap b \cdot U = \emptyset$ для будь-яких $a, b \in G, a \neq b$.

Доведення. \Leftarrow Достатньо покласти $b = e$ в умові.

\Rightarrow Для будь-якої $x \in X$ розглянемо відкриту $U \ni x$ з означення цілком розривної дії. Тоді $U \cap a^{-1}b \cdot U = \emptyset$ для довільних $a \neq b$, оскільки $a^{-1}b \neq e$. Застосовуючи до цієї рівності бієкцію λ_a , отримуємо потрібне:

$$a \cdot U \cap b \cdot U = a \cdot U \cap a \cdot (a^{-1}b \cdot U) = \emptyset.$$

■

Твердження 7.1. Якщо група G діє на топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, а $p: X \rightarrow X/G$ – канонічна проєкція на простір орбіт X/G цієї дії, то $(X, X/G, p)$ є накриттям.

Доведення. Нагадаємо, що образом кожної точки $x \in X$ під дією канонічної проєкції є її орбіта: $p(x) = G \cdot x$. Ми знаємо, що p неперервна і сюр'єктивна. Для будь-якої орбіти $G \cdot x \in X/G$ розглянемо окіл $U \ni x$ з означення цілком розривної дії (при цьому в якості x можна обрати довільну точку цієї орбіти). Тоді множина $G \cdot U := \{G \cdot y \mid y \in U\}$ є відкритим околом $G \cdot x$ у просторі X/G . Дійсно, вона містить $G \cdot x$ за побудовою, і

$$p^{-1}(G \cdot U) = \{a \cdot x \mid a \in G, x \in U\} = \bigcup_{a \in G} a \cdot U = \bigcup_{a \in G} \lambda_a(U)$$

відкрита, оскільки дія неперервна, а отже всі λ_a є гомеоморфізмами за наслідком 7.1, тому всі $\lambda_a(U)$ відкриті. Тоді $G \cdot U$ відкрита за означенням фактортопології на X/G .

Більш того, відкриті множини $a \cdot U$ для $a \in G$ правильно накривають $G \cdot U$ (звідки й випливає за означенням, що $(X, X/G, p)$ – накриття). Дійсно, ми тільки що побачили, що $p^{-1}(G \cdot U)$ є їх об'єднанням, яке диз'юнктне, бо $a \cdot U \cap b \cdot U = \emptyset$ при $a \neq b$ за наслідком 7.2 (зауважимо, що множина U в його доведенні – та ж, що і в означенні цілком розривної дії). Залишилося перевірити, що для будь-якого a обмеження канонічної проєкції $p|_{a \cdot U}: a \cdot U \rightarrow G \cdot U$ – гомеоморфізм. Оскільки $G = \{ba \mid b \in G\}$ (чому?), за властивостями дії $p(a \cdot y) = G \cdot (a \cdot y) = G \cdot y$ для кожної $a \cdot y \in a \cdot U$. Це обмеження є сюр'єкцією, бо $G \cdot y = p(a \cdot y)$ для будь-якої $G \cdot y \in G \cdot U$. Якщо $p(a \cdot y) = p(a \cdot z)$, тобто $G \cdot y = G \cdot z$, то існує $b \in G$ такий, що $z = b \cdot y$. Оскільки $y, z \in U$, $b = e$ за умовою на U , тому $y = z$ і $a \cdot y = a \cdot z$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – ін'єкція. Вона неперервна як обмеження неперервної проєкції p . Нарешті, будь-яка відкрита підмножина $a \cdot U$ має вигляд $a \cdot V$ для деякої відкритої $V \subset U$, бо λ_a – гомеоморфізм. Тоді її образ $p(a \cdot V) = G \cdot V$ буде відкритим у X/G (аналогічно до $G \cdot U$), а отже і в індукованій топології $G \cdot U$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – відкрита неперервна бієкція, тобто гомеоморфізм.

■

Зауваження. Для таких накриттів шаром над будь-якою точкою (орбітою) $G \cdot x \in X/G$ буде $p^{-1}(G \cdot x) = \{a \cdot x \mid a \in G\}$, що ототожнюється з G : $a \cdot x \leftrightarrow a$, при цьому a визначений однозначно, бо дія вільна. І взагалі, індексуєча множина A з означення накриття природним чином ототожнюється з шаром $p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка правильно накритого околу U (як саме?).

Часто корисною є наступна достатня умова виконання попереднього твердження:

Твердження 7.2. *Будь-яка вільна неперервна дія скінченної групи на хаусдорфовому топологічному просторі є цілком розривною.*

Доведення. Отже, нехай $G = \{a_i\}_{i=0}^n$ – скінченна група, що вільно й неперервно діє на хаусдорфовому просторі X , де $a_0 = e$ – одиниця групи. Для довільної $x \in X$ та кожного i від 1 до n з того, що дія вільна, випливає $x \neq a_i \cdot x$. В силу хаусдорфовості тоді існують такі відкриті $U_i \ni x$, $V_i \ni a_i \cdot x$, що $U_i \cap V_i = \emptyset$. Оскільки прообрази $a_i^{-1} \cdot V_i = (\lambda_{a_i})^{-1}(V_i)$ є відкритими за лемою 7.1 та містять точку $a_i^{-1} \cdot (a_i \cdot x) = x$ для усіх i , перетин $U := \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n a_i^{-1} \cdot V_i \right)$ є відкритим околom x . При цьому $U \subset U_i$ та $a_i \cdot U \subset a_i \cdot (a_i^{-1} \cdot V_i) = V_i$, а отже $U \cap a_i \cdot U = \emptyset$ для кожного ненульового i , що й означає цілком розривність даної дії за означенням.

■

Приклад 7.3. Дія $G = \mathbb{R}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.3 курсу топології ($a \cdot x = x + a$) є неперервною, бо паралельні перенесення неперервні, але не цілком розривною (хоч і вільною). Дійсно, будь-який відкритий окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^n$ повинен містити евклідову кулю $B_\varepsilon(0)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Але тоді дія елементом $a = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \neq 0$ переводить 0 у $a \cdot 0 = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in B_\varepsilon(0)$, тобто $U \cap a \cdot U \neq \emptyset$.

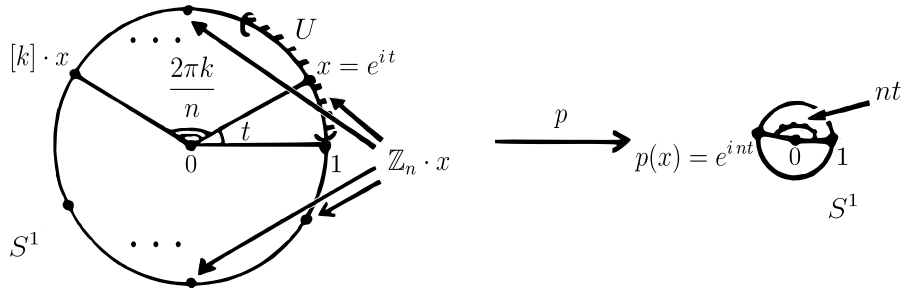
Вправа 7.4. Чи є неперервними дії з прикладів 18.1 і 18.2 курсу топології? Чи є вони цілком розривними?

Приклад 7.4. Розглянемо тепер дію $G = \mathbb{Z}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.4 курсу топології (знову $a \cdot x = x + a$). Як і у попередньому прикладі, вона неперервна. Щоб показати, що вона цілком розривна, покладемо $U = B_{\frac{1}{2}}(x)$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$ (тут кулі знову евклідові). Оскільки для $a \neq 0$ евклідова відстань між x і $a \cdot x$ не менша за 1, з нерівності трикутника випливає, що $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = \emptyset$ (де $a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(a \cdot x)$). Нагадаємо, що простір орбіт для даної дії гомеоморфний n -вимірному тору T^n , далі для спрощення позначень будемо їх ототожнювати. При цьому ототожненні канонічній проєкції відповідатиме відображення $p: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$. Таким чином, з твердження 7.1 випливає, що (\mathbb{R}^n, T^n, p) – накриття T^n , яке є універсальним за прикладом 6.1. Зокрема, при $n = 1$ маємо універсальне накриття (\mathbb{R}, S^1, p) кола.

Приклад 7.5. У прикладі 18.5 курсу топології було показано, зокрема, що n -вимірний дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфний простору орбіт дії групи $G = \mathbb{Z}_2$ на сфері $X = S^n$ (знову ж будемо їх ототожнювати для спрощення позначень). Тут $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ – група з двох елементів (див. приклад А.4), а її дія задається умовами $[0] \cdot x = x$ і $[1] \cdot x = -x$. Оскільки тотожне відображення і центральна симетрія сфери неперервні, ця дія неперервна. Вона також цілком розривна: для будь-якої $x \in S^n$ у якості U можна взяти будь-яку відкриту напівсферу, що містить x (або просто пошлемося на твердження 7.2). Отже, $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ – дволистоє накриття $\mathbb{R}P^n$ за твердженням 7.1. Тут канонічна проєкція має вигляд $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n: (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1 : \dots : x^{n+1})$. При $n \geq 2$ це накриття універсальне в силу прикладу 6.2.

Приклад 7.6. Нехай тепер $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$ – група залишків за модулем n з прикладу А.4, $X = S^1$ – коло (яке знову ототожнюємо з множиною комплексних чисел модуля 1), а дія задається умовою $[k] \cdot e^{it} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} e^{it} = e^{i(t + \frac{2\pi k}{n})}$, тобто клас еквівалентності $[k]$ діє обертанням кола на кут $\frac{2\pi k}{n}$. Це коректно визначена дія (чому?), вона неперервна

(бо обертання неперервні) та цілком розривна: для $x \in S^1$ у якості U візьмемо відкриту дугу довжини $\frac{2\pi}{n}$, що містить x (або знову ж використаємо твердження 7.2). Визначимо відображення $p: S^1 \rightarrow S^1$ умовою $p(e^{it}) = e^{int}$. Воно переводить усі точки кожної орбіти $\mathbb{Z}_n \cdot e^{it}$ в одну точку e^{int} кола (й різні орбіти – у різні точки), тому факторизується у бієкцію $S^1/\mathbb{Z}_n \rightarrow S^1$ (див. рисунок нижче). Можна сказати, що p "намотує" коло на себе n разів. Його факторизація є гомеоморфізмом (покажіть це), тобто $S^1/\mathbb{Z}_n \cong S^1$. Ототожнюючи ці простори, маємо за твердженням 7.1, що (S^1, S^1, p) – накриття кола, де канонічній проєкції відповідає описане вище відображення p . Усі шари цього накриття складаються з n елементів, тобто воно n -листоє. Зауважимо, що при $n = 1$ це тривіальне накриття з прикладу 7.1, а при $n = 2$ – накриття проєктивної прямої $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ з попереднього прикладу.



Приклад 7.7. Розглянемо дію тієї ж групи $G = \mathbb{Z}_n$, що у попередньому прикладі, на тривимірній сфері $X = S^3$. Її зручно представляти як одиничну сферу у просторі \mathbb{C}^2 , що очевидним чином ототожнюється з \mathbb{R}^4 , тобто як множину пар комплексних чисел, сума квадратів модулів яких дорівнює одиниці:

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

З урахуванням цього ототожнення дія \mathbb{Z}_n на S^3 , що крім натурального n визначається деяким взаємно простим з ним натуральним числом $m < n$, задається умовами

$$[k] \cdot (z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i k}{n}} z, e^{\frac{2\pi i m k}{n}} w \right)$$

для будь-яких $[k] \in \mathbb{Z}_n$, $(z, w) \in S^3$. Зауважимо, що пара комплексних чисел у правій частині попередньої рівності теж належить до S^3 , бо множення на комплексні числа модуля 1 не змінює модулі z і w . Тому з аналогічних до попереднього прикладу міркувань випливає, що це коректно визначена неперервна дія (перевірте це). Вона цілком розривна в силу

твердження 7.2. Простір орбіт цієї дії позначається через $L(n, m)$ і зветься *лінзовим простором*. Таким чином, $(S^3, L(n, m), p)$, де p – канонічна проєкція, є n -листівим накриттям цього простору в силу твердження 7.1 і зауваження після нього. Це накриття універсальне за прикладом 6.2. Зокрема, $L(2, 1)$ гомеоморфний $\mathbb{R}P^3$, а накриття у цьому випадку те ж, що у прикладі 7.5 для $n = 3$ (чому?). Детальніше про лінзові простори та їхні узагальнення див., наприклад, у [10, с. 144-146, с. 186-189 перекладу].

Зауваження. Також приклади накрить виникають у комплексному аналізі як т. зв. *ріманові поверхні* функцій комплексної змінної. Див., наприклад, [5, с. 41-61].

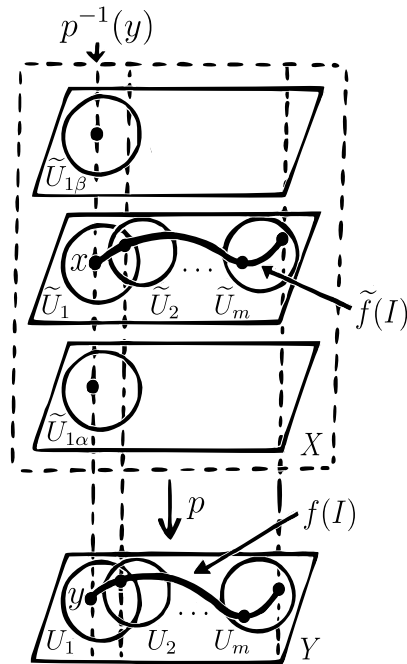
8 Накриття та шляхи

Для опису фундаментальної групи за допомогою накрить нам потрібно спочатку сформулювати та довести кілька важливих технічних результатів, що стосуються шляхів.

Лема 8.1 (Про підняття шляху). *Нехай (X, Y, p) – накриття, а $f: I \rightarrow Y$ – шлях у його базі з початком у точці $f(0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдиний шлях $\tilde{f}: I \rightarrow X$ у накриваючому просторі, що починається в x і накриває f : $\tilde{f}(0) = x$, $p \circ \tilde{f} = f$.*

Доведення.

За означенням накрить, для будь-якого $t \in I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_t \ni f(t)$. Тоді $\{f^{-1}(U_t)\}_{t \in I}$ – відкрите покриття компактного I . Застосувавши лему Лебега, оберемо число m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$, де $\delta > 0$ – число Лебега цього покриття. Тоді для будь-якого $i = \overline{1, m}$ існує t_i таке, що $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{t_i}$. Далі позначатимемо $U_i := U_{t_i}$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ має вигляд об'єднання $\bigcup_{\alpha \in A_1} \tilde{U}_{1\alpha}$ околів, що правильно накривають U_1 , й містить, зокрема, прообраз точки $y = f(0)$. Тому існує індекс $\alpha_1 \in A_1$ такий, що $x \in \tilde{U}_{1\alpha_1}$; позначимо $\tilde{U}_1 := \tilde{U}_{1\alpha_1}$. За означенням, $p|_{\tilde{U}_1}$ – гомеоморфізм, причому $(p|_{\tilde{U}_1})^{-1}(y) = x$, тому $\tilde{f}_1 := (p|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ$



$f|_{[0, \frac{1}{m}]}: [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_1$ коректно визначене і неперервне, тобто є шляхом (в \tilde{U}_1 , а отже і в X) з початком у $\tilde{f}_1(0) = x$. За побудовою, він накриває перший відрізок $f: p \circ \tilde{f}_1 = f|_{[0, \frac{1}{m}]}$ (див. ілюстрацію вище). Кінець цього шляху лежить у прообразі правильно накритого U_2 , для якого використовуємо аналогічні позначення: $\tilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in p^{-1}(f(\frac{1}{m})) \subset p^{-1}(U_2) = \bigcup_{\alpha \in A_2} \tilde{U}_{2\alpha}$. Тоді існує індекс $\alpha_2 \in A_2$ такий, що $\tilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in \tilde{U}_{2\alpha_2}$; позначимо $\tilde{U}_2 := \tilde{U}_{2\alpha_2}$ і покладемо $\tilde{f}_2 := (p|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ f|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}: [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \rightarrow \tilde{U}_2$. Це шлях в \tilde{U}_2 і в X з початком у $\tilde{f}_1(\frac{1}{m})$, і $p \circ \tilde{f}_2 = f|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}$. Аналогічним чином обираємо околиці \tilde{U}_i , що правильно накривають U_i , і будуємо шляхи $\tilde{f}_i := (p|_{\tilde{U}_i})^{-1} \circ f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}: [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \rightarrow \tilde{U}_i$ для кожного i від 3 до m . Нарешті, визначимо $\tilde{f}: I \rightarrow X$ умовою $\tilde{f}|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} = \tilde{f}_i$ для кожного i (пор. з конструкцією у прикладі 6.2). За побудовою це коректно визначений шлях, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}_1(0) = x$ і $p \circ \tilde{f} = f$.

Тепер перевіримо єдиність такого \tilde{f} . Нехай $\tilde{\tilde{f}}: I \rightarrow X$ – якийсь ще шлях такий, що $\tilde{\tilde{f}}(0) = x$ і $p \circ \tilde{\tilde{f}} = f$. Зокрема, $p \circ \tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) = f([0, \frac{1}{m}]) \subset U_1$, тому $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset p^{-1}(U_1) = \bigcup_{\alpha \in A_1} \tilde{U}_{1\alpha}$. Оскільки $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ містить $\tilde{f}(0) = x$, вона перетинається з \tilde{U}_1 , що є відкритозамкненою підмножиною $p^{-1}(U_1)$ (див. зауваження після вправи 7.3). Оскільки $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ до того ж зв'язна як носій шляху, $\tilde{\tilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset \tilde{U}_1$. З бієктивності обмеження $p|_{\tilde{U}_1}: \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ та рівності відображень $p \circ \tilde{\tilde{f}}|_{[0, \frac{1}{m}]} = f|_{[0, \frac{1}{m}]} = p \circ \tilde{f}|_{[0, \frac{1}{m}]}$ випливає, що $\tilde{\tilde{f}}|_{[0, \frac{1}{m}]} = \tilde{f}|_{[0, \frac{1}{m}]}$. Зокрема, $\tilde{\tilde{f}}(\frac{1}{m}) = \tilde{f}(\frac{1}{m})$. Далі повторюємо аналогічні міркування для \tilde{U}_2 і т. д. Таким чином, $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$. ■

Означення 8.1. Шлях \tilde{f} з попередньої лема зветься *підняттям* (або *накриваючим шляхом*) шляху f у накриваючий простір X .

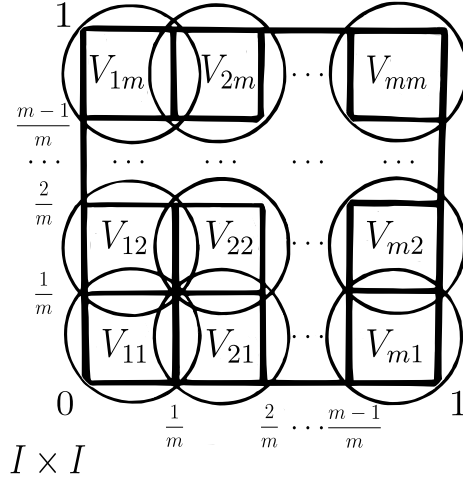
Також нам знадобиться наступне безпосереднє узагальнення лема про підняття шляху:

Лема 8.2 (Про підняття відображень куба). *Нехай (X, Y, p) – накривання, а $F: I^n \rightarrow Y$ – неперервне відображення n -вимірного куба у його базу таке, що $F(0, \dots, 0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдине неперервне відображення $\tilde{F}: I^n \rightarrow X$ у накриваючий простір таке, що $\tilde{F}(0, \dots, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$.*

Доведення. Дійсно, при $n = 1$ це твердження попередньої леми. Наведемо доведення для випадку $n = 2$, тобто для відображень квадрата $I^2 = I \times I$. Будемо діяти як у попередньому доведенні. Для будь-якого $(t, s) \in I \times I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_{(t,s)} \ni F(t, s)$, тому $\{F^{-1}(U_{(t,s)})\}_{t,s \in I} \in$ відкритим покриттям компактного $I \times I$. Нехай $\delta > 0$ – якесь його число Лебега. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{\sqrt{2}}{m} < \delta$. Тоді для будь-яких $i, j = \overline{1, m}$ існує точка (t_{ij}, s_{ij}) така, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subset F^{-1}(U_{(t_{ij}, s_{ij})})$ (бо евклідовий діаметр цього квадрата, що дорівнює його діагоналі $\frac{\sqrt{2}}{m}$, менший за δ), а отже $F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]) \subset U_{(t_{ij}, s_{ij})}$. Позначимо тоді $U_{ij} := U_{(t_{ij}, s_{ij})}$ (див. рисунок нижче, де через V_{ij} позначені $F^{-1}(U_{ij})$).

Прообраз правильно накритого околу U_{11} містить $p^{-1}(y)$ і має вигляд $p^{-1}(U_{11}) = \bigcup_{\alpha \in A_{11}} \tilde{U}_{11\alpha}$, тому існує індекс $\alpha_{11} \in A_{11}$ такий, що $x \in \tilde{U}_{11\alpha_{11}}$. Позначимо $\tilde{U}_{11} := \tilde{U}_{11\alpha_{11}}$ і покладемо $\tilde{F}_{11} := (p|_{\tilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{[0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$: $[0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{11}$. Тоді \tilde{F}_{11} неперервне, і $p \circ \tilde{F}_{11} = F|_{[0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$. Зокрема, образ правої сторони квадрата $p \circ \tilde{F}_{11}(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) = F(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) \subset U_{11} \cap U_{21}$. Далі вибираємо з околів, що правильно накривають U_{21} , окіл \tilde{U}_{21} , що містить $\tilde{F}_{11}(\frac{1}{m}, 0)$, і будувемо $\tilde{F}_{21} := (p|_{\tilde{U}_{21}})^{-1} \circ F|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$: $[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{21}$. Це відображення неперервне, $p \circ \tilde{F}_{21} = F|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \times [0, \frac{1}{m}]}$, і $\tilde{F}_{11}|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]} = \tilde{F}_{21}|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]}$, бо на підмножині $\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]$ обидва ці обмеження збігаються з $(p|_{\tilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]}$.

Далі, рухаючися вправо, отримаємо аналогічним чином відображення \tilde{F}_{i1} для усіх i від 1 до m . Після цього переходимо на другий рядок квадратиків, починаючи з відображення $\tilde{F}_{12}: [0, \frac{1}{m}] \times [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \rightarrow \tilde{U}_{12}$, що збігається з \tilde{F}_{11} на верхній стороні $[0, \frac{1}{m}] \times \{\frac{1}{m}\}$ нижнього лівого квадрата. Далі отримуємо таким чином відображення \tilde{F}_{i2} і т. д. Зрештою, ми отримаємо набір неперервних відображень $\tilde{F}_{ij}: [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \rightarrow X$ для усіх пар $i, j = \overline{1, m}$, що узгоджені на перетинах їхніх областей визначення і є такими, що $p \circ \tilde{F}_{ij} = F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]}$ для усіх i та j . Визначимо



тепер $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ умовою $\tilde{F}|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]} = \tilde{F}_{ij}$ для кожної пари $i, j = \overline{1, m}$. За побудовою це коректно визначене неперервне відображення, $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}_{11}(0, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$. Єдиність такого \tilde{F} перевіряється аналогічно до попереднього доведення (зробіть це).

Вправа 8.1. Узагальнити це доведення на випадок довільного n .

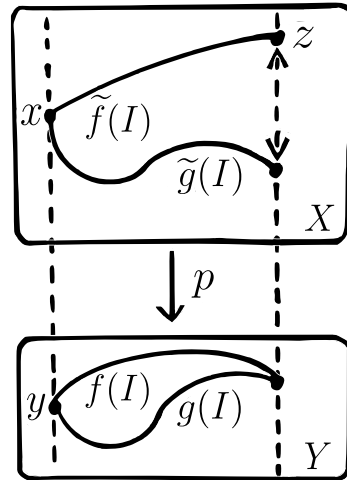
■

Зауваження. Пізніше в цьому курсі ми сформулюємо і доведемо теорему 10.1 про існування та єдиність піднятих відображень, що узагальнює дві попередні леми (див. також вправу 10.1).

Лема 8.3 (Про накриваючу гомотопію). *Нехай (X, Y, p) – накриття, $f, g: I \rightarrow Y$ – шляхи у його базі, що гомотопні й мають спільний початок у точці y : $f \sim g$, $y = f(0) = g(0)$, а $\tilde{f}, \tilde{g}: I \rightarrow X$ – підняття f і g відповідно у накриваючий простір зі спільним початком у деякій точці $x \in p^{-1}(y)$. Тоді ці підняття теж гомотопні, зокрема, їхні кінці збігаються: $\tilde{f} \sim \tilde{g}$ і $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Доведення.

Твердження даної леми проілюстроване справа. Нехай $F: I \times I \rightarrow Y$ – гомотопія шляхів f і g . Тобто це неперервне відображення, $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = y$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, $F(0, 0) = y$. Тоді з леми 8.2 у випадку $n = 2$ випливає, що існує неперервне $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ таке, що $\tilde{F}(0, 0) = x$ і $p \circ \tilde{F} = F$. Зауважимо, що тоді $s \mapsto \tilde{F}(0, s)$ – шлях у X з початком у x , що є підняттям шляху $s \mapsto F(0, s) = y$ в Y . Але цей шлях в Y є постійним e_y за умовою на F , тому постійний шлях e_x є його підняттям з початком у x . Тоді $s \mapsto \tilde{F}(0, s)$ дорівнює e_x в силу єдиності в лемі 8.1, тобто $\tilde{F}(0, s) = x$ для будь-якого s .



Далі діємо аналогічно. Розглянемо шляхи $t \mapsto \tilde{F}(t, 0)$ і $t \mapsto \tilde{F}(t, 1)$. З доведеного вище випливає, що вони мають спільний початок у точці x . При цьому вони є підняттями шляхів $F(\cdot, 0) = f$ і $F(\cdot, 1) = g$ відповідно. З єдиності в лемі 8.1 маємо тоді, що вони повинні дорівнювати \tilde{f} і \tilde{g} відповідно, тобто $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t)$ і $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{g}(t)$ для будь-якого t . Зокрема,

$\tilde{F}(1, 0) = \tilde{f}(1)$. Позначимо цю точку через z . Тоді $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ є підняттям $F(1, \cdot) = e_{f(1)}$ з початком у z , і знову ж з єдиності в лемі 8.1 випливає, що це e_z , тобто $\tilde{F}(1, s) = z$ для будь-якого s , зокрема $\tilde{g}(1) = \tilde{F}(1, 1) = z = \tilde{f}(1)$. Встановлене вище означає, що \tilde{F} – гомотопія шляхів \tilde{f} і \tilde{g} . ■

Зауваження. Згадана вище теорема 10.1 дозволить також узагальнити попередню лему на гомотопії відображень з довільних просторів (див. вправу 10.2). Наслідком цієї лемі є, зокрема, *теорема про монодромію* з комплексного аналізу, що встановлює достатні умови існування *аналітичного продовження* функції комплексної змінної. Інші застосування техніки підняття можна знайти у наступних вправах та у багатьох твердженнях розділів 9–12.

Вправа 8.2. Нехай (X, Y, p) – накриття, де простір Y (а отже й X , див. далі твердження 10.1) локально лінійно зв'язний. Показати, що тоді будь-яка відкрита однозв'язна підмножина U є правильною накритою.

Вправа 8.3. Нехай $p: X \rightarrow Y$ – сюр'єктивне відображення хаусдорфових локально лінійно зв'язних топологічних просторів (наприклад, многовидів, див. означення 29.1 і твердження 29.2 курсу топології), що є *локальним гомеоморфізмом*, тобто для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $p(U)$ відкрита і обмеження $p|_U: U \rightarrow p(U)$ – гомеоморфізм (див. також далі означення 11.3 і обговорення після нього), та *власним відображенням*, тобто таким, що прообрази компактних підмножин Y компактні в X . Показати, що тоді (X, Y, p) – накриття і що, крім того, воно *скінченнолистоє*, тобто шар над будь-якою точкою скінченний. Підказка: спочатку показати, що для відображення p виконується твердження лемі 8.1.

9 Накриття та фундаментальні групи

У цьому розділі ми нарешті сформулюємо і доведемо результати (теорему 9.1 і наслідок 9.1), що дозволять обчислювати фундаментальні групи топологічних просторів за допомогою накриттів. Необхідні для цього алгебраїчні поняття та конструкції містяться у доповненні (зокрема, означення А.5–А.9, твердження А.1 і А.2).

9.1 Теорема про обчислення фундаментальної групи

Почнемо з дослідження властивостей індукованого гомоморфізма накриваючого відображення для довільного накриття.

Твердження 9.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття, $y \in Y$, $x \in p^{-1}(y)$, а $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – гомоморфізм фундаментальних груп, що індукований відображенням p .*

1. *Гомоморфізм p_* є ін'єктивним.*
2. *Гомотопічний клас деякої петлі f в y міститься в образі p_* тоді й тільки тоді, коли підняття f у накриваючий простір з початком у x має кінець теж у x , тобто є петлею в x .*

Зауваження. При цьому за пунктом 2. твердження А.2 образ $\text{Im } p_* = p_*(\pi_1(X, x))$ гомоморфізма p_* є підгрупою групи $\pi_1(Y, y)$, а з ін'єктивності та наслідку А.1 випливає, що $\pi_1(X, x) \simeq p_*(\pi_1(X, x))$.

Доведення.

1. З пункту 1. твердження А.2 випливає, що достатньо перевірити рівність $\text{Ker } p_* = \{[e_x]\}$. Нагадаємо, що $p_*([f]) = [p \circ f]$ для будь-якого гомотопічного класу петель $[f] \in \pi_1(X, x)$. Нехай $[f] \in \text{Ker } p_*$, тобто $[e_y] = p_*([f]) = [p \circ f]$, що означає гомотопність петель e_y і $p \circ f$. (Єдині за лемою 8.1) підняття цих петель в X з початком у x – це e_x і f відповідно. Тоді з леми 8.3 отримуємо, що $e_x \sim f$, тобто $[f] = [e_x]$. Це й означає, що $\text{Ker } p_* = \{[e_x]\}$.
2. Дійсно, клас $[f] \in \pi_1(Y, y)$ належить до $p_*(\pi_1(X, x))$ тоді й тільки тоді, коли має вигляд $p_*([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}]$ для деякої петлі \tilde{g} в x , що є (єдиним за лемою 8.1) підняттям петлі $g := p \circ \tilde{g}$ з початком у x . При цьому рівність $[f] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ еквівалентна в силу леми 8.3 тому, що підняття \tilde{f} петлі f з початком у x гомотопне \tilde{g} і тому теж є петлею (точніше, ця лема потрібна для доведення необхідності, а при доведенні достатності можна просто покласти $\tilde{g} := \tilde{f}$).

■

Теорема 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття). *Нехай X та Y – лінійно зв'язні топологічні простори, а (X, Y, p) – накриття.*

1. *Для будь-яких $y \in Y$ та $x \in p^{-1}(y)$ існує бієкція між множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, y)$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ і шаром $p^{-1}(y)$.*
2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де G – група, що діє на X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проекція, то $p_*(\pi_1(X, x))$ –*

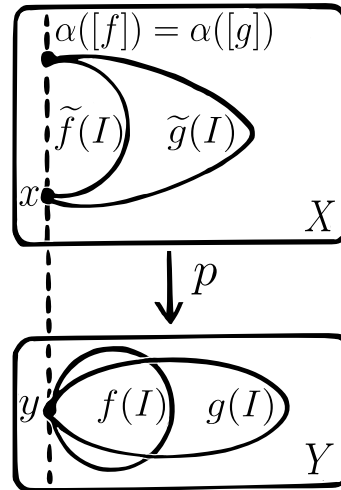
нормальна підгрупа $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ для будь-якої $x \in X$, і бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп

$$\pi_1(X/G, G \cdot x)/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq G.$$

Зауваження. Якщо простір X лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то з неперервності й сюр'єктивності p випливає, що простір $Y = p(X)$ також лінійно зв'язний, тому умову на нього можна прибрати з формулювання теореми. Те, що у пункті 1. йдеться саме про праві класи, теж насправді несуттєве, бо між множинами лівих та правих класів суміжності за підгрупою існує бієкція. У пункті 2. ми використовуємо твердження 7.1 (згідно з яким $(X, X/G, p)$ – дійсно накриття) і ототожнення шарів даного накриття з групою G із зауваження після цього твердження. Якщо, як у пункті 2., $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(Y, y)$, то визначена в силу твердження А.1 факторгрупа $\pi_1(Y, y)/p_*(\pi_1(X, x))$, що знаходиться у бієктивній відповідності з шаром $p^{-1}(y)$ за пунктом 1., інколи зветься *групою монодромії* накриття (X, Y, p) у точці x . Ми повернемося до питань про нормальність підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ у загальному випадку та топологічний сенс групи монодромії у розділі 11 (див., зокрема, теорему 11.1 та наслідок 11.3).

Доведення.

Отже, нехай $x \in X$ і $y = p(x)$. Для кожного класу петель $[f] \in \pi_1(Y, y)$ нехай f – деякий його представник (петля в y), а \tilde{f} – підняття петлі f з початком у x (що існує і єдине за лемою 8.1). Воно повинне закінчуватися у деякій точці з $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(y)$. Покладемо $\alpha([f]) := \tilde{f}(1)$ (див. ілюстрацію справа). Покажемо перш за все, що так можна коректно визначити відображення $\alpha: \pi_1(Y, y) \rightarrow p^{-1}(y)$. Нехай f і g – петлі в y , для яких $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$. Тоді $\tilde{f} \sim \tilde{g}$ за лемою 8.3, зокрема, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Це й означає коректність визначення α . Перевіримо, що це відображення сюр'єктивне. Оскільки X лінійно зв'язний, для будь-якої $z \in p^{-1}(y)$ існує шлях h , що з'єднує x і z . Тоді $(p \circ h)(0) = p(x) = y$ і $(p \circ h)(1) = p(z) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y , і в наших позначеннях $h = \widetilde{p \circ h}$ (підняття $p \circ h$ з початком у x), тому $\alpha([p \circ h]) = h(1) = z$, що й демонструє сюр'єктивність α .



Позначимо $H := p_*(\pi_1(X, x))$. Як зазначалося вище, це підгрупа групи $\pi_1(Y, y)$. Щоб довести пункт 1., нам залишилося показати, що $\alpha([f]) = \alpha([g])$ тоді й тільки тоді, коли рівні класи суміжності $H[f] = H[g]$ за H у $\pi_1(Y, y)$. Дійсно, у цьому випадку ми можемо факторизувати α у коректно визначене ін'єктивне відображення з множини правих класів суміжності $\pi_1(Y, y)$ за H у $p^{-1}(y)$, що визначене умовою $H[f] \mapsto \alpha([f]) = \tilde{f}(1)$, і це буде сюр'єкцією, бо α – сюр'єкція. Так і отримаємо потрібну бієкцію.

Отже, нехай $\alpha([f]) = \alpha([g])$, тобто $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Тоді добуток шляхів $\tilde{f} * \tilde{g}$ визначений і є петлею в x , тому задає гомотопічний клас $[\tilde{f} * \tilde{g}] \in \pi_1(X, x)$. Звідси за означеннями маємо

$$\begin{aligned} [f][g]^{-1} &= [f * \bar{g}] = [(p \circ \tilde{f}) * \overline{(p \circ \tilde{g})}] = \\ &= [p \circ (\tilde{f} * \tilde{g})] = p_*([\tilde{f} * \tilde{g}]) \in p_*(\pi_1(X, x)) = H. \end{aligned}$$

Таким чином, $[f][g]^{-1} \in H$, що еквівалентне $H[f] = H[g]$ (чому?).

Тепер нехай $H[f] = H[g]$, тобто існує $[h] \in H$ таке, що $[f] = [h][g] = [h * g]$, отже $f \sim h * g$. Оскільки $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$, $\tilde{h}(1) = x$ за пунктом 2. твердження 9.1. Тому визначений шлях $\tilde{h} * \tilde{g}$, що накриває $h * g$ і починається в x , тобто $\widetilde{h * g} = \tilde{h} * \tilde{g}$. Тоді

$$\alpha([f]) = \tilde{f}(1) = \widetilde{h * g}(1) = \tilde{h} * \tilde{g}(1) = \tilde{g}(1) = \alpha([g]),$$

де друга рівність випливає з гомотопності $f \sim h * g$ і леми 8.3. Це завершує доведення пункту 1.

Нехай тепер $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де група G діє на X неперервно та цілком розривно, і $x \in X$. Ототожнимо $p^{-1}(G \cdot x)$ з G як у зауваженні після твердження 7.1: $a \cdot x \leftrightarrow a$, де $a \in G$ (нагадаємо, що це бієкція, бо дія вільна). За допомогою цього ототожнення перетворимо α із доведення пункту 1. на відображення $\alpha: \pi_1(X/G, G \cdot x) \rightarrow G$, тобто тепер у введених вище позначеннях $\tilde{f}(1) = \alpha([f]) \cdot x$ для кожного $[f] \in \pi_1(X/G, G \cdot x)$. Тоді з уже доведеного випливає, що α коректно визначене та сюр'єктивне.

Покажемо, що α є гомоморфізмом груп $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ і G . Нехай $[f], [g] \in \pi_1(X/G, G \cdot x)$. Для піднять \tilde{f} і \tilde{g} петель f і g відповідно з початком у x маємо $\tilde{f}(1) = \alpha([f]) \cdot x$ і $\tilde{g}(1) = \alpha([g]) \cdot x$. Тепер зауважимо, що шлях $\alpha([f]) \cdot \tilde{g} := \lambda_{\alpha([f])} \circ \tilde{g}: t \mapsto \alpha([f]) \cdot \tilde{g}(t)$ теж накриває g , бо

$$(p \circ (\alpha([f]) \cdot \tilde{g}))(t) = G \cdot (\alpha([f]) \cdot \tilde{g}(t)) = G \cdot \tilde{g}(t) = (p \circ \tilde{g})(t) = g(t)$$

для кожного t . Друга рівність тут випливає з того, що $\{a \alpha([f]) \mid a \in G\} = G$ (аналогічно до дослідження властивостей відображення p у доведенні твердження 7.1). Крім того, шлях $\alpha([f]) \cdot \tilde{g}$ починається в $\alpha([f]) \cdot \tilde{g}(0) =$

$\alpha([f]) \cdot x = \tilde{f}(1)$. Тому визначений шлях $\tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})$ з початком у $\tilde{f}(0) = x$, що накриває $f * g$, тобто $\widetilde{f * g} = \tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})$. Отже за означеннями

$$\begin{aligned} \alpha([f][g]) \cdot x &= \alpha([f * g]) \cdot x = \widetilde{f * g}(1) = \tilde{f} * (\alpha([f]) \cdot \tilde{g})(1) = \\ &= \alpha([f]) \cdot \tilde{g}(1) = \alpha([f]) \cdot (\alpha([g]) \cdot x) = \alpha([f]) \alpha([g]) \cdot x, \end{aligned}$$

звідки маємо $\alpha([f][g]) = \alpha([f]) \alpha([g])$, що й означає гомоморфність α .

Зауважимо, що ядро α має вигляд $\text{Ker } \alpha = H = p_*(\pi_1(X, x))$. Дійсно, з доведення пункту 1. випливає, що $\alpha([f]) = e = \alpha([e_{G \cdot x}])$ тоді й тільки тоді, коли $H[f] = H[e_{G \cdot x}] = H$, тобто $[f] \in H$. Тому, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/G, G \cdot x)$ за пунктом 1. твердження А.2, і, оскільки гомоморфізм α сюр'єктивний, за пунктом 3. того ж твердження маємо ізоморфність

$$\pi_1(X/G, G \cdot x) / p_*(\pi_1(X, x)) = \pi_1(X/G, G \cdot x) / \text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha = G,$$

причому ізоморфізм отримуємо факторизацією $\alpha: H[f] \mapsto \alpha([f])$, тобто це та ж сама бієкція, що й у доведенні пункту 1. Це, у свою чергу, завершує доведення пункту 2.

■

Наслідок 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою універсального накриття). *Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття.*

1. *Для будь-якої $y \in Y$ існує бієкція між фундаментальною групою $\pi_1(Y, y)$ і шаром $p^{-1}(y)$.*
2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/G, p)$, де G – група, що діє на просторі X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проекція, то для будь-якої $x \in X$ бієкція з пункту 1. є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/G, G \cdot x) \simeq G.$$

Доведення. Якщо накриття універсальне, то простір X однозв'язний. Тобто X (а отже й Y) лінійно зв'язний, і $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\}$ для $x \in p^{-1}(y)$. Тому твердження пунктів 1. і 2. випливають з відповідних пунктів попередньої теореми разом з прикладом А.13.

■

Зауваження. Результат пункту 2. цього наслідку можна записати у спрощених позначеннях (див. зауваження після наслідку 4.1) в силу лінійної зв'язності X : $\pi_1(X/G) \simeq G$.

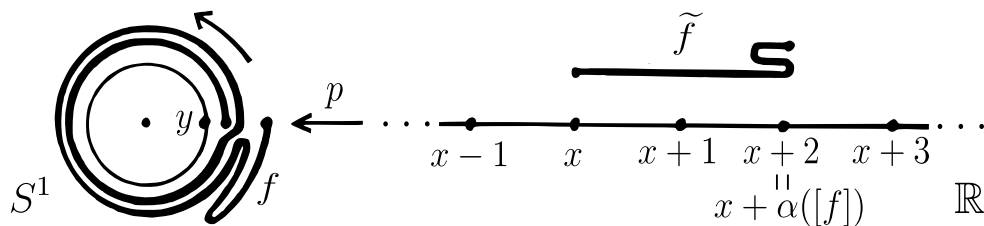
Твердження 9.2. Якщо (X, Y, p) – накриття, простір X є лінійно зв'язним, а Y – однозв'язним, то p – гомеоморфізм.

Доведення. З пункту 1. твердження 9.1 і зауваження після його формулювання випливає, що для будь-якої $x \in X$ і $y = p(x)$ група $\pi_1(X, x)$ ізоморфна підгрупі $p_*(\pi_1(X, x))$ групи $\pi_1(Y, y)$. Але у нас простір Y однозв'язний, тобто $\pi_1(Y, y) = \{[e_y]\}$ тривіальна. Тому $\pi_1(X, x)$ теж тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$. Це означає, що X однозв'язний, тому накриття універсальне. Тоді за пунктом 1. наслідку 9.1 кожний шар $p^{-1}(y)$ складається з однієї точки, отже сюр'єкція p є бієкцією. Вона неперервна за означенням та відкрита в силу вправи 7.1. Отже p – дійсно гомеоморфізм, а накриття тривіальне, як у прикладі 7.1. ■

9.2 Приклади обчислення фундаментальних груп

Приклад 9.1. Накриття (\mathbb{R}^n, T^n, p) з прикладу 7.4 побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}^n$ і є універсальним. Тому з пункту 2. наслідку 9.1 отримуємо, що для будь-якої $y \in T^n$ фундаментальна група n -вимірного тора T^n у точці y ізоморфна \mathbb{Z}^n : $\pi_1(T^n, y) \simeq \mathbb{Z}^n$ (або просто $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, див. зауваження після згаданого наслідку). Зокрема, для $n = 1$ маємо $\pi_1(S^1, y) = \pi_1(T^1, y) \simeq \mathbb{Z}$.

За побудовою у доведенні теореми 9.1, щоб знайти образ при цьому ізоморфізмі гомотопічного класу петлі f у точці $y \in S^1$, потрібно побудувати підняття \tilde{f} у накриваючий простір, тобто пряму \mathbb{R} , з початком у деякій $x \in p^{-1}(y)$ (тобто $y = e^{2\pi i x}$). Це підняття закінчиться у точці $x + k$, де $k \in \mathbb{Z}$ й буде образом класу $[f]$. Неформально кажучи, k – це кількість повних обертів (з урахуванням орієнтації) петлі f навколо центру кола (див. ілюстрацію знизу). Аналогічно будуються образи класів петель і для довільного n .



Зауважимо також, що цей результат узгоджений з твердженням 5.3: згідно з його очевидним узагальненням, для кожної точки тора маємо

$$\pi_1(T^n, y) = \pi_1 \left(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n, (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n}) \right) \simeq$$

$$\simeq \pi_1(S^1, e^{2\pi i x^1}) \times \dots \times \pi_1(S^1, e^{2\pi i x^n}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}^n.$$

У літературі ця група також позначається $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$ (див. приклад А.9).

Зауваження. Ізоморфність $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ має ключове значення, зокрема, для гомотопічних доведень класичної теореми Жордана (теорема 28.1 курсу топології при $n = 1$), що наведене у [14, с. 376-394], та т. зв. *основної теореми алгебри* – твердження про те, що будь-який непостійний поліном з комплексними коефіцієнтами має корінь (див. [3, с. 218-219] або [14, с. 353-356]). Інші застосування цього факту будуть наведені у розділі 15.

Приклад 9.2. Аналогічним чином, дволистоє накриття $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ з прикладу 7.5, що побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}_2$, є універсальним при $n \geq 2$. Тому для кожної $y \in \mathbb{R}P^n$ фундаментальна група $\pi_1(\mathbb{R}P^n, y) \simeq \mathbb{Z}_2$ (або просто $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$) згідно з пунктом 2. наслідку 9.1. Зауважимо, що при $n = 1$ проєктивна пряма $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна колу S^1 (див. приклад 18.5 курсу топології), тому $\pi_1(\mathbb{R}P^1, y) \simeq \mathbb{Z}$ для будь-якої y за гомотопічною інваріантністю та попереднім прикладом.

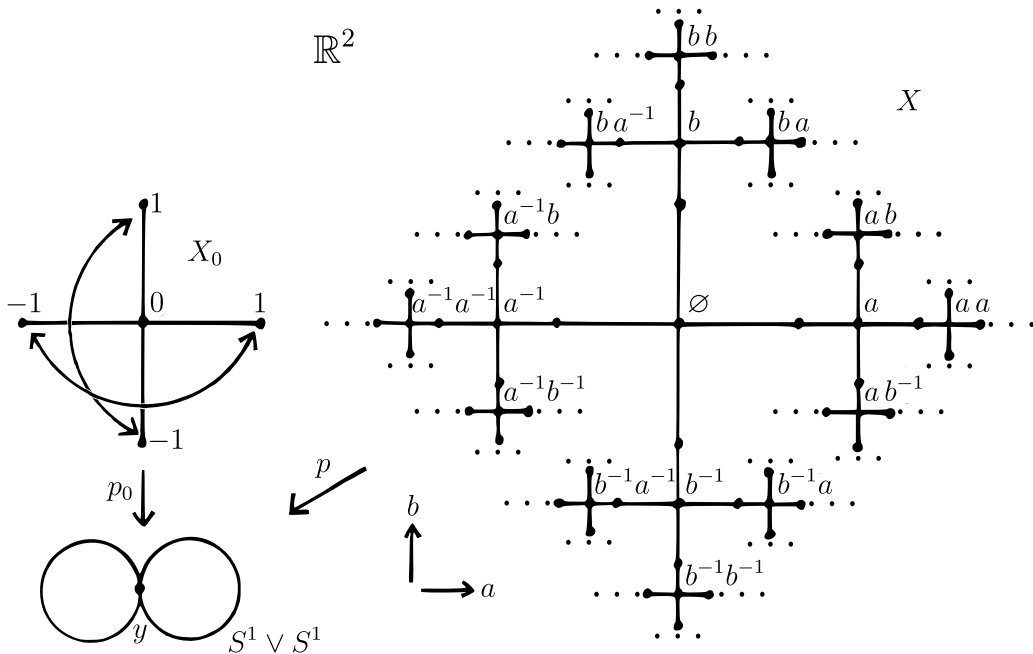
Приклад 9.3. Розглянемо n -листоє накриття (S^1, S^1, p) з прикладу 7.6, де $p: S^1 \rightarrow S^1: e^{it} \mapsto e^{int}$ відповідає дії групи $G = \mathbb{Z}_n$. Тоді для кожної $x \in S^1$ факторгрупа $\pi_1(S^1, p(x))/p_*(\pi_1(S^1, x))$ повинна бути ізоморфна \mathbb{Z}_n за пунктом 2. теореми 9.1. Перевіримо це безпосередньо. У прикладі 9.1 було встановлено, що $\pi_1(S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, p(x)) \simeq \mathbb{Z}$ – група, що складається з елементів вигляду $[f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$, де $[f]$ – гомотопічний клас будь-якої петлі f , яка робить один оберт навколо центру кола у додатному напрямку й відповідає таким чином $1 \in \mathbb{Z}$ при ізоморфізмі (чому?). Іншими словами, це твірна цієї групи у термінології прикладу А.6. Якщо $x = e^{2\pi i t_0}$, то в якості такої петлі можна взяти $f: t \mapsto e^{2\pi i (t_0+t)}$. Тоді $p(f(t)) = e^{2\pi i n(t_0+t)}$ для кожного $t \in I$, тому $p \circ f$ робить n обертів навколо центру кола у додатному напрямку й піднімається у відрізок в універсальному накриваючому просторі \mathbb{R} кола (див. приклад 9.1), що сполучає точки nt_0 і $nt_0 + n$, а отже елемент $p_*([f]) = [p \circ f]$ фундаментальної групи $\pi_1(S^1, p(x))$ відповідає числу $n \in \mathbb{Z}$. Тоді в силу гомоморфності p_* підгрупа $p_*(\pi_1(S^1, x)) \subset \pi_1(S^1, p(x))$, у свою чергу, складається зі степенів $[p \circ f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$ і таким чином відповідає підгрупі $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n (див. приклад А.14). Отже, наш ізоморфізм приймає вигляд $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. Більш того, це той самий ізоморфізм, що описаний у прикладі А.14 (перевірте це).

Приклад 9.4. Оскільки n -листо́ве накриття $(S^3, L(n, m), p)$ лінзового простору $L(n, m)$, що побудоване у прикладі 7.7 для будь-яких взаємно простих натуральних чисел $m < n$ за допомогою дії групи \mathbb{Z}_n , є універсальним, за пунктом 2. наслідку 9.1 фундаментальна група цього простору $\pi_1(L(n, m), y)$ ізоморфна \mathbb{Z}_n у будь-якій $y \in L(n, m)$ (або просто $\pi_1(L(n, m)) \simeq \mathbb{Z}_n$; зауважимо, що лінзові простори лінійно зв'язні в силу лінійної зв'язності S^3).

Приклад 9.5. Нехай $Y = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою y (див. вправу 17.2 курсу топології). Побудуємо його універсальне накриття. Для цього почнемо з підмножини

$$X_0 := [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

площини \mathbb{R}^2 (тобто "хреста", що зображений на рисунку нижче зліва). На цій множині можна ввести відношення еквівалентності \sim умовами $(1, 0) \sim (-1, 0)$ і $(0, 1) \sim (0, -1)$ (інші точки еквівалентні лише собі), склеївши кінці відрізків. Тоді $X_0/\sim \cong S^1 \vee S^1$ аналогічно до прикладу 16.5 курсу топології, причому канонічна проєкція відповідає відображенню $p_0: X_0 \rightarrow S^1 \vee S^1$, що, зокрема, переводить точку $(0, 0)$ в y . Але $(X_0, S^1 \vee S^1, p_0)$ не буде накриттям (чому?). Втім, на основі цієї ідеї дійсно можна побудувати накриття (детальніше цей процес описаний у [3, с. 208-212]).



Покладемо $X := (\langle a, b \rangle \times X_0)/\sim$, де вільна група з 2 твірними $\langle a, b \rangle$ (див. приклад А.6) наділена дискретною топологією, а відношення еквівалентності \sim визначене умовами $(W, (1, 0)) \sim (Wa, (-1, 0))$ і $(W, (0, 1)) \sim$

$(Wb, (0, -1))$ для будь-якого слова $W \in \langle a, b \rangle$ (інші точки еквівалентні лише собі). Таким чином, простір X утворюється склеюванням копій X_0 , що індексовані елементами $\langle a, b \rangle$. Його можна вкласти в \mathbb{R}^2 , як показано вище справа (зображені лише копії X_0 , що відповідають словам довжини не більшої за 2; самі ці слова позначають центри відповідних "хрестів"; при цьому при збільшенні слова на один символ ми зменшуємо "хрест" удвічі і приклеюємо до існуючої конструкції відповідно до відношення еквівалентності). Визначимо дію групи $\langle a, b \rangle$ на просторі X умовою $W_1 \cdot [(W_2, (x, y))] := [(W_1 W_2, (x, y))]$ для будь-яких слів $W_1, W_2 \in \langle a, b \rangle$ і будь-якої $(x, y) \in X_0$, де квадратні дужки позначають, як завжди, клас еквівалентності відносно \sim .

Вправа 9.1. Показати, що простір X є однозв'язним (більш того, стяжним), дія $\langle a, b \rangle$ на ньому – коректно визначеною, неперервною та цілком розривною, і що відображення $\langle a, b \rangle \cdot [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ коректно задає гомеоморфізм між простором орбіт $X/\langle a, b \rangle$ і $S^1 \vee S^1$.

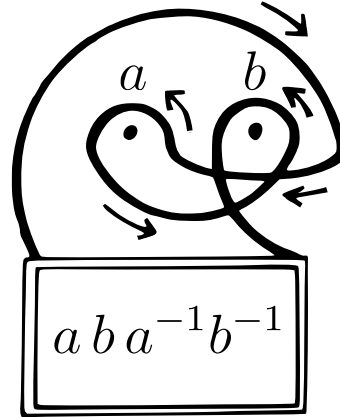
Ототожнимо $X/\langle a, b \rangle$ і $S^1 \vee S^1$ за допомогою цього гомеоморфізма. Тоді відображення $p: X \rightarrow S^1 \vee S^1: [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ відповідатиме канонічній проєкції. Воно, зокрема, переводить центри усіх "хрестів" у точку y . Таким чином, $(X, S^1 \vee S^1, p)$ – універсальне накриття за попередньою вправою і твердженням 7.1. З пункту 2. наслідку 9.1 тоді випливає, що $\pi_1(S^1 \vee S^1, y) \simeq \langle a, b \rangle$ (або просто $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a, b \rangle$ в силу лінійної зв'язності $S^1 \vee S^1$). Таким чином, отримали перший приклад неабелевої фундаментальної групи. Різні (не тільки універсальне) накриття цього простору також описані у [10, с. 57-60, с. 78-81 перекладу].

Вправа 9.2. Аналогічним чином показати, що фундаментальна група букета довільного натурального числа n кіл $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ ізоморфна вільній групі з n твірними $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, що описана у прикладі А.6 (при $n = 1$ це випливає з прикладу 9.1).

Вправа 9.3. Нехай x_1, \dots, x_n – попарно різні точки \mathbb{R}^2 . Показати, що простір $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ гомотопічно еквівалентний $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ (при $n = 1$ це встановлено у прикладі 2.6), а отже його фундаментальні групи ізоморфні вільній групі з n твірними в силу гомотопічної інваріантності та попередньої вправи.

Зауваження. Фундаментальна група простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ (або $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$) використовується, зокрема, у т. зв. задачах про картини.

Найпростіша з них формулюється наступним чином. У стіну вбито два цвяхи. Треба закрутити навколо них мотузку, на якій висить картина, таким чином, щоб вона висіла, але падала, якщо вийняти зі стіни будь-який з цвяхів. З попередньої вправи, гомотопічної інваріантності фундаментальної групи і прикладу 9.5 випливає, що фундаментальна група площини без двох різних точок (цвяхів) ізоморфна $\langle a, b \rangle$, де твірні a і b відповідають (аналогічно до прикладу 9.1) обертанням навколо цвяхів.



Тоді для розв'язку задачі нам достатньо знайти нетривіальний елемент фундаментальної групи (слово), що перетворюється на тривіальний (порожнє слово) після викреслювання з нього усіх символів a і a^{-1} або b і b^{-1} , і задає гомотопічний клас потрібного розташування мотузки. Найпростішим таким словом є т. зв. *комутатор* $a b a^{-1} b^{-1}$ елементів a і b (див. означення А.11). Відповідне йому закручування мотузки зображене на ілюстрації вище. Як бачимо, воно дійсно задовольняє умові задачі. Огляд задач такого типу та потрібної для їх розв'язання математичної техніки див. у [8].

Виявляється, що будь-яка група G є фундаментальною групою деякого топологічного простору. Більш того, завжди можна побудувати неперервну та цілком розривну дію G на деякому стягнутому просторі, а отже G є фундаментальною групою простору орбіт цієї дії в силу твердження 7.1 та пункту 2. наслідку 9.1. Такі простори орбіт, що визначаються групою G з точністю до гомотопічної еквівалентності, зветься *просторами Ейленберга – Маклейна* групи G і позначаються через $K(G, 1)$. Їх конструкції, приклади та застосування описані у [10, с. 87-96, с. 115-126 перекладу]. Однозначна визначеність гомотопічного типу простору $K(G, 1)$ групою G дозволяє використання інших гомотопічних інваріантів (таких як *групи гомологій* та *когомологій*, що виникнуть у цьому курсі далі) для дослідження груп та мотивує знаходити чисто алгебраїчні описи цих інваріантів (див., наприклад, [9, с. 776-838]).

Зокрема, з прикладу 9.1 випливає, що простором Ейленберга – Маклейна $K(\mathbb{Z}^n, 1) \in T^n$, а з розв'язку вправи 9.2 можна вивести, що такий простір вільної групи з n твірними $K(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, 1)$ – це $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_n$ (або ж $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ в силу вправи 9.3, бо цей простір визначений

з точністю до гомотопічної еквівалентності). З іншого боку, $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$ і $L(n, m)$ з прикладів 9.2 і 9.4 не є просторами $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ і $K(\mathbb{Z}_n, 1)$ відповідно, бо їхні універсальні накриваючі простори (що визначені однозначно з точністю до гомеоморфізма, див. наслідок 10.2 далі) – сфери – не є стяжними, як буде встановлено у прикладі 14.6.

Іншим простором, фундаментальна група якого ізоморфна довільній групі G , є факторпростір т. зв. *комплексу Келі*, що будується за допомогою *графу Келі* цієї групи. Ця конструкція описана у [10, с. 77-78, с. 103-105 перекладу]. Комплекс Келі є однозв'язним, але не обов'язково стяжним простором, і на ньому G також діє неперервно та цілком розривно, тому G є фундаментальною групою відповідного простору орбіт. Наприклад, для вільної групи з двома твірними комплексом (і графом) Келі буде простір X з прикладу 9.5. Те ж буде справедливим і для узагальнення цього накриваючого простору, яке потрібно побудувати у розв'язку вправи 9.2. Слово "комплекс" тут використовується у сенсі, що буде пояснений у розділі 19.

10 Підняття у накриваючий простір. Морфізми накриття

У зв'язку з теоремою 9.1 та наслідком 9.1 виникають природні питання застосовності цього метода обчислення фундаментальної групи: за яких умов для даного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p) , чи є воно єдиним (принаймні з точністю до якого-небудь відношення еквівалентності) й коли його можна представити у вигляді $(X, X/G, p)$ для неперервної та цілком розривної дії деякої групи G ? У цьому і двох наступних розділах будуть наведені результати, що відповідають на ці питання, але спочатку розглянемо кілька важливих допоміжних тверджень та конструкцій, що стосуються накриття.

10.1 Підняття відображень у накриваючий простір

Наступна теорема узагальнює леми 8.1 і 8.2 про підняття шляхів та відображень кубів відповідно. Вона дозволить нам, зокрема, вірно сформулювати та довести твердження про єдиність накриття над даним простором. Почнемо з корисної загальної леми.

Лема 10.1. *Нехай $p: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а шлях $f: I \rightarrow X$ з'єднує точки x та x' простору X . Позначимо $g := p \circ f$, $y := p(x)$, $y' := p(x')$ (тоді шлях $g: I \rightarrow Y$ з'єднує точки y*

та y'). Нехай $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x')$ і $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y')$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f і g відповідно, а $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $p'_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ – гомоморфізми фундаментальних груп, що індуковані відображенням p у точках x та x' відповідно. Тоді

$$p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*,$$

тобто діаграма фундаментальних груп та їх гомоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x') \\ p_* \downarrow & & \downarrow p'_* \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') \end{array}$$

комутативна.

Доведення. За умовою $f \in C(I, X)$, $f(0) = x$ і $f(1) = x'$, тому $g = p \circ f \in C(I, Y)$ як композиція неперервних, тобто дійсно є шляхом, $g(0) = p(f(0)) = y$ і $g(1) = p(f(1)) = y'$. Тоді для будь-якого гомотопічного класу $[h] \in \pi_1(X, x)$ петлі h у x за конструкцією ізоморфізма у твердженні 4.1 та означенням індукованого гомоморфізма маємо

$$\begin{aligned} p'_*(\alpha([h])) &= p'_*([\bar{f} * h * f]) = [p \circ (\bar{f} * h * f)] = [(p \circ \bar{f}) * (p \circ h) * (p \circ f)] = \\ &= [\bar{g} * (p \circ h) * g] = \beta([p \circ h]) = \beta(p_*([h])), \end{aligned}$$

звідки й маємо потрібну комутативність. ■

Теорема 10.1 (Існування та єдиність підняття). *Нехай (X, Y, p) – накривття, Z – лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний топологічний простір, $\varphi: Z \rightarrow Y$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(z) = p(x)$. У φ існує єдине підняття в X , тобто неперервне відображення $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow X$ таке, що $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ та $\tilde{\varphi}(z) = x$, тоді й тільки тоді, коли*

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)).$$

Доведення. Позначимо $y := \varphi(z) = p(x) \in Y$. Тоді індуковані гомоморфізми зі включення у формулюванні теореми діють наступним чином: $\varphi_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, отже це включення підгруп $\pi_1(Y, y)$. Зображення умови $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ у вигляді комутативної діаграми можна побачити на рисунках нижче.

\Rightarrow За умовою і пунктом 2. твердження 5.1 маємо

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = p_* \circ \tilde{\varphi}_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)),$$

де гомоморфізм $\tilde{\varphi}_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(X, x)$ індукований підняттям. Таким чином, отримали потрібне включення. Зауважимо, що аналогічне включення матиме місце й для фундаментальних груп в будь-яких інших точках $z' \in Z$ та $x' := \tilde{\varphi}(z')$.

\Leftarrow Спочатку покажемо єдиність $\tilde{\varphi}$, що використовує лише лінійну зв'язність простору Z . Дійсно, нехай неперервні $\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}: Z \rightarrow X$ такі, що $p \circ \tilde{\varphi} = p \circ \tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$ і $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\tilde{\varphi}}(z) = x$. Для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z' . Тоді шляхи $\tilde{f} := \tilde{\varphi} \circ h \in C(I, X)$ і $\tilde{\tilde{f}} := \tilde{\tilde{\varphi}} \circ h \in C(I, X)$ з'єднують x з $\tilde{\varphi}(z')$ і з $\tilde{\tilde{\varphi}}(z')$ відповідно. Оскільки $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\varphi} \circ h = \varphi \circ h$, і аналогічно $p \circ \tilde{\tilde{f}} = \varphi \circ h$, шляхи \tilde{f} і $\tilde{\tilde{f}}$ є підняттями шляху $\varphi \circ h \in C(I, Y)$ зі спільним початком x . Тоді $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$ за єдиністю у лемі 8.1, зокрема, $\tilde{\varphi}(z') = \tilde{f}(1) = \tilde{\tilde{f}}(1) = \tilde{\tilde{\varphi}}(z')$. Таким чином, $\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}}$, що й означає єдиність.

Нехай тепер відомо, що $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$. Побудуємо підняття $\tilde{\varphi}$, використовуючи шляхи наступним чином. Нехай $z' \in Z$ – довільна точка, а $h \in C(I, Z)$ – шлях, що з'єднує z і z' , який існує в силу лінійної зв'язності Z . Тоді шлях $g := \varphi \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує y з $y' := \varphi(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття з лемі 8.1 з початком у x та кінцем у $x' := f(1)$. Зокрема, $p \circ f = g$, і тому $p(x') = y'$. Покажемо тепер, що x' не залежить від h , для чого виконаємо деяку допоміжну роботу.

Фіксуємо шляхи f, g, h і точку x' . Побудуємо як у твердженні 4.1 ізоморфізми фундаментальних груп $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x')$, $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y')$ і $\gamma: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Z, z')$ за шляхами f, g і h відповідно. Тоді з лемі 10.1 маємо рівності

$$\varphi'_* \circ \gamma = \beta \circ \varphi_*, \quad p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$$

для індукованих гомоморфізмів $\varphi_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $\varphi'_*: \pi_1(Z, z') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ відображення φ та $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $p'_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ відображення p , тобто діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z, z) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(Z, z') & & \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x') \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi'_* & , & p_* \downarrow & & \downarrow p'_* \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') & & \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y') \end{array}$$

комутативні. З цих комутативностей, бієктивності α і γ та умови теореми випливає, що

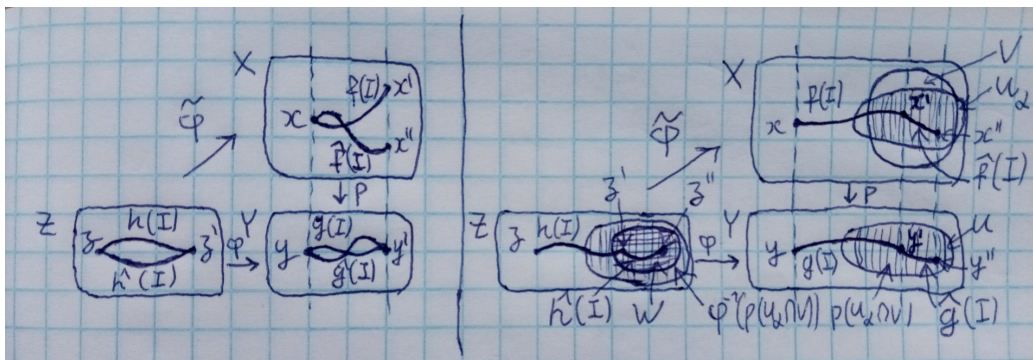
$$\begin{aligned} \varphi'_*(\pi_1(Z, z')) &= \varphi'_*(\gamma(\pi_1(Z, z))) = \beta(\varphi_*(\pi_1(Z, z))) \subset \\ &\subset \beta(p_*(\pi_1(X, x))) = p'_*(\alpha(\pi_1(X, x))) = p'_*(\pi_1(X, x')), \end{aligned}$$

тобто маємо включення $\varphi'_*(\pi_1(Z, z')) \subset p'_*(\pi_1(X, x'))$ підгруп $\pi_1(Y, y')$, що аналогічне до включення з умови, але для іншої пари точок.

Тепер нехай $\widehat{h} \in C(I, Z)$ також з'єднує z і z' , тоді шлях $\widehat{g} := \varphi \circ \widehat{h} \in C(I, Y)$ з'єднує y та y' , і нехай його підняття $\widehat{f} \in C(I, X)$ з початком у x має кінець у $x'' := \widehat{f}(1) \in p^{-1}(y')$ (зокрема, $p \circ \widehat{f} = \widehat{h}$). Див. ілюстрацію нижче зліва. Тоді $\bar{h} * \widehat{h}$ є петлею у z' , а $\varphi \circ (\bar{h} * \widehat{h}) = \bar{g} * \widehat{g}$ – петлею в y' з гомотопічним класом у $\pi_1(Y, y')$, що дорівнює

$$[\bar{g} * \widehat{g}] = [\varphi \circ (\bar{h} * \widehat{h})] = \varphi'_*([\bar{h} * \widehat{h}]) \in \varphi'_*(\pi_1(Z, z')) \subset p'_*(\pi_1(X, x'))$$

за доведеним вище. З іншого боку, шлях $\bar{f} * \widehat{f}$ є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\bar{f} * \widehat{f}) = \bar{g} * \widehat{g}$ з початком у $\bar{f} * \widehat{f}(0) = \bar{f}(0) = x'$. Оскільки $[\bar{g} * \widehat{g}] \in p'_*(\pi_1(X, x'))$, він повинен закінчуватися у тій же точці згідно з пунктом 2. твердження 9.1, тобто $x'' = \widehat{f}(1) = \bar{f} * \widehat{f}(1) = x'$. Це й доводить незалежність x' від h . Таким чином, можна коректно визначити відображення $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow X$, поставивши кожній $z' \in Z$ у відповідність $\tilde{\varphi}(z') := x'$ з описаної нами побудови. При цьому $p(\tilde{\varphi}(z')) = p(x') = y' = \varphi(z')$, для будь-якої $z' \in Z$, тобто $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. Для $z' = z$ у якості h можна взяти e_z , тоді $g = \varphi \circ e_z = e_{y'}$, і його підняттям буде $f = e_x$, тому $\tilde{\varphi}(z) = f(1) = x$.



Залишилося перевірити, що $\tilde{\varphi}$ неперервне. Лише тут буде потрібна локальна лінійна зв'язність простору Z . Цей останній етап доведення проілюстрований вище справа. Для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $z' \in \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ маємо $x' := \tilde{\varphi}(z') \in V$. Нехай U – правильно накритий

відкритий окіл точки $y' := \varphi(z') = p(x') \in Y$ з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, а індекс $\alpha \in A$ такий, що $x' \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околom x' , отже, оскільки обмеження p на U_α – гомеоморфізм на U , $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ є відкритим околom y' (в індукованій топології відкритої U , а отже в Y), а $\varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$ – відкритим околom z' за неперервністю φ . Оскільки простір Z локально лінійно зв'язний, тоді існує лінійно зв'язна відкрита множина W така, що $z' \in W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$. Для будь-якої $z'' \in W$ існує шлях $\hat{h} \in C(I, W)$, що з'єднує z' і z'' . Якщо $h \in C(I, Z)$ – якийсь шлях, що з'єднує z і z' , то шлях $h * \hat{h} \in C(I, Z)$ з'єднує z і z'' . Під дією відображення φ він переходить у шлях $\varphi \circ (h * \hat{h}) = g * \hat{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y та $y'' := \varphi(z'')$, де шляхи $g := \varphi \circ h$ і $\hat{g} := \varphi \circ \hat{h}$ з'єднують y з y' і y' з y'' відповідно. Якщо $f \in C(I, X)$ і $\hat{f} \in C(I, X)$ – підняття g і \hat{g} з початками у точках x та x' відповідно, то f закінчується у $\tilde{\varphi}(z') = x'$ за побудовою $\tilde{\varphi}$, тому визначений шлях $f * \hat{f}$, й він є підняттям $p \circ (f * \hat{f}) = g * \hat{g}$ з початком у x . Отже, $x'' := \tilde{\varphi}(z'') = f * \hat{f}(1) = \hat{f}(1)$ за побудовою $\tilde{\varphi}$. Оскільки $\hat{h}(I) \subset W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$, $\hat{g}(I) \subset p(U_\alpha \cap V)$, й тому $\hat{f}(I) \subset p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) \subset p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, бо \hat{f} є підняттям \hat{g} . При цьому $\hat{f}(0) = x' \in U_\alpha$. Перетин зв'язної $\hat{f}(I)$ з U_α , що є відкритозамкненою в топології $p^{-1}(U)$ (див. зауваження після вправи 7.3) є таким чином відкритозамкненим і непорожнім, отже збігається зі всією цією множиною: $\hat{f}(I) \subset U_\alpha$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Оскільки обмеження p на U_α є, зокрема, ін'єктивним, $U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V$, отже $\hat{f}(I) \subset U_\alpha \cap V \subset V$. Зокрема, $\tilde{\varphi}(z'') = x'' = \hat{f}(1) \in V$. Таким чином, ми показали, що у кожній $z' \in \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ існує відкритий окіл $W \subset \tilde{\varphi}^{-1}(V)$, тобто $\tilde{\varphi}^{-1}(V)$ відкрита. Отже, підняття $\tilde{\varphi}$ дійсно неперервне, що завершує доведення теореми. ■

Зауваження. В умовах попередньої теореми відображення $\tilde{\varphi}$ називають *підняттям* відображення φ у накриваючий простір X . Трохи інший спосіб обґрунтування коректності визначення $\tilde{\varphi}$ у її доведенні, що безпосередньо використовує лему 8.3, можна знайти у [11, с. 163-164, с. 187-188 перекладу]. Також у [11, с. 164-165, с. 189-190 перекладу] наведено приклад, що демонструє суттєвість локальної лінійної зв'язності для використаної у попередньому доведенні конструкції, а отже для існування неперервного підняття $\tilde{\varphi}$ взагалі, бо якщо воно існує, то ця конструкція повинна до нього приводити (виведіть це з доведення єдиності у теоремі).

Приклад 10.1. Якщо простір Z однозв'язний (зокрема лінійно зв'язний) та локально лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то для будь-якого неперервного $\varphi: Z \rightarrow Y$ маємо $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = \varphi_*([e_z]) = [e_{\varphi(z)}]$ для кожної $z \in Z$, отже φ задовольняє умові попередньої теореми та має підняття. Наприклад, це вірно для куба I^n , що є опуклою підмножиною \mathbb{R}^n , а отже однозв'язним простором (точніше, стяжним, див. приклад 6.1). Перевірте, що він локально лінійно зв'язний. Таким чином, ця теорема дійсно узагальнює леми 8.1 (при $n = 1$) і 8.2. Зауважимо, що при цьому ми використовували лему 8.1 у доведенні теореми, а також посилалися на пункт 2. твердження 9.1, що спирається на лему 8.3 про накриваючу гомотопію, у доведенні якої, у свою чергу, використана лема 8.2 для випадку $n = 2$.

Вправа 10.1. Узагальнити попередню теорему наступним чином. Нехай X та Y – лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні топологічні простори, (X, Y, p) і (Z, W, q) – накриття, $\varphi: Y \rightarrow W$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(p(x)) = q(z)$. У φ існує єдине підняття, тобто неперервне відображення $\tilde{\varphi}: X \rightarrow Z$ таке, що $\varphi \circ p = q \circ \tilde{\varphi}$ та $\tilde{\varphi}(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$\varphi_*(p_*(\pi_1(X, x))) \subset q_*(\pi_1(Z, z))$$

для індукованих гомоморфізмів у відповідних точках. Іншими словами, ці відображення пов'язані комутативною діаграмою

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Z \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Зауважимо, що це твердження перетворюється на теорему 10.1 при $X = Y$ і тотожному $p = id_X$ (з точністю до заміни позначень).

Вправа 10.2. Узагальнити лему 8.3 про накриваючу гомотопію за аналогією з узагальненнями лем 8.1 і 8.2 у теоремі 10.1. Для цього можна спробувати послідовно відповісти на наступні питання. За яких умов існує та єдине підняття гомотопії $F: Z \times I \rightarrow Y$ у накриваючий простір накриття (X, Y, p) , тобто неперервне відображення $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow X$ таке, що $p \circ \tilde{F} = F$ і $\tilde{F}(z, 0) = x$ для деяких $x \in X$ і $z \in Z$ таких, що $F(z, 0) = p(x)$? Чи є необхідними та достатніми для цього умови існування підняття відображення $F(\cdot, 0): Z \rightarrow Y$ з теореми 10.1? Гомотопією яких відображень буде тоді \tilde{F} ? Що буде у випадку зв'язаної гомотопії (як гомотопія шляхів у лемі 8.3)? Див. [10, с. 60, с. 82-83 перекладу].

Зауваження. У цьому та двох подальших розділах нам часто будуть зустрічатися накриття (X, Y, p) , де, як у вправі 10.1, простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні. При цьому, оскільки $Y = p(X)$ і p неперервне, з лінійної зв'язності X випливає лінійна зв'язність Y , тому насправді її достатньо вимагати лише від X (ми вже зауважували це після формулювання теореми 9.1). Також достатньо буде локальної лінійної зв'язності будь-якого з просторів X або Y в силу наступного твердження. Але ми й надалі у означеннях і формулюваннях тверджень записуватимемо обидві ці умови для обох просторів з міркувань симетрії.

Твердження 10.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття. Простір X є локально лінійно зв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y .*

Доведення. Ця еквівалентність вірна для будь-якого відкритого неперервного відображення топологічних просторів $p: X \rightarrow Y$ (перевірте це), тому випливає з відкритості p (вправа 7.1) та його неперервності. Але ми дамо безпосереднє доведення.

\Rightarrow Нехай X локально лінійно зв'язний. Для будь-якої $y \in Y$ нехай $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл y з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Для будь-якої відкритої $V \ni y$ її прообраз $p^{-1}(V)$ відкритий за неперервністю та містить $p^{-1}(y)$. Оберемо якусь $x \in p^{-1}(y)$ та відповідний індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α – відкритий окіл x , тому перетин $U_\alpha \cap p^{-1}(V)$ теж є відкритим околom x . За означенням локальної лінійної зв'язності X тоді існує лінійно зв'язна відкрита W така, що $x \in W \subset U_\alpha \cap p^{-1}(V)$. Оскільки обмеження $p: U_\alpha \rightarrow U$ є гомеоморфізмом, $p(W) \subset U \cap V \subset U$ відкрита та лінійно зв'язна в індукованій топології відкритої U , а отже в Y . Оскільки $y = p(x) \in p(W) \subset U \cap V \subset V$, існування такої $p(W)$ для будь-яких y і V й означає локальну лінійну зв'язність простору Y .

\Leftarrow Достатність перевіряється схожим чином до необхідності. Нехай Y локально лінійно зв'язний. Для будь-яких $x \in X$ й відкритої $V \ni x$ нехай знову $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл $y := p(x)$: $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, і $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околom x , і з гомеоморфності $p: U_\alpha \rightarrow U$ випливає, що $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ – відкритий окіл y . З локальної лінійної зв'язності Y тоді маємо існування лінійно зв'язної відкритої W такої, що $y \in W \subset p(U_\alpha \cap V)$. Отже, $x \in U_\alpha \cap p^{-1}(W) \subset U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V \subset V$ (бо обмеження p на U_α ін'єктивне), де $U_\alpha \cap p^{-1}(W) = (p|_{U_\alpha})^{-1}(W)$ відкрита та лінійно зв'язна за гомеоморфністю $p: U_\alpha \rightarrow U$. Звідси й випливає локальна

лінійна зв'язність простору X .

■

10.2 Морфізми накриттів. Ізоморфні накриття. Накриття з відміченими точками

Нехай тепер (X, Y, p) та (Z, Y, q) – деякі накриття, що мають спільну базу Y , причому простір X лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний (отже й Y є таким, а Z , у свою чергу, локально лінійно зв'язний в силу попередніх зауваження та твердження). Нехай точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Застосуємо теорему 10.1 до відображення $p: X \rightarrow Y$ та накриття (Z, Y, q) . Згідно з твердженням цієї теореми, існує єдине неперервне відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ та $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

Нагадаємо також, що для єдиності φ тут потрібні лише лінійна зв'язність простору X та умова на точку. Умова $q \circ \varphi = p$ представляється у вигляді комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & Y \end{array}$$

топологічних просторів та непервних відображень. Дано відображенням з такою властивістю спеціальну назву:

Означення 10.1. Морфізмом накриттів (X, Y, p) і (Z, Y, q) зі спільною базою Y зветься неперервне відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$. Якщо крім цього φ – бієкція та $\varphi^{-1}: Z \rightarrow X$ – морфізм накриттів (Z, Y, q) та (X, Y, p) , то φ називають *ізоморфізмом* накриттів. Якщо існує ізоморфізм накриттів $\varphi: X \rightarrow Z$, то говорять, що (X, Y, p) *ізоморфне* (Z, Y, q) (або що вони *ізоморфні*).

Зауваження. Умова на φ^{-1} з означення ізоморфізма накриттів означає, що це відображення неперервне, тобто φ є гомеоморфізмом, і $p \circ \varphi^{-1} = q$. Втім, ця друга рівність й так вірна в силу умови $q \circ \varphi = p$ та бієктивності φ . І навпаки, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – такий гомеоморфізм, що $q \circ \varphi = p$, то φ та φ^{-1} є морфізмами накриттів за означенням.

Наслідок 10.1. Відображення накриваючих просторів $\varphi: X \rightarrow Z$ є ізоморфізмом накриттів (X, Y, p) і (Z, Y, q) тоді й тільки тоді, коли φ – гомеоморфізм і $q \circ \varphi = p$.

Запишемо тепер кілька властивостей морфізмів разом з переформулюванням обговореного вище часткового випадку теореми 10.1:

Твердження 10.2. 1. *Композиція будь-яких двох морфізмів накриттів є морфізмом накриттів.*

2. *Ізоморфність є відношенням еквівалентності накриттів зі спільною базою Y .*

3. *Якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – морфізм накриттів (X, Y, p) і (Z, Y, q) , де простори Y і Z лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, то (X, Z, φ) – накриття.*

4. *Якщо $\varphi, \psi: X \rightarrow Z$ – морфізми накриттів (X, Y, p) і (Z, Y, q) , де простори X та Y лінійно зв'язні, і існує точка $x \in X$ така, що $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$.*

5. *Нехай (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття, де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, а точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Тоді існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накриттів такий, що $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли*

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

6. *Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття, де простори X та Y локально лінійно зв'язні. Тоді для будь-якого накриття (Z, Y, q) існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накриттів.*

7. *Нехай (Z, Y, q) – тривіальне накриття. Тоді для будь-якого накриття (X, Y, p) , де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ цих накриттів.*

Доведення.

1. Дійсно, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$, $\psi: Z \rightarrow W$ – морфізми накриттів (X, Y, p) і (Z, Y, q) , (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то $\psi \circ \varphi: X \rightarrow W$ неперервне як композиція неперервних, і $r \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$, як добре видно з наступної комутативної діаграми:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z & \xrightarrow{\psi} & W \\ & \searrow p & \downarrow q & \swarrow r & \\ & & Y & & \end{array}$$

Тому $\psi \circ \varphi$ – дійсно морфізм накриттів (X, Y, p) і (W, Y, r) .

2. Тотожне відображення $id_X: X \rightarrow X$ є гомеоморфізмом і задовольняє умові $p \circ id_X = p$, тому будь-яке накриття (X, Y, p) ізоморфне самому собі. Якщо $\varphi: X \rightarrow Z$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (Z, Y, q) , то за означенням φ^{-1} – ізоморфізм (Z, Y, q) та (X, Y, p) . Нарешті, якщо $\varphi: X \rightarrow Z$, $\psi: Z \rightarrow W$ – ізоморфізми (X, Y, p) і (Z, Y, q) , (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то за означенням φ^{-1} , ψ^{-1} – ізоморфізми (Z, Y, q) та (X, Y, p) , (W, Y, r) та (Z, Y, q) відповідно, тому за попереднім пунктом бієкція $\psi \circ \varphi$ є морфізмом (X, Y, p) і (W, Y, r) , а $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ – морфізмом (W, Y, r) та (X, Y, p) (знову див. діаграму вище). Таким чином, $\psi \circ \varphi$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (W, Y, r) за означенням.

3. Відображення $\varphi: X \rightarrow Z$ неперервне за означенням. Перевіримо його сюр'єктивність. Оберемо якусь $x \in X$ і нехай $z := \varphi(x) \in Z$. Оскільки Z лінійно зв'язний, для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z' . Тоді шлях $g := q \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує $q(z)$ і $q(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття в X з початком у x для накриття (X, Y, p) . Тоді $g = p \circ f = q \circ \varphi \circ f$, оскільки φ – морфізм, тому шляхи $\varphi \circ f$ і h є підняттями g у Z зі спільним початком $\varphi(f(0)) = \varphi(x) = z = h(0)$. За єдиністю у лемі 8.1, $\varphi \circ f = h$, зокрема, $z' = h(1) = \varphi(f(1)) \in \varphi(X)$. Таким чином, φ дійсно є сюр'єктивним.

Нехай тепер z – довільна точка Z . Покладемо $y := q(z) \in Y$. За означеннями накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , у точки y існують правильно накриті околиці для них обох. Тоді перетин цих околів теж буде відкритою правильно накритою для накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) множиною за зауваженням після означення 7.1. Оскільки простір Y локально лінійно зв'язний, цей перетин у свою чергу включає відкритий лінійно зв'язний окіл $U \ni y$, що є правильно накритим для обох накрить за тими ж міркуваннями. Нехай $V \subset Z$ – (єдина) відкрита множина, що правильно накриває U для накриття (Z, Y, q) й містить точку z . Зокрема, тоді $q|_V: V \rightarrow U$ – гомеоморфізм. З іншого боку, нехай $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ – об'єднання правильно накриваючих околів для накриття (X, Y, p) . За означенням морфізма φ , $p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(q^{-1}(U)) \supset \varphi^{-1}(V)$. Позначимо $B := \{\beta \in A \mid U_\beta \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset\}$ (зауважимо, що ця підмножина індексів непорожня, бо $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ за доведеною раніше сюр'єктивністю φ). Таким чином, $\varphi^{-1}(V) \subset \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$, і це диз'юнктне об'єднання відкритих під-

множин X . При цьому для будь-якого $\beta \in B$ обмеження $p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow U$ – гомеоморфізм, зокрема, U_β лінійно зв'язна. Тоді й $\varphi(U_\beta) \subset \varphi(p^{-1}(U)) = \varphi(\varphi^{-1}(q^{-1}(U))) = q^{-1}(U)$ лінійно зв'язна за неперерв-

ністю φ . Оскільки правильно накриваюча V є відкритозамкнутою у $q^{-1}(U)$ та $\varphi(U_\beta) \cap V \neq \emptyset$ за означенням B , $\varphi(U_\beta) \subset V$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Зокрема, тому $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \subset \varphi^{-1}(V)$, а отже $\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$. Крім того, тоді з означення морфізма випливає, що $p|_{U_\beta} = q|_V \circ \varphi|_{U_\beta}$, тобто $\varphi|_{U_\beta} = (q|_V)^{-1} \circ p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow V$ – гомеоморфізм як композиція гомеоморфізмів. Все це означає, що V – правильно накритий окіл точки z , а (X, Z, φ) – дійсно накриття.

4. Це твердження про єдиність у теоремі 10.1, що застосоване до накриття (Z, Y, q) та відображення $p: X \rightarrow Y$.
5. Це критерій існування у теоремі 10.1, що застосований до накриття (Z, Y, q) та відображення $p: X \rightarrow Y$.
6. Застосуємо попередній пункт до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) , взявши якусь точку $x \in X$, поклавши $y := p(x)$ і обравши $z \in q^{-1}(y)$. З однозв'язності X випливає, що $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\} \subset q_*(\pi_1(Z, z))$, тому дійсно існує морфізм накрить $\varphi: X \rightarrow Z$ (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$, в силу двох попередніх пунктів).
7. Нагадаємо, що тривіальне накриття – це трійка (Z, Y, q) , де q – гомеоморфізм (див. приклад 7.1). Застосуємо пункт 5. до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) : знову оберемо $x \in X$, покладемо $y := p(x)$ і оберемо $z \in q^{-1}(y)$. Оскільки q – гомеоморфізм, $q_*: \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – ізоморфізм за твердженням 5.2. Зокрема, він сюр'єктивний, і тому $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y) = q_*(\pi_1(Z, z))$. Отже, існує (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$) морфізм накрить $\varphi: X \rightarrow Z$.

■

Вправа 10.3. Чи є суттєвою для пункту 3. попереднього твердження умова локальної лінійної зв'язності простору Y ?

Вправа 10.4. Показати, що саме умова лінійної зв'язності X суттєва для пункту 4. попереднього твердження, і, скажімо, слабшої умови лінійної зв'язності лише Y недостатньо. Щоб побудувати контрприклад, можна скористатися прикладом 7.2. Аналогічним чином можна показати важливість цієї умови для інших результатів цього та наступних розділів.

Вправа 10.5. Показати, що, втім, пункт 4. попереднього твердження залишиться вірним, якщо замість лінійної зв'язності X та Y вимагати,

щоб X був зв'язним і локально зв'язним. Перша з цих умов означає, що Y також зв'язний в силу неперервності та сюр'єктивності p , а друга еквівалентна локальній зв'язності Y (це доводиться дослівно так само, як твердження 10.1, якщо замінити там всюди локальну лінійну зв'язність на локальну зв'язність). Пор. з теоремою 27.1 курсу топології. Спробуйте також визначити, які з наступних тверджень будуть вірними за такої заміни умов.

Наслідок 10.2. *Будь-які два універсальні накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q) локально лінійно зв'язного простору Y ізоморфні. Зокрема, їхні накриваючі простори X і Z гомеоморфні.*

Доведення. Зауважимо, що в умовах цього наслідку X та Z локально лінійно зв'язні за твердженням 10.1, а Y лінійно зв'язний, бо таким є X (і Z). Тоді за пунктом 6. попереднього твердження існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ даних накриттів. В силу пункту 3. того ж твердження, (X, Z, φ) є накриттям. Оскільки це накриття однозв'язного простору Z лінійно зв'язним X , відображення φ є гомеоморфізмом в силу твердження 9.2, тобто ізоморфізмом накриттів за наслідком 10.1.

■

Зауваження. Інший спосіб показати, що $\varphi: X \rightarrow Z$ з доведення попереднього наслідку є ізоморфізмом, – побудувати його для двох точок $x \in X$, $z \in Z$ так, що $\varphi(x) = z$, разом з морфізмом $\psi: Z \rightarrow X$ таким, що $\psi(z) = x$, і показати їх взаємну оберненість аналогічно до доведення пункту 2. наслідку 10.3 нижче.

З пункту 1. твердження 10.2 випливає, зокрема, що накриття деякого фіксованого топологічного простору Y та їхні морфізми з операцією композиції утворюють *категорію*. При цьому ізоморфізми накриттів є ізоморфізмами даної категорії, а пункт 2. згаданого твердження є окремим випадком загальнокатегорного факта: ізоморфізми задають відношення еквівалентності між об'єктами (та повторює його доведення; знову ж, див. [10, с. 162-165, с. 209-213 перекладу] та інші посилання із зауваження після наслідку 5.1 для знайомства з цими поняттями).

Розглянемо тепер підкатегорію накриттів лінійно зв'язного та локально лінійно зв'язного простору Y з лінійно зв'язними накриваючими просторами (що є також локально лінійно зв'язними в силу твердження 10.1), морфізми якої визначені так само. Пункт 6. твердження 10.2 означає тоді, що у цій категорії універсальні накриття є *універсальними відштовхуючими об'єктами* (і саме за цією властивістю універсальності ці накриття так називаються), а пункт 7. того ж твердження – що тривіальні накриття є *універсальними притягуючими об'єктами*.

Також можна говорити про категорію накриттів з відміченими точками простору Y з відміченою точкою $y \in Y$:

Означення 10.2. *Накриттям з відміченою точкою* топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ будемо називати накриття (X, Y, p) разом з точкою $x \in X$ такою, що $p(x) = y$. *Морфізмом* (відповідно, *ізоморфізмом*) *накриттів* (X, Y, p) і (Z, Y, q) з відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ зветься неперервне відображення (відповідно, гомеоморфізм) $\varphi: X \rightarrow Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ і $\varphi(x) = z$. Якщо існує ізоморфізм накриттів з відміченими точками, то говорять, що вони *ізоморфні*.

Зауваження. Таким чином, морфізм (відповідно, ізоморфізм) накриттів з відміченими точками є, зокрема, морфізмом (ізоморфізмом) накриттів у звичайному сенсі. Аналогічно до загального випадку, з пункту 1. твердження 10.2 випливає, що попереднє означення дійсно описує об'єкти та морфізми деякої категорії.

Вправа 10.6. Перевірити, що ізоморфізми накриттів з відміченими точками також є ізоморфізмами у загальнокатегорному сенсі, тобто бієктивними морфізмами, обернені до яких теж є морфізмами. Вивести звідси, що ізоморфність таких накриттів теж є відношенням еквівалентності.

Зауваження. Нарешті, можна також розглядати категорію $\mathcal{C}(Y, y)$ накриттів з відміченими точками та лінійно зв'язними (і локально лінійно зв'язними) накриваючими просторами лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$. З доведень пунктів 6. і 7. твердження 10.2 випливає, що універсальні та тривіальні накриття будуть універсальними об'єктами також і в цій категорії (тільки тепер з однозначно визначеними морфізмами). У розділі 12 ми отримаємо класифікацію усіх таких накриттів з точністю до ізоморфізма (теорема 12.1). Для цього нам будуть корисні наступні уточнені властивості морфізмів накриттів з відміченими точками:

Наслідок 10.3. *Нехай (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття з відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ (тобто $p(x) = p(z) = y$).*

1. *Якщо простори X та Y лінійно зв'язні, то будь-які два морфізми даних накриттів з відміченими точками $\varphi, \psi: X \rightarrow Z$ рівні.*
2. *Якщо простори X , Y і Z лінійно зв'язні та існують морфізми $\varphi: X \rightarrow Z$ і $\psi: Z \rightarrow X$ даних накриттів з відміченими точками, то це взаємно обернені ізоморфізми.*

3. Нехай простори X та Y лінійно зв'язні й локально лінійно зв'язні. Морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$ даних накриттів з відміченими точками існує тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

Доведення.

1. Це просто переформулювання пункту 4. твердження 10.2.
2. Згідно з означенням, $\varphi: X \rightarrow Z$ та $\psi: Z \rightarrow X$ неперервні, $q \circ \varphi = p$, $p \circ \psi = q$, $\varphi(x) = z$ і $\psi(z) = x$. Тоді $p \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$ і $\psi \circ \varphi(x) = \psi(z) = x$, тобто неперервне $\psi \circ \varphi: X \rightarrow X$ є морфізмом у себе (ендоморфізмом) накриття (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$. Оскільки ще одним таким ендоморфізмом є тотожне відображення $id_X: X \rightarrow X$, а X лінійно зв'язний, $\psi \circ \varphi = id_X$ за попереднім пунктом. Аналогічно перевіряється, що $\varphi \circ \psi = id_Z$. Таким чином, φ та ψ є взаємно оберненими неперервними відображеннями, отже кожне з них – гомеоморфізм та ізоморфізм даних накриттів з відміченими точками.
3. Це, у свою чергу, переформулювання пункту 5. твердження 10.2.

■

Зауваження. З іншого боку, сукупність класів ізоморфних накриттів з $\mathcal{C}(Y, y)$ можна розглядати і як множину з відношенням (часткового) порядку. Тут позначатимемо (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$ через (X, Y, p, x) . Інколи кажуть, що накриття $(Z, Y, q, z) \in \mathcal{C}(Y, y)$ підпорядковане накриттю $(X, Y, p, x) \in \mathcal{C}(Y, y)$, якщо між ними існує морфізм $\varphi: X \rightarrow Z$. Тоді він існує й для будь-яких накриттів, що ізоморфні даним (чому?), отже підпорядкованість можна перенести як відношення на сукупність класів ізоморфності. Тоді з пункту 1. твердження 10.2 випливає транзитивність такого відношення, а з пункту 2. попереднього твердження – його антисиметричність (якщо (Z, Y, q, z) підпорядковане (X, Y, p, x) , а $(X, Y, p, x) - (Z, Y, q, z)$, то вони ізоморфні). Разом з очевидною рефлексивністю це демонструє, що підпорядкованість дійсно є відношенням порядку (перевірте це детально за необхідності). Згідно з пунктами 6. і 7. твердження 10.2, клас, що складається з тривіальних накриттів (чому вони всі ізоморфні?), є найменшим елементом цієї множини, а клас, що складається з універсальних (що ізоморфні за наслідком 10.2) – найбільшим. Звичайно, ми поки що не знаємо, чи ці універсальні накриття існують. Критерії цього будуть встановлені у розділі 12 (наслідок 12.2).

11 Автоморфізми накриття та регулярні накриття

У цьому розділі ми дамо відповідь на одне з питань, що були поставлені на початку попереднього, а саме з'ясуємо за яких умов довільне накриття є накриттям над простором орбіт деякої неперервної та цілком розривної дії (принаймні, з точністю до якогось відношення еквівалентності). Виявляється, що для цього потрібно розглянути множину ізоморфізмів цього накриття на себе:

Означення 11.1. *Автоморфізмом* накриття (X, Y, p) зветься його ізоморфізм на себе.

Зауваження. Таким чином, за наслідком 10.1, автоморфізм накриття (X, Y, p) – це такий гомеоморфізм $\varphi: X \rightarrow X$, що $p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить будь-який шар $p^{-1}(y)$ цього накриття на себе, переставляючи його елементи. Зокрема, англійською автоморфізм накриття зветься з цієї причини *deck transformation* – ”перетворенням колоди” (карт). Множину усіх автоморфізмів накриття (X, Y, p) позначатимемо через $\text{Aut}(X, Y, p)$. Наступне твердження демонструє, що за додаткової умови лінійної зв'язності X та Y це якраз і буде потрібна нам група, що діє на X неперервно та цілком розривно.

Зауважимо, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язними X та Y однозначно визначений образом довільної точки $x \in X$ за пунктом 4. твердження 10.2, тобто якщо $\varphi, \psi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ та $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$. Як обговорювалося у вправах 10.4 та 10.5, для цієї однозначної визначеності є суттєвою лінійна зв'язність X , яку, однак, можна тут замінити умовою зв'язності та локальної зв'язності цього простору.

Твердження 11.1. *Для будь-якого накриття (X, Y, p) множина його автоморфізмів $\text{Aut}(X, Y, p)$ з операцією композиції є групою. Умова $\varphi \cdot x := \varphi(x)$ для $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ та $x \in X$ визначає неперервну дію цієї групи на X . Якщо до того ж топологічні простори X та Y лінійно зв'язні, то ця дія цілком розривна.*

Доведення. Розглянемо довільні $\varphi, \psi \in \text{Aut}(X, Y, p)$. Тоді, наприклад, з доведення пункту 2. твердження 10.2 випливає, що композиція $\varphi \circ \psi$, тотожне відображення id_X і обернене φ^{-1} належать до $\text{Aut}(X, Y, p)$. Таким чином, на $\text{Aut}(X, Y, p)$ коректно визначена асоціативна операція композиції, для якої одиницею (нейтральним елементом) є id_X (бо

$\varphi \circ id_X = id_X \circ \varphi = \varphi$ для будь-якого φ , а оберненим елементом до φ є φ^{-1} (бо $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id_X$). Тому це група.

В умові дійсно описана дія $\text{Aut}(X, Y, p)$ на X , бо $\varphi \cdot (\psi \cdot x) = \varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi) \cdot x$ та $id_X \cdot x = id_X(x) = x$ для будь-яких $\varphi, \psi \in \text{Aut}(X, Y, p)$, $x \in X$. Для цієї дії λ і будь-якого $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ за побудовою $\lambda_\varphi = \varphi$, що є гомеоморфізмом, тому λ неперервна.

Нехай тепер X та Y лінійно зв'язні, $x \in X$, $y := p(x) \in Y$, а відкрита $U \ni y$ – правильно накритий окіл y , прообраз якого має вигляд $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ з означення накриття. Оберемо $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α є відкритим околом x . Нехай U_α і $\lambda_\varphi(U_\alpha) = \varphi(U_\alpha)$ перетинаються для деякого $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$, тобто існує точка $z \in U_\alpha$ така, що $z = \varphi(w)$ для деякого $w \in U_\alpha$. Тоді за означенням автоморфізма $p(z) = p(\varphi(w)) = p(w)$. Обмеження p на U_α є гомеоморфізмом, зокрема ін'єктивним, тому $w = z = \varphi(w)$. Тоді $\varphi = id_X$ в силу однозначної визначеності автоморфізмів. Таким чином, $U_\alpha \cap \lambda_\varphi(U_\alpha) = \emptyset$ при $\varphi \neq id_X$, тобто U_α – окіл x , існування якого вимагається в означенні цілком розривної дії.

■

Вправа 11.1. Показати, що ізоморфні накриття мають ізоморфні групи автоморфізмів. Чи вірно це також для відношень еквівалентності накрить, що описані далі у вправах 11.2 та 11.3?

Зауваження. У подальшому ми будемо мати на увазі саме ту дію групи автоморфізмів $\text{Aut}(X, Y, p)$ на X , що описана у попередньому твердженні. З іншого боку, у випадку накриття простору орбіт $(X, X/G, p)$ з твердження 7.1 у нас вже є група G , що діє неперервно та цілком розривно на X . Виявляється, що для лінійно зв'язного X можна побудувати канонічний ізоморфізм між групами G і $\text{Aut}(X, X/G, p)$, що пов'яже ці дві дії:

Твердження 11.2. *Якщо група G діє на лінійно зв'язному топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, то відображення $G \rightarrow \text{Aut}(X, X/G, p)$, що ставить у відповідність елементу групи $a \in G$ гомеоморфізм $\lambda_a: X \rightarrow X$, є ізоморфізмом груп.*

Доведення. Відображення λ_a для $a \in G$ дійсно є гомеоморфізмами за означенням неперервної дії (точніше, за наслідком 7.1). Крім того, $p(\lambda_a(x)) = G \cdot (a \cdot x) = G \cdot x = p(x)$ для будь-яких $a \in G$, $x \in X$ (як у доведенні твердження 7.1). Таким чином, $p \circ \lambda_a = p$, отже $\lambda_a \in \text{Aut}(X, X/G, p)$, й ми дійсно коректно визначили відображення в групу автоморфізмів. Оскільки $\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b$ для будь-яких $a, b \in G$ згідно з зауваженням після

означення 7.2, це гомоморфізм груп. Його ядром є $\{a \in G \mid \lambda_a = id_X\} = \{e\}$, бо дія вільна. Тому цей гомоморфізм ін'єктивний за пунктом 1. твердження А.2.

Щоб показати, що побудоване відображення дійсно є ізоморфізмом, залишилося перевірити його сюр'єктивність. Нехай $\varphi \in \text{Aut}(X, X/G, p)$. Оберемо якусь $x \in X$. Згідно з означенням автоморфізма накриття, $G \cdot x = p(x) = p(\varphi(x)) = G \cdot \varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = a \cdot x = \lambda_a(x)$ для деякого $a \in G$ (причому a визначений однозначно, бо дія вільна: $a \cdot x \neq b \cdot x$ при $a \neq b$). Тоді $\varphi = \lambda_a$ за однозначною визначеністю автоморфізмів. Це й означає сюр'єктивність. Зауважимо, що лише тут ми використали лінійну зв'язність X .

■

Зауваження. Хоча ми й знаємо тепер, що група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на лінійно зв'язному накриваючому просторі X неперервно та цілком розривно, залишається питання, коли база Y є простором орбіт. Сформулюємо тепер необхідні і достатні умови того, що це так, тобто (X, Y, p) має вигляд накриття простору орбіт з попереднього твердження (точніше, еквівалентне йому в деякому сенсі, див. наступні зауваження і вправи). Тут $X/\text{Aut}(X, Y, p)$ позначає простір орбіт дії з твердження 11.1.

Твердження 11.3. *Нехай (X, Y, p) – накриття, де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. Існує гомеоморфізм $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що

$$\psi(p(x)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$$

для будь-якої точки $x \in X$.

2. Група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.

3. Існує точка $y \in Y$ така, що група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно.

Зауваження. Умова на ψ з пункту 1. даного твердження повністю визначає це відображення (бо p – сюр'єкція) і еквівалентна рівності $\psi \circ p = q$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проекція на простір орбіт, тобто комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ Y & \xrightarrow{\psi} & X/\text{Aut}(X, Y, p) \end{array}$$

просторів та непервних відображень. Пор. з наведеною перед означенням 10.1 діаграмою, що ілюструє поняття морфізма, зокрема ізоморфізма, накриття.

Вправа 11.2. За аналогією з означенням 10.1 визначити відношення еквівалентності накриття зі спільним накриваючим простором X , відносно якого (X, Y, p) в умовах твердження 11.3 еквівалентне накриттю $(X, X/\text{Aut}(X, Y, p), q)$.

Вправа 11.3. За допомогою комутативної діаграми з вправи 10.1 визначити відношення еквівалентності (ізоморфності) двох довільних накриття (X, Y, p) і (Z, W, q) , узагальнивши означення 10.1 і попередню вправу.

Доведення. 1. \Leftarrow 2. Отже, нехай група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на усіх шарах накриття. Тоді умова $\psi(p(x)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$, $x \in X$ коректно визначає відображення $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$. Дійсно, нехай $y = p(x) = p(z) \in Y$. Оскільки x і z належать до одного шару $p^{-1}(y)$, за умовою транзитивності існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x) = \varphi \cdot x$. Це й означає, що $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, тобто орбіта $\psi(y)$ визначена однозначно. І навпаки, якщо $\psi(p(x)) = \psi(p(z))$, тобто $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, то існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x)$. Тоді з означення автоморфізма випливає, що $p(x) = p(\varphi(x)) = p(z)$. Це означає, що ψ ін'єктивне. Воно сюр'єктивне, бо будь-яка орбіта $\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x \in X$ є образом $p(x)$ для її довільної точки x . Прообраз будь-якої відкритої підмножини $U \subset X/\text{Aut}(X, Y, p)$ згідно з побудовою ψ та сюр'єктивністю p дорівнює $\psi^{-1}(U) = p(p^{-1}(\psi^{-1}(U))) = p(q^{-1}(U))$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт (див. комутативну діаграму вище). Оскільки відображення q неперервне, а p – відкрите за вправою 7.1, $\psi^{-1}(U)$ відкрита. Отже, ψ неперервне. Нарешті, для будь-якої відкритої $U \subset Y$ знову ж за побудовою та бієктивністю ψ маємо $q^{-1}(\psi(U)) = p^{-1}(\psi^{-1}(\psi(U))) = p^{-1}(U)$. Це відкрита множина, бо p неперервне, отже $\psi(U)$ відкрита за означенням фактортопології. Звідси маємо, що ψ відкрите і таким чином дійсно є гомеоморфізмом. Він задовольняє умову пункту 1. за побудовою.

1. \Rightarrow 2. Нехай ψ – гомеоморфізм з пункту 1. Для будь-яких $y \in Y$, $x, z \in p^{-1}(y)$ тоді за умовою цього пункту маємо

$$\text{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \psi(p(x)) = \psi(y) = \psi(p(z)) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot z,$$

що й означає існування $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такого, що $z = \varphi(x)$, тобто транзитивність дії.

2. \Leftarrow 3. Нехай $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y)$ для деякої $y \in Y$. Оскільки Y лінійно зв'язний, для будь-якої $y' \in Y$ існує шлях $g \in C(I, Y)$,

що з'єднує її з y : $g(0) = y'$, $g(1) = y$. Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ тоді за лемою 8.1 існують і єдині підняття $f, h \in C(I, X)$ цього шляху з початками в x', z' відповідно: $p \circ f = p \circ h = g$, $f(0) = x'$, $h(0) = z'$. Їхні кінці $x := f(1)$ і $z := h(1)$ повинні належати до $p^{-1}(y)$. З транзитивності дії на цьому шарі маємо, що існує такий $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$, що $\varphi(x) = z$. З означення автоморфізма тоді випливає, що

$$p \circ \varphi \circ f(1-t) = p \circ f(1-t) = g(1-t) = p \circ h(1-t)$$

для будь-якого $t \in I$, тобто шляхи $\varphi \circ \bar{f}$ і \bar{h} є підняттями \bar{g} зі спільним початком $\varphi(\bar{f}(0)) = \varphi(x) = z = \bar{h}(0)$. Тоді за єдиністю у лемі 8.1 маємо $\varphi \circ \bar{f} = \bar{h}$, зокрема, $\varphi(x') = \varphi(\bar{f}(1)) = \bar{h}(1) = z'$. Таким чином, ми показали, що $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y')$.

Нарешті, імплікація 2. \Rightarrow 3. тривіальна. ■

Зауваження. Імплікація 2. \Leftarrow 3. – єдина у цьому доведенні, де явно використовувалася лінійна зв'язність (причому лише Y). Але насправді лінійна зв'язність X та Y суттєва для формулювання попереднього твердження, бо забезпечує розривність дії за твердженням 11.1, а отже те, що $(X, X/\text{Aut}(X, Y, p), q)$ є накриттям за твердженням 7.1. Накриття з властивістю, що описана у твердженні 11.3, мають спеціальну назву:

Означення 11.2. Накриття (X, Y, p) , де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, зветься *регулярним* (або *накриттям Галуа*), якщо група $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.

Зауваження. З твердження 11.3 випливає, що "для будь-якої точки $y \in Y$ " у цьому означенні можна замінити на "для деякої точки $y \in Y$ ". Оскільки цілком розривна (за твердженням 11.1) дія групи $\text{Aut}(X, Y, p)$ на X є вільною, у випадку регулярного накриття ця група діє на кожному шарі $p^{-1}(y)$ накриття вільно і транзитивно: для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує єдиний автоморфізм $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $\varphi(x) = z$. Фіксуючи точку x , ми таким чином отримуємо бієкцію між $p^{-1}(y)$ та $\text{Aut}(X, Y, p)$.

Приклад 11.1. Накриття $(X, X/G, p)$, де група G неперервно та цілком розривно діє на лінійно зв'язному і локально лінійно зв'язному просторі X , є регулярним. Дійсно, шарами цього накриття є орбіти $G \cdot x$, і для будь-яких двох точок $a \cdot x, b \cdot x \in G \cdot x$ автоморфізм $\lambda_{ba^{-1}} \in \text{Aut}(X, X/G, p)$ (див. твердження 11.2) переводить першу в другу. Також воно задовольняє пункту 1. твердження 11.3 для тогожнього ψ , бо простори орбіт за

діями груп G і $\text{Aut}(X, X/G, p)$ збігаються в силу твердження 11.2. Цей приклад є базовим, бо будь-яке регулярне накриття у певному сенсі зводиться до такого, як описано у твердженні 11.3.

Зауваження. Повернемося до фундаментальних груп. У випадку накриття $(X, X/G, p)$ з попереднього прикладу у доведенні пункту 2. теорему 9.1 було показано, що для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(X/G, G \cdot x)$ є ядром деякого гомоморфізма $\pi_1(X/G, G \cdot x) \rightarrow G$ і тому нормальна (нагадаємо також, що $p_*(\pi_1(X, x))$ ізоморфна групі $\pi_1(X, x)$ за пунктом 1. твердження 9.1 і зауваженням після його формулювання). Виявляється, що нормальність цієї підгрупи є зручним алгебраїчним критерієм регулярності накриття. Почнемо його доведення з двох корисних загальних лем.

Лема 11.1. *Нехай $p: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, $x, z \in X$, $p(x) = p(z)$, шлях $h: I \rightarrow X$ з'єднує x і z . Тоді*

$$p_*(\pi_1(X, z)) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X, x)) [p \circ h]$$

тобто підгрупи $p_(\pi_1(X, x))$ і $p_*(\pi_1(X, z))$ спряжені в $\pi_1(Y, y)$, де $y = p(x) = p(z)$, у сенсі прикладу А.12.*

Доведення. Отже, $h \in C(I, X)$, $h(0) = x$, $h(1) = z$, тому $p \circ h \in C(I, Y)$ як композиція неперервних, $p \circ h(0) = p \circ h(1) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y , отже визначений її гомотопічний клас $[p \circ h] \in \pi_1(Y, y)$. Нехай $\alpha: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, z)$ і $\beta: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами h і $p \circ h$ відповідно. Тоді для будь-якого $[g] \in \pi_1(Y, y)$ з побудови ізоморфізма β , означення множення і вигляду обернених елементів фундаментальної групи (див. теорему 4.1) впливає, що

$$\beta([g]) = [\overline{(p \circ h)} * g * (p \circ h)] = [\overline{p \circ h}] [g] [p \circ h] = [p \circ h]^{-1} [g] [p \circ h] = C_{[p \circ h]^{-1}}([g])$$

у позначеннях прикладу А.12, тобто β є спряженням у $\pi_1(Y, y)$ з елементом $[p \circ h]^{-1}$. Крім того, за лемою 10.1 маємо комутативність $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$. Зауважимо, що p_* у формулюванні та цій комутативності насправді позначає два, взагалі кажучи, різні індуковані гомоморфізми: $p_*: \pi_1(X, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ справа. Тоді, оскільки α – бієкція,

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(X, z)) &= p_*(\alpha(\pi_1(X, x))) = \beta(p_*(\pi_1(X, x))) = \\ &= C_{[p \circ h]^{-1}}(p_*(\pi_1(X, x))) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X, x)) [p \circ h]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали потрібну рівність підгруп. ■

Означення 11.3. Відображення топологічних просторів $\varphi: X \rightarrow Y$ зветься *локальним гомеоморфізмом*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $\varphi(U)$ відкрита і обмеження $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ – гомеоморфізм (відносно індукованих топологій).

Приклад 11.2. Для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p є локальним гомеоморфізмом: для довільної $x \in X$ в якості U з попереднього означення візьмемо правильно накриваючий окіл U_α точки x . Тоді $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow p(U_\alpha)$ – гомеоморфізм за означенням накриття (де $p(U_\alpha)$ – правильно накритий окіл $p(x)$).

Лема 11.2. 1. *Будь-який локальний гомеоморфізм є неперервним відкритим відображенням.*

2. *Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли це бієкція і локальний гомеоморфізм.*

Доведення.

1. Отже, нехай відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ просторів X та Y є локальним гомеоморфізмом. Для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in \varphi^{-1}(V)$ нехай $U \ni x$ – окіл з означення локальної гомеоморфності. Оскільки $\varphi|_U$ неперервне, а перетин $\varphi(U) \cap V$ є відкритим околom $\varphi(x)$ у індукованій топології $\varphi(U)$, його прообраз $(\varphi|_U)^{-1}(\varphi(U) \cap V) = U \cap \varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(V)$ є відкритим околom x у індукованій топології відкритої U , а отже у X . Оскільки це так для усіх точок $\varphi^{-1}(V)$, ця множина відкрита. Таким чином, φ неперервне. Аналогічним чином перевіряється його відкритість: для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $x \in V$ візьмемо окіл $U \ni x$ як вище. Тоді $U \cap V$ – відкритий окіл x у індукованій топології U , і, оскільки $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ бієктивне та відкрите, $\varphi|_U(U \cap V) = \varphi(U) \cap \varphi(V) \subset \varphi(V)$ є відкритим околom $\varphi(x)$ у індукованій топології відкритої $\varphi(U)$, а отже у Y . Оскільки це так для кожної точки $\varphi(x) \in \varphi(V)$, ця множина відкрита.

2. \Rightarrow Дійсно, будь-який гомеоморфізм бієктивний, а щоб перевірити його локальну гомеоморфність, достатньо у попередньому означенні покласти $U = X$.

\Leftarrow Достатність тут випливає з пункту 1.: бієктивний локальний гомеоморфізм є неперервним відкритим відображенням, а отже гомеоморфізмом.

■

Теорема 11.1 (Критерії регулярності накриття). *Нехай (X, Y, p) – накриття, де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. *Накриття (X, Y, p) є регулярним.*
2. *Підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$ для будь-якої точки $x \in X$.*
3. *$p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких точок $x, z \in X$ таких, що $p(x) = p(z)$.*
4. *Існує точка $x \in X$ така, що підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$.*
5. *Існує точка $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких точок $x, z \in p^{-1}(y)$.*

Доведення. Ми будемо доводити імплікації між цими твердженнями згідно зі схемою, що зображена нижче.

1. \Rightarrow 2. Якщо (X, Y, p) регулярне, то з твердження 11.3 випливає існування гомеоморфізма $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ такого, що $\psi \circ p = q$, де $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт. Тоді для кожної $x \in X$ маємо $\psi(p(x)) = q(x) = \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x$, а індукований гомоморфізм $\psi_*: \pi_1(Y, p(x)) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ є ізоморфізмом в силу твердження 5.2. Оскільки $\psi_* \circ p_* = (\psi \circ p)_* = q_*$ за пунктом 2. твердження 5.1, $\psi_*(p_*(\pi_1(X, x))) = q_*(\pi_1(X, x))$, де $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, p(x))$ і $q_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ – відповідні індуковані гомоморфізми. При цьому $q_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ за пунктом 2. теореми 9.1. Звідси випливає, що $p_*(\pi_1(X, x))$ – нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$, бо ψ_* – ізоморфізм (перевірте, що при ізоморфізмі нормальна підгрупа переходить у нормальну).

2. \Rightarrow 3. випливає з леми 11.1 та міркувань прикладу А.12: для будь-якої $x \in X$ усі $p_*(\pi_1(X, z))$ для $z \in X$ таких, що $p(z) = p(x)$, спряжені з $p_*(\pi_1(X, x))$, а отже збігаються з нею, оскільки $p_*(\pi_1(X, x))$ нормальна. Зауважимо, що для цього було б достатньо нормальності $p_*(\pi_1(X, x))$ лише для однієї точки x з кожного шару $p^{-1}(y)$, $y \in Y$.

2. \Rightarrow 4. тривіальним чином.

4. \Rightarrow 5. доводиться дослівно так само, як 2. \Rightarrow 3., тільки тепер лише для точок $p^{-1}(y)$, де $y := p(x)$, а x – точка з твердження 4. При цьому за цим твердженням нормальною є лише $p_*(\pi_1(X, x))$, але цього достатньо в силу зауваження наприкінці доведення 2. \Rightarrow 3.

5. \Rightarrow 3. Почнемо діяти аналогічно до доведення імплікації 2. \Leftarrow 3. у твердженні 11.3. Нехай $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, z))$ для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$. З лінійної зв'язності Y випливає існування для будь-якої точки $y' \in Y$ шляху $g \in C(I, Y)$, що з'єднує її з y . Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ нехай $f, h \in C(I, X)$ – (єдині) підняття шляху g з початками в x', z' відповідно. Зокрема, $p \circ f = p \circ h = g$. Покладемо $x := f(1)$, $z := h(1)$, тоді $x, z \in p^{-1}(y)$. Нехай $\alpha: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(X, x)$, $\beta: \pi_1(Y, y') \rightarrow \pi_1(Y, y)$ і $\gamma: \pi_1(X, z') \rightarrow \pi_1(X, z)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f, g і h відповідно. За лемою 10.1, тоді $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$, де p_* позначає два різні індуковані гомоморфізми: $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ справа. З цієї ж леми випливає, що $p_* \circ \gamma = \beta \circ p_*$, де тепер p_* позначає $p_*: \pi_1(X, z) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ зліва і $p_*: \pi_1(X, z') \rightarrow \pi_1(Y, y')$ справа. Таким чином, діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x') & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X, x) & & \pi_1(X, z') & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(X, z) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* & , & p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y') & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y) & & \pi_1(Y, y') & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y, y) \end{array}$$

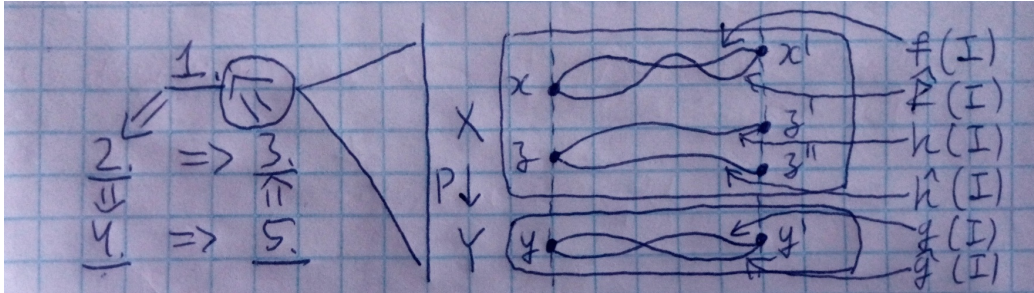
комутативні. Тоді з цих комутативностей, того, що α і γ – бієкції, та властивості точки y випливає, що

$$\begin{aligned} \beta(p_*(\pi_1(X, x'))) &= p_*(\alpha(\pi_1(X, x'))) = p_*(\pi_1(X, x)) = \\ &= p_*(\pi_1(X, z)) = p_*(\gamma(\pi_1(X, z'))) = \beta(p_*(\pi_1(X, z'))), \end{aligned}$$

тому, оскільки β – бієкція, $p_*(\pi_1(X, x')) = p_*(\pi_1(X, z'))$, що й потрібно було показати (це міркування, у свою чергу, нагадує один з кроків у доведенні теореми 10.1).

3. \Rightarrow 1. Це основний етап доведення теореми. Отже, нам відомо, що усі підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ для точок x , що належать одному й тому ж шару, збігаються. Нехай $y \in Y$. Треба показати, що $\text{Aut}(X, Y, p)$ діє на $p^{-1}(y)$ транзитивно, тобто що для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує $\varphi \in \text{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $\varphi(x) = z$.

Побудуємо відображення φ , використовуючи шляхи аналогічно до конструкції підняття $\tilde{\varphi}$ у доведенні теореми 10.1. Цю побудову проілюстровано знизу. Для будь-якої $x' \in X$ в силу лінійної зв'язності X існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує x з x' : $f(0) = x$, $f(1) = x'$. Тоді його проєкція $g := p \circ f \in C(I, Y)$ є шляхом, що з'єднує $y = p(x) = p(f(0))$ з $y' := p(x') = p(f(1))$. За лемою 8.1 у нього існує єдине підняття $h \in C(I, X)$ з початком у z , тобто $p \circ h = g$ і $h(0) = z$. Позначимо через $z' := h(1)$ кінець цього шляху. Зокрема, $p(z') = p \circ h(1) = g(1) = y'$.



Аналогічно до доведення теореми 10.1, нам тепер потрібно показати, що z' насправді не залежить від шляху f , тобто однозначно визначена точками x, z та x' . Дійсно, нехай $\hat{f} \in C(I, X)$ також з'єднує x з x' . Тоді $\hat{g} := p \circ \hat{f} \in C(I, Y)$ так само з'єднує y з y' . Нехай тепер $\hat{h} \in C(I, X)$ – (єдине) підняття \hat{g} з початком у z , і $z'' := \hat{h}(1) \in p^{-1}(y')$ – його кінець. Тоді добуток $\bar{f} * \hat{f}$ є петлю в x' , що проєктується у петлю $p \circ (\bar{f} * \hat{f}) = \bar{g} * \hat{g}$ в y' . Її гомотопічним класом у $\pi_1(Y, y')$ є

$$[\bar{g} * \hat{g}] = [p \circ (\bar{f} * \hat{f})] = p_*([\bar{f} * \hat{f}]) \in p_*(\pi_1(X, x')) = p_*(\pi_1(X, z')),$$

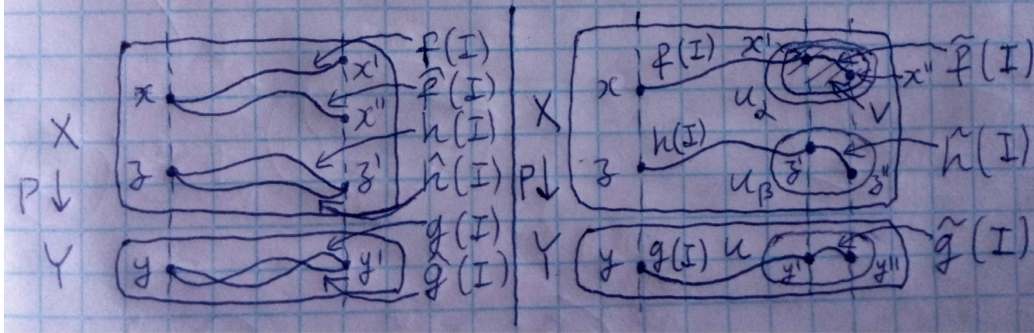
де остання рівність випливає з умови 3., бо $x', z' \in p^{-1}(y')$. Крім того, шлях $\bar{h} * \hat{h}$ починається в z' і є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\bar{h} * \hat{h}) = \bar{g} * \hat{g}$. Оскільки $[\bar{g} * \hat{g}] \in p_*(\pi_1(X, z'))$, (єдине) підняття $\bar{g} * \hat{g}$ з початком у z' повинне бути петлею за пунктом 2. твердження 9.1, тобто $z'' = \hat{h}(1) = \bar{h} * \hat{h}(1) = \bar{h} * \hat{h}(0) = \bar{h}(0) = z'$. Це й доводить незалежність z' від f . Тому (для фіксованих x і z) коректно визначене відображення $\varphi: X \rightarrow X$, що ставить у відповідність кожній $x' \in X$ точку $\varphi(x') := z'$ описаним вище чином. При цьому за його побудовою маємо у наших позначеннях $p(\varphi(x')) = p(z') = y' = p(x')$ для усіх x' , тобто $p \circ \varphi = p$. Для $x' = x$ можна взяти $f = e_x$, тоді $g = e_y$ і $h = e_z$, звідки $\varphi(x) = z' = h(1) = z$. Таким чином, щоб показати, що φ – потрібний нам елемент групи $\text{Aut}(X, Y, p)$, залишилося перевірити його гомеоморфність. Згідно з пунктом 2. леми 11.2, для цього достатньо буде показати, що це бієкція і локальний гомеоморфізм.

Перевірка ін'єктивності φ схожа на раніше зроблену перевірку коректності. Вона зображена на рисунку нижче. Нехай $x', x'' \in X$ такі, що $\varphi(x') = \varphi(x'') = z'$. За побудовою φ це означає, що для шляхів $f, \hat{f} \in C(I, X)$, що з'єднують x з x' та x'' відповідно, їхніх проєкцій $g = p \circ f, \hat{g} = p \circ \hat{f} \in C(I, Y)$ та підняттів $h, \hat{h} \in C(I, X)$ шляхів g і \hat{g} відповідно з початками у z маємо $h(1) = \hat{h}(1) = z'$. Тоді визначена петля $\bar{h} * \hat{h}$ у z' , що накриває петлю $p \circ (\bar{h} * \hat{h}) = \bar{g} * \hat{g}$ в $y' = p(z') = p(x') = p(x'')$.

Оскільки тепер для відповідного гомотопічного класу в $\pi_1(Y, y')$ маємо

$$[\bar{g} * \hat{g}] = [p \circ (\bar{h} * \hat{h})] = p_*([\bar{h} * \hat{h}]) \in p_*(\pi_1(X, z')) = p_*(\pi_1(X, x'))$$

знову ж за умовою 3., підняття $\bar{f} * \hat{f}$ петлі $\bar{g} * \hat{g}$ з початком у $\bar{f} * \hat{f}(0) = \bar{f}(0) = x'$ повинне бути петлею, тобто $x'' = \hat{f}(1) = \bar{f} * \hat{f}(1) = \bar{f} * \hat{f}(0) = x'$.



Отже, φ ін'єктивне. Щоб показати його сюр'єктивність, спочатку побудуємо для довільної $z' \in X$ шлях $h \in C(I, X)$, що з'єднує z і z' та є підняттям $g := p \circ h \in C(I, Y)$, а потім побудуємо підняття $f \in C(I, X)$ шляху g з початком у x (зокрема, $g = p \circ f$). Якщо покласти $x' := f(1)$, то $\varphi(x') = h(1) = z'$ за побудовою φ . Це завершує доведення бієктивності цього відображення.

Як було анонсовано раніше, завершимо доведення імплікації 3. \Rightarrow 1. демонстрацією локальної гомеоморфності φ , що проілюстрована вище. Саме тут єдине місце у доведенні теореми, де знадобиться локальна лінійна зв'язність. Будемо діємо аналогічно до доведення неперервності $\tilde{\varphi}$ у теоремі 10.1. Отже, нехай $x' \in X$. У точки $y' := p(x') \in Y$ за означенням накрыття існує правильно накрытий відкритий окіл $U \ni y': p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тоді існують індекси $\alpha, \beta \in A$ такі, що $x' \in U_\alpha, z' := \varphi(x') \in U_\beta$ (бо $x', z' \in p^{-1}(y')$). В силу локальної лінійної зв'язності X , існує лінійно зв'язна відкрита V така, що $x' \in V \subset U_\alpha$. Лінійна зв'язність означає, що для будь-якої $x'' \in V$ існує шлях $\tilde{f} \in C(I, V)$, що з'єднує x' з x'' . Якщо тепер $f \in C(I, X)$ – якийсь шлях, що з'єднує x з x' , то шлях $f * \tilde{f} \in C(I, X)$ з'єднує x з x'' . Спроектуємо його у шлях $p \circ (f * \tilde{f}) = g * \tilde{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y з $y'' := p(x'')$, де шляхи $g := p \circ f$ та $\tilde{g} := p \circ \tilde{f}$ з'єднують y з y' та y' з y'' відповідно. Тепер зауважимо, що якщо $h, \tilde{h} \in C(I, X)$ – (єдині) підняття g і \tilde{g} з початками у точках z і z' відповідно, то за побудовою φ шлях h повинен закінчуватися у $\varphi(x') = z'$, тому визначений $h * \tilde{h}$, що є підняттям $p \circ (h * \tilde{h}) = g * \tilde{g}$ з початком у z . Тоді $z'' := \varphi(x'') = h * \tilde{h}(1) = \tilde{h}(1)$

за побудовою φ , тобто це кінець шляху \tilde{h} . Оскільки $\tilde{f}(I) \subset V \subset U_\alpha$, $\tilde{g}(I) = p(\tilde{f}(I)) \subset p(V) \subset U$, і тому $\tilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$, бо \tilde{h} є підняттям \tilde{g} . При цьому $\tilde{h}(0) = z' \in U_\beta$. Тоді з $\tilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$ та зі зв'язності $\tilde{h}(I)$ аналогічно до доведення теореми 10.1 (або до доведення єдиності у лемі 8.1) випливає, що $\tilde{h}(I) \subset U_\beta$. Зокрема, $z'' = \tilde{h}(1) \in U_\beta$. З іншого боку, $p(z'') = p(x'') = y''$, а обмеження $p|_{U_\beta}: U_\beta \rightarrow U$ є гомеоморфізмом за означенням накриття. Таким чином,

$$\varphi(x'') = z'' = (p|_{U_\beta})^{-1}(y'') = (p|_{U_\beta})^{-1}(p(x'')) = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}(x'')$$

для будь-якої $x'' \in V$, тобто $\varphi|_V = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}$, де $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ також є гомеоморфізмом. Тому обмеження $\varphi|_V: V \rightarrow \varphi(V)$ – теж гомеоморфізм, де $\varphi(V)$ відкрита у індукованій топології відкритої U_β , а отже в X , як образ V під дією гомеоморфізма. Це завершує доведення локальної гомеоморфності φ , імплікації та теореми в цілому. Також ми показали, що локально φ дійсно виглядає як тасування колоди карт, переводячи відкриту підмножину U_α у відкриту підмножину U_β композицією обмежень відображення p .

Вправа 11.4. Показати, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з локально лінійно зв'язними X та Y локально виглядає так само.

Зауважимо також, що згідно зі схемою вище імплікація 2. \Rightarrow 3. нам сама по собі насправді не була потрібна.

■

Вправа 11.5. Спробуйте показати суттєвість умови локальної лінійної зв'язності простору X для цієї теореми (аналогічно до зауваження після доведення теореми 10.1).

Наслідок 11.1. *Універсальне накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору є регулярним.*

Доведення. Тобто маємо накриття (X, Y, p) , де накриваючий простір X однозв'язний (зокрема, лінійно зв'язний, а отже й Y лінійно зв'язний), а Y локально лінійно зв'язний (отже й X локально лінійно зв'язний за твердженням 10.1). Тоді $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для кожної $x \in X$, тому підгрупа $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_{p(x)}]\}$ тривіальна, а отже нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$. Тому накриття регулярне за теоремою 11.1.

■

Приклад 11.3. Оскільки будь-який многовид M є локально лінійно зв'язним за пунктом 5. твердження 29.2 курсу топології, будь-яке універсальне накриття простору M є регулярним. Зокрема, простори \mathbb{R}^n ,

сфери S^n , тори T^n та дійсні проєктивні простори $\mathbb{R}P^n$ є n -вимірними лінійно зв'язними многовидами для усіх натуральних n (див. розділ 29 курсу топології), тому універсальні накриття (\mathbb{R}^n, T^n, p) і $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ (при $n \geq 2$), що розглядалися у прикладах 7.4 і 7.5 відповідно, регулярні за попереднім наслідком. Крім того, тривимірними лінійно зв'язними многовидами є лінзові простори $L(n, m)$, що були описані у прикладі 7.7 (перевірте це; також тут можна використати твердження 12.4 наступного розділу), тому описані у тому ж прикладі їх універсальні накриття $(S^3, L(n, m), p)$ теж регулярні. Звичайно, регулярність перелічених накриттів впливає також з того, що це накриття над просторами орбіт груп, що діють на однозв'язних і локально лінійно зв'язних накриваючих просторах (що теж є многовидами) неперервно та цілком розривно, згідно з прикладом 11.1. Зауважимо також, що суттєвою для цих міркувань є лише властивість локальної евклідовості многовида. Ми повернемося до обговорення накриттів многовидів у наступному розділі.

Приклад 11.4. Хоча букет двох кіл $S^1 \vee S^1$, а також накриваючий простір його універсального накриття, що було побудоване у прикладі 9.4, і не є многовидами (чому?), $S^1 \vee S^1$ є локально лінійно зв'язним (перевірте це), тому це універсальне накриття теж задовольняє умові наслідку 11.1 і є регулярним. Знову ж, це впливає і з того, що це накриття над простором орбіт (приклад 11.1). Все сказане тут вірне й для узагальнення на букет n кіл у вправі 9.2 (при $n \geq 2$).

Наслідок 11.2. *Накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору, фундаментальна група якого абелева, з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.*

Доведення. Як і в доведенні наслідку 11.1, це накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними X та Y . При цьому в силу лінійної зв'язності Y усі його фундаментальні групи ізоморфні за наслідком 4.1, тому можемо говорити просто про "абелеву фундаментальну групу", маючи на увазі, що $\pi_1(Y, y)$ абелева для будь-якої $y \in Y$. Але тоді всі її підгрупи нормальні, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$, отже накриття регулярне за теоремою 11.1. ■

Приклад 11.5. Усі фундаментальні групи, що поки що були обчислені у цьому курсі, крім фундаментальних груп букетів кіл з прикладу 9.4 і вправи 9.2 (вони ж фундаментальні групи площини з виколотими точками з вправи 9.3), були абелевими, тому накриття відповідних просторів задовольняють попередньому наслідку при виконанні додаткових

умов зв'язності та є таким чином регулярними. Зокрема, неуніверсальні n -листові накриття (S^1, S^1, p) , що визначені дією \mathbb{Z}_n і досліджувалися у прикладах 7.6 та 9.3, є регулярними, бо $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ абелева, а коло S^1 лінійно зв'язне і локально лінійно зв'язне як многовид. Згадаємо, що при отождненні $\pi_1(S^1, y)$ з \mathbb{Z} для деякої $y \in S^1$ усі $p_*(\pi_1(S^1, x))$ при $x \in p^{-1}(y)$ дійсно збігалися, як це й повинно бути за теоремою 11.1: це була підгрупа $n\mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n . Звичайно, регулярність також впливає з прикладу 11.1, бо це накриття над простором орбіт.

Приклад 11.6. Оскільки топологічні групи мають абелеві фундаментальні групи згідно з вправою 4.3, будь-яке лінійно зв'язне накриття локально лінійно зв'язної топологічної групи регулярне за наслідком 11.2. До таких топологічних груп відносяться \mathbb{R}^n , тори T^n (зокрема коло S^1) та матричні групи $SO(n)$, $U(n)$ і $SU(n)$ (див. приклад 4.3). Перевірте, що всі ці топологічні групи дійсно є лінійно зв'язними (для багатьох з них це встановлювалося в курсі топології) та локально лінійно зв'язними. Зокрема, локальну лінійну зв'язність можна вивести з того, що усі перелічені групи є многовидами, але в останніх трьох прикладах це не так просто довести.

Вправа 11.6. Показати, що будь-яке дволистоє накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.

Вправа 11.7. Побудувати приклад трилистоєго накриття простору $S^1 \vee S^1$ з лінійно зв'язним накриваючим простором, що не має нетотожних автоморфізмів, а отже не є регулярним.

Наслідок 11.3. Якщо накриття (X, Y, p) регулярне, то його групи монодромії ізоморфні його групі автоморфізмів:

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq \text{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $x \in X$. Зокрема, якщо це регулярне накриття є універсальним, то

$$\pi_1(Y, y) \simeq \text{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $y \in Y$.

Доведення. Нехай $\psi: Y \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – гомеоморфізм з твердження 11.3. У доведенні імплікації 1. \Rightarrow 2. теореми 11.1 було показано, що тоді для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ переходить у $q_*(\pi_1(X, x))$ під дією ізоморфізма $\psi_*: \pi_1(Y, p(x)) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$. Тут $q: X \rightarrow X/\text{Aut}(X, Y, p)$ – канонічна проєкція на простір орбіт, $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow$

$\pi_1(Y, p(x))$ і $q_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ – індуковані гомоморфізми. Тоді факторгрупи ізоморфних фундаментальних груп за ізоморфними нормальними підгрупами $p_*(\pi_1(X, x))$ та $q_*(\pi_1(X, x))$ теж ізоморфні (перевірте це):

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) &\simeq \\ &\simeq \pi_1(X/\text{Aut}(X, Y, p), \text{Aut}(X, Y, p) \cdot x)/q_*(\pi_1(X, x)) \simeq \text{Aut}(X, Y, p), \end{aligned}$$

де друга ізоморфія є твердженням пункту 2. теореми 9.1.

Оскільки у випадку універсального накриття $\pi_1(X, x)$ (а отже й образи $p_*(\pi_1(X, x))$) тривіальні для усіх $x \in X$, друга ізоморфія в умові даного наслідку випливає з першої (або аналогічним чином виводиться з пункту 2. наслідку 9.1).

■

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [4] або частині I книги [9] (гл. 1–3). Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення А.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \rightarrow G: (a, b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e . Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a, b) \mapsto a + b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад А.1. *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці, з очевидною груповою операцією: $ee = e$.

Приклад А.2. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу \mathbb{Z} . Це ж вірно для множин дійсних \mathbb{R} чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад А.3. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множин ненульових

елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад А.4. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n : $k \equiv l \pmod{n}$, тобто $k-l$ кратне n . Відповідна множина класів еквівалентності позначається \mathbb{Z}_n . У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n . Тоді коректно (чому?) визначена операція додавання $[k]+[l] := [k+l]$, що перетворює \mathbb{Z}_n на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем n* . Звичайно, група \mathbb{Z}_1 тривіальна.

Приклад А.5. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \dots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу S_n* . При $n \geq 3$ вона є неабелевою.

Приклад А.6. Ще одним прикладом неабелевої (за умови $n \geq 2$) групи є *вільна група з n твірними* для натурального n . Так зветься фактормножина множини скінченних слів, що складаються з символів $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ за відношенням еквівалентності, що задане умовами

$$W_1 a_i a_i^{-1} W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1 a_i^{-1} a_i W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого i та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Групова операція визначається за допомогою послідовного записування слів з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 буде клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. У подальшому будемо для спрощення позначень замість класів еквівалентності слів записувати самі слова у якості елементів групи (але пам'ятати, що вони представляють відповідний клас, тому, наприклад, $W_1 a_i a_i^{-1} W_2 = W_1 W_2$). Групова операція коректно визначена та асоціативна, а нейтральним елементом є порожнє слово (тобто його клас еквівалентності). Також неважко переконатися у тому, що обернений елемент до довільного слова $W = b_1 \dots b_m$ має вигляд

$$W^{-1} = (b_1 \dots b_m)^{-1} := (b_m)^{-1} \dots (b_1)^{-1},$$

де вважаємо $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Тому це дійсно група. Позначимо її через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а елементи a_1, \dots, a_n (тобто слова з одного символу) будемо звати *твірними* (або *породжуючими елементами*) групи. При $n = 1$ ця група ізоморфна \mathbb{Z} (див. доведення цього у прикладі А.15 нижче), а при $n \geq 2$ дійсно є неабелевою, бо, наприклад, $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ за побудовою. Подальшу інформацію див. у [4, с. 64-70].

Означення А.2. Відображення груп $\alpha: G \rightarrow H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це).

Приклад А.7. *Тривіальний* гомоморфізм $G \rightarrow H$ визначений для будь-яких груп G і H як постійне відображення, що переводить кожний елемент G у одиницю $e \in H$. Він очевидним чином задовольняє попередньому означенню.

Означення А.3. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо він є бієкцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha: G \rightarrow H$, то говорять, що група G *ізоморфна* групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом, зокрема гомоморфізмом, в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (перевірте це) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад А.8. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах А.3 і А.2 відповідно (перевірте це).

Означення А.4. *Прямим добутком* груп G_1 і G_2 зветься їх прямий декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з почленно визначеною груповою операцією: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) := (a_1b_1, a_2b_2)$ для будь-яких $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$.

Перевірте, що така операція дійсно перетворює $G_1 \times G_2$ на групу і що прямий добуток груп асоціативний, тобто $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$ для будь-яких груп G_1, G_2 і G_3 , тобто відповідні групові структури на $G_1 \times G_2 \times G_3$ збігаються. Більш того, ця конструкція очевидним чином узагальнюється на довільну скінченну кількість множників (див. також [4, с. 100-101]). Зауважимо крім того, що добуток будь-якої групи G на тривіальну групу ізоморфний G (запишіть відповідний ізоморфізм), а добуток абелевих груп абелевий в силу означень. Прямий добуток скінченної кількості абелевих груп G_1, \dots, G_n ще називають їх *прямою сумою* і позначають $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Приклад А.9. Прямий добуток будь-якого натурального числа n копій групи \mathbb{Z} (відповідно, \mathbb{R}) з прикладу А.2 будемо позначати через \mathbb{Z}^n (\mathbb{R}^n). У позначеннях прямої суми це виглядає як $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$ та $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_n$ відповідно. Таким чином, \mathbb{Z}^n і \mathbb{R}^n – абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$.

Означення А.5. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G , якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення А.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Означення А.6. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо $aba^{-1} \in H$ для будь-яких $a \in G$ і $b \in H$.

Приклад А.10. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад А.1) та G , що є, очевидно, нормальними.

Усі підгрупи будь-якої абелевої групи є нормальними, бо в цьому випадку $aba^{-1} = b \in H$ для усіх $a \in G$, $b \in H$.

Приклад А.11. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу А.3, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина \mathbb{Z}^n у \mathbb{R}^n з прикладу А.9 (зокрема \mathbb{Z} у \mathbb{R}) є підгрупою. Усі ці підгрупи нормальні в силу абелевості.

Приклад А.12. Будь-який елемент a довільної групи G визначає *спряження* (внутрішній автоморфізм)

$$C_a: G \rightarrow G: b \mapsto aba^{-1},$$

що є ізоморфізмом G на себе (тобто дійсно *автоморфізмом*). Зокрема, він переводить кожную підгрупу $H \subset G$ у *спряжену* до неї підгрупу

$$aHa^{-1} := C_a(H) = \{aba^{-1} \mid b \in H\}.$$

Перевірте ці твердження, друге з яких можна вивести з більш загального факту: будь-який ізоморфізм переводить підгрупи у підгрупи. Згідно з попереднім означенням, нормальні підгрупи G – це в точності ті, що

зберігаються при усіх внутрішніх автоморфізмах, тобто ті підгрупи $H \subset G$, для яких $aHa^{-1} = H$ для будь-яких $a \in G$. Якщо G абелева, то всі її внутрішні автоморфізми є тотожними відображеннями. Див. також деяку подальшу інформацію у [4, с. 60-62].

Означення А.7. Нехай H – підгрупа групи G . Для кожного елемента $a \in G$ підмножини $aH := \{ab \mid b \in H\} \subset G$ та $Ha := \{ba \mid b \in H\} \subset G$ звуться відповідно *лівим* та *правим класами суміжності* a за H .

При цьому належність елементів групи до одного лівого або правого класу суміжності є відношенням еквівалентності (перевірте це, а також те, що ліві та праві класи суміжності – це орбіти деяких правої та лівої дій H на G відповідно, див. розділ 18 курсу топології). Таким чином, у загальному випадку виникають дві фактормножини G за цими відношеннями еквівалентності, між якими, втім, існує бієкція (яка саме?). Але якщо H нормальна, то можна говорити про однозначно визначену фактормножину:

Твердження А.1. Нехай H – нормальна підгрупа групи G . Тоді для кожного $a \in G$ його ліві та праві класи суміжності за H збігаються: $aH = Ha$. При цьому бінарна операція

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H: (aH, bH) \mapsto aH bH := abH$$

на множині G/H класів суміжності G за H коректно визначена і задає на цій фактормножині структуру групи.

Означення А.8. Множина G/H (одночасно лівих та правих) класів суміжності групи G за її нормальною підгрупою H з груповою структурою, що описана у попередньому твердженні, зветься *факторгрупою* G за H .

Факторгрупа будь-якої абелевої групи є абелевою за побудовою.

Приклад А.13. Факторгрупа довільної групи G за тривіальною підгрупою $\{e\}$ ізоморфна G , бо кожен клас суміжності складається з одного елемента, а за тривіальною підгрупою G – ізоморфна $\{e\}$, бо єдиним класом суміжності буде сама G (перевірте це, явно записавши відповідні ізоморфізми).

Означення А.9. Нехай G і H – деякі групи, а відображення $\alpha: G \rightarrow H$ – їх гомоморфізм. Його *ядром* зветься

$$\text{Ker } \alpha := \{a \mid \alpha(a) = e\} \subset G,$$

а *образом* –

$$\text{Im } \alpha := \alpha(G) = \{\alpha(a) \mid a \in G\} \subset H.$$

Тут і в наступному твердженні через e знову позначаємо одиниці обох цих груп.

Твердження А.2 (Властивості ядра та образу). *Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – деякий гомоморфізм груп.*

1. $\text{Ker } \alpha$ – нормальна підгрупа G і α – ін'єкція (мономорфізм) тоді й тільки тоді, коли $\text{Ker } \alpha = \{e\}$;
2. $\text{Im } \alpha$ – підгрупа H і α – сюр'єкція (епіморфізм) тоді й тільки тоді, коли $\text{Im } \alpha = H$;
3. Відображення

$$G/\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha: a \text{Ker } \alpha \mapsto \alpha(a)$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Таким чином, пункт 3. цього твердження (що називають ще *першою теоремою Ньотера про ізоморфізм*) означає, що $G/\text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha$ для будь-якого гомоморфізма $\alpha: G \rightarrow H$.

Приклад А.14. Для натурального n розглянемо відображення

$$\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n: k \mapsto [k]$$

абелевих груп з прикладів А.2 та А.4 відповідно. Оскільки

$$\alpha(k+l) = [k+l] = [k] + [l] = \alpha(k) + \alpha(l)$$

для будь-яких $k, l \in \mathbb{Z}$ за побудовою структури групи на \mathbb{Z}_n , α є гомоморфізмом. Він сюр'єктивний, бо $[k] = \alpha(k)$ для будь-якого $[k] \in \mathbb{Z}_n$, тобто $\text{Im } \alpha = \mathbb{Z}_n$. Ядро цього гомоморфізма має вигляд

$$\text{Ker } \alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = [0]\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 \pmod{n}\} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\},$$

тобто складається з усіх кратних n цілих чисел. Позначимо цю підмножину через $n\mathbb{Z}$. Неважко безпосередньо перевірити, що це нормальна (хоча б у силу абелевості) підгрупа \mathbb{Z} , як і повинно бути за пунктом 1. попереднього твердження. Тоді за його ж пунктом 3. маємо

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n,$$

де ізоморфізм задається умовою $k + n\mathbb{Z} \mapsto \alpha(k) = [k]$ для кожного $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (де використовуємо адитивні позначення також і для класів суміжності).

Якщо гомоморфізм груп $\alpha: G \rightarrow H$ ін'єктивний, то з прикладу А.13 і пунктів 1. та 3. твердження А.2 маємо

$$G \simeq G/\{e\} = G/\text{Ker } \alpha \simeq \text{Im } \alpha = \alpha(G),$$

більш того, відповідним ізоморфізмом $G \rightarrow \alpha(G)$ буде саме α (чому?), що неважко перевірити й безпосередньо.

Наслідок А.1. *Будь-який ін'єктивний гомоморфізм груп є ізоморфізмом на свій образ.*

Продовжимо розмову про вільну групу з n твірними $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, що була розпочата у прикладі А.6, використовуючи ті ж позначення, що там. Нехай тепер $\{r_1, \dots, r_m\}$ – якась скінченна множина слів, що складаються з тих же символів $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$. Змінимо наше відношення еквівалентності на множині усіх скінченних слів, додавши до перелічених у прикладі А.6 умови

$$W_1 r_j W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1 r_j^{-1} W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого $j = \overline{1, m}$ та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Тут обернене слово r_j^{-1} визначається за звичними правилами: якщо $r_j = b_1 \dots b_m$, то $r_j^{-1} = (b_m)^{-1} \dots (b_1)^{-1}$, де $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Далі розглядаємо фактормножину множини слів саме за цим відношенням еквівалентності й так само у якості елементів цієї множини записуємо самі слова. Введемо на отриманій таким чином фактормножині групову операцію як у випадку вільної групи, послідовно записуючи слова з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 є клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. Перевірте, що введена таким способом операція коректно визначена й асоціативна. Нейтральним елементом є клас еквівалентності порожнього слова, який ми далі позначатимемо через e . Наприклад, $a_i a_i^{-1} = e$ або $r_j = e$ для будь-яких i та j . Обернені елементи можна знаходити так, як вказано вище для r_j (чому?). Тому це дійсно група.

Означення А.10. Описану вище групу будемо називати *групою з твірними a_1, \dots, a_n та співвідношеннями r_1, \dots, r_m* . Вона позначається через $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Якщо якась група G ізоморфна $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, то будемо говорити, що вона має опис у термінах твірних a_1, \dots, a_n та співвідношень r_1, \dots, r_m (або *копредставлення $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$*).

Співвідношення часто для наочності записують у вигляді рівностей: $r_j = e$ замість просто r_j . Також часто частину співвідношення переносять вправо: якщо $r_j = c_j d_j^{-1}$ для деяких слів c_j і d_j , то пишуть $c_j = d_j$ замість r_j . З опису відношення еквівалентності випливає, що у цьому випадку

$$W_1 c_j W_2 = W_1 c_j d_j^{-1} d_j W_2 = W_1 r_j d_j W_2 = W_1 d_j W_2$$

для будь-яких слів W_1 і W_2 . Також у подальшому будемо використовувати очевидні спрощені позначення для степенів: писати a_i^k замість $\underbrace{a_i \dots a_i}_k$ і a_i^{-k} замість $\underbrace{a_i^{-1} \dots a_i^{-1}}_k$ для усіх натуральних k та будь-якого i . Під a_i^0

при цьому будемо розуміти одиницю групи e . Множина співвідношень не визначена групою однозначно: до їх списку без зміни групи можна додавати, наприклад, $a_i a_i^{-1}$ для довільних i та інші вирази, що є одиничними за побудовою. На практиці список співвідношень намагаються зробити мінімальним. Встановлення ізоморфності або неізоморфності двох груп, що задані твірними та співвідношеннями, є у загальному випадку доволі складною комбінаторною задачею (при цьому множина твірних теж не визначена класом ізоморфності групи однозначно).

Приклад А.15. Група з твірними a_1, \dots, a_n і без співвідношень за побудовою є просто вільною групою $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ з твірними a_1, \dots, a_n . Зокрема, "групою без твірних" вважатимемо тривіальну: $\langle \rangle = \{e\}$.

Тепер розглянемо групу з однією твірною $\langle a \rangle$. Її довільний елемент з урахуванням введених вище позначень однозначно представляється у вигляді a^n для деякого $n \in \mathbb{Z}$, який можна отримати, "приводячи подібні" літери a і a^{-1} , якщо вони стоять поруч (чому таке представлення однозначне?). При цьому $a^n a^m = a^{n+m}$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$. Перевірте це, розглянувши різні варіанти знаків у цілих числах n, m і $n + m$. Тому бієктивне відображення $\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Z}: a^n \rightarrow n$ є гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Приклад А.16. Розглянемо групу $\langle a \mid a^n \rangle$, де $n \geq 2$ натуральне (при $n = 0$ в силу наших домовленостей про позначення це $\langle a \rangle$, а при $n = 1$ – тривіальна група $\{e\}$). Аналогічним до $\langle a \rangle$ чином встановлюємо, що довільний елемент цієї групи має вигляд a^i для деякого $i = \overline{0, n-1}$. Дійсно, спочатку, як у попередньому прикладі, отримуємо вираз a^j для деякого цілого j , а потім, враховуючи рівність $a^n = e$, перепишемо його як a^i , де i – залишок від ділення j на n . І взагалі, $a^i = a^j$ тоді й тільки тоді, коли $i \equiv j \pmod{n}$. Оскільки при цьому $a^i a^j = a^{i+j}$, відображення

$\langle a \mid a^n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_n: a^i \rightarrow [i]$ у групу \mathbb{Z}_n з прикладу А.4 є бієктивним (чому?) гомоморфізмом, тобто ізоморфізмом груп, і $\langle a \mid a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Групи з однією твірною, що розглядалися у цьому та попередньому прикладах, тобто (з точністю до ізоморфізма) нескінченна \mathbb{Z} та скінченні \mathbb{Z}_n , звуться ще *циклическими* (див. також [4, с. 30-32]).

Приклад А.17. Єдине співвідношення групи $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ згідно з домовленостями вище зручно буде переписати у вигляді $ab = ba$. Звідси, переходячи до обернених елементів, отримаємо $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, а домножаючи зліва і справа на a^{-1} і b^{-1} – $ba^{-1} = a^{-1}b$ і $b^{-1}a = ab^{-1}$ відповідно. Враховуючи ці співвідношення, у довільному слові з символів a, b, a^{-1}, b^{-1} можна їх переставляти, допоки не отримаємо $a^n b^m$ для деяких $n, m \in \mathbb{Z}$, і різні пари n, m відповідають різним елементам групи (чому?). Крім того, в силу тих же співвідношень $a^n b^m a^k b^l = a^{n+k} b^{m+l}$ для будь-яких $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. Тому відображення $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2: a^n b^m \rightarrow (n, m)$ у групу \mathbb{Z}^2 з прикладу А.9 є бієктивним гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Аналогічним способом можна описати у термінах твірних та співвідношень групу \mathbb{Z}^n і для довільного n (зробіть це). Таким чином, додавання співвідношень вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ дозволяють перетворити вільну групу на абелеву. Тому \mathbb{Z}^n ще називають *вільною абелевою групою з n твірними*.

Приклад А.18. Для будь-якої скінченної групи G розглянемо групу $\langle a, a \in G \mid abc^{-1}, a, b, c \in G: ab = c \rangle$, твірними якої є елементи G , а співвідношення визначені таблицею множення G (тут у рівності $ab = c$ елементи a і b множаться у G). Покажіть, що відображення $a \mapsto a$ задає ізоморфізм G на описану вище групу. Таким чином, будь-яку скінченну групу можна описати у термінах твірних та співвідношень, хоча це буде, взагалі кажучи, доволі неекономний опис. Більш того, якщо у означенні А.10 дозволити довільну кількість твірних та співвідношень, зберігаючи вимогу на скінченну довжину слів, так можна описати взагалі будь-яку групу (перевірте, що ваше доведення залишається вірним і для цього випадку).

Твердження А.3. Нехай N – найменша за включенням нормальна підгрупа групи $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, що містить її елементи s_1, \dots, s_l (у такому випадку говорять, що N породжена s_1, \dots, s_l). Тоді відображення

$$G/N \rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l \rangle: W N \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Тут нормальна підгрупа N , що породжена s_1, \dots, s_l , завжди існує (покажіть це; пор. також з доведенням твердження А.4 нижче) і єдина як найменший елемент частково впорядкованої множини (якої?). Іншими словами, факторизація G за N і дописування s_1, \dots, s_l у список співвідношень G дають ізоморфні групи. Подальшу інформацію та приклади опису груп у термінах твірних та співвідношень можна знайти, наприклад, у [4, с. 70-72] і [9, с. 23-28, 215-221].

Один зі способів "прояснення" структури групи, зокрема, такої, що задана твірними та співвідношеннями – це перехід до зв'язаної з нею абелевої групи, що описаний у наступному означенні:

Означення А.11. Нехай G – деяка група. *Комутатором* двох елементів $a, b \in G$ зветься $aba^{-1}b^{-1} \in G$. *Комутантом* (або *першою похідною підгрупою*) групи G зветься підгрупа $G' \subset G$, що породжена усіма комутаторами, тобто найменша за включенням підгрупа G , що містить вирази $aba^{-1}b^{-1}$ для усіх $a, b \in G$. Факторгрупа G/G' зветься *абеліанізацією* G .

Твердження А.4. *Факторгрупа G/G' коректно визначена (тобто підгрупа G' коректно визначена і є нормальною) та абелева.*

Доведення. З опису у означенні випливає, що G' складається з усіх можливих добутоків елементів вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ (і обернених до них, але обернені мають той же вигляд), тобто його довільний елемент дорівнює $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$. Це підгрупа G (чому?) і будь-яка підгрупа, що містить усі комутанти, повинна містити й усі добутки такого вигляду, тобто включати всю G' . Тому вона і є найменшою за включенням з такою властивістю (єдиною такою як найменший елемент частково впорядкованої множини). При цьому для будь-якого $c \in G$

$$\begin{aligned} ca_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}c^{-1} &= (ca_1c^{-1})(cb_1c^{-1})(ca_1c^{-1})^{-1}(cb_1c^{-1})^{-1} \dots \\ &\dots (ca_kc^{-1})(cb_kc^{-1})(ca_kc^{-1})^{-1}(cb_kc^{-1})^{-1} \in G', \end{aligned}$$

що й демонструє нормальність G' .

За означенням факторгрупи G/G' , довільний її елемент – це суміжний клас aG' , де $a \in G$, а комутатор будь-яких двох елементів дорівнює

$$aG' bG' (aG')^{-1} (bG')^{-1} = aba^{-1}b^{-1}G' = eG',$$

бо $aba^{-1}b^{-1} \in G'$ (тут $a, b \in G$). Зауважимо, що, як і завжди у факторгрупі, eG' – це нейтральний елемент G/G' . Тобто $aG' bG' = bG' aG'$ для будь-яких $aG', bG' \in G/G'$, що й означає абелевість G/G' .

■

Більш того, G' – це найменша за включенням нормальна підгрупа, факторизація за якою абелева (перевірте самостійно або див. [4, с. 75-76]). Зрозуміло також, що $G' = \{e\}$ тоді й тільки тоді, коли G абелева, і у цьому випадку абеліанізація G збігається з нею самою (точніше, канонічно ізоморфна). Крім того, якщо групи ізоморфні, то їхні комутанти та абеліанізації також ізоморфні (перевірте це).

Нехай $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. З узагальнення твердження А.3 на випадок, коли підгрупа може бути породжена нескінченним числом співвідношень (переконайтеся у тому, що таке узагальнення теж вірне) випливає, що

$$G/G' \simeq \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1}, W_1, W_2 \in G \rangle.$$

Серед комутаторів $W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1}$ є комутатори твірних $a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}$ для $i, j = \overline{1, n}$. Більш того, решта співвідношень-комутаторів впливає з них. Дійсно, якщо твірні комутують, то, аналогічно до прикладу А.17, ми можемо довільним чином переставляти літери у будь-якому слові, зокрема, міняти підслова місцями, тоді $W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1} = W_1 W_1^{-1} W_2 W_2^{-1} = e$ для будь-яких W_1 і W_2 з G . Тому ці зайві співвідношення можна прибрати, і таким чином отримуємо наступне:

Наслідок А.2. *Якщо $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, то*

$$G/G' \simeq \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, n} \rangle.$$

Цю ізоморфність можна перевірити й безпосередньо, показавши, що відображення

$$G/G' \rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, i, j = \overline{1, n} \rangle: W G' \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп (зробіть це). Зокрема, як згадано у прикладі А.17 та більш детально показано у доведенні наслідку 13.4, абеліанізація перетворює вільну групу з n твірними на вільну абелеву групу з n твірними, що ізоморфна \mathbb{Z}^n .

Література

- [1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.
- [2] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. М.: Наука, 1995.
- [3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.
- [4] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005.
- [5] С.М. Львовский. Лекции по комплексному анализу. М.: МЦНМО, 2009.
- [6] М.А. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.
- [7] R.H. Crowell, R.H. Fox. Introduction to Knot Theory. Springer, 2011. Переклад: Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
- [8] E.D. Demaine, M.L. Demaine, Y.N. Minsky, J.S.B. Mitchell, R.L. Rivest, M. Pătraşcu. Picture-Hanging Puzzles. Preprint, arXiv:1203.3602, April 26 2014.
- [9] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.
- [10] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. Переклад: А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.
- [11] С. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.
- [12] J.M. Lee. Introduction to Topological Manifolds. Second Edition. Springer, 2011.
- [13] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2020.
- [14] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.