

Література (продовження)

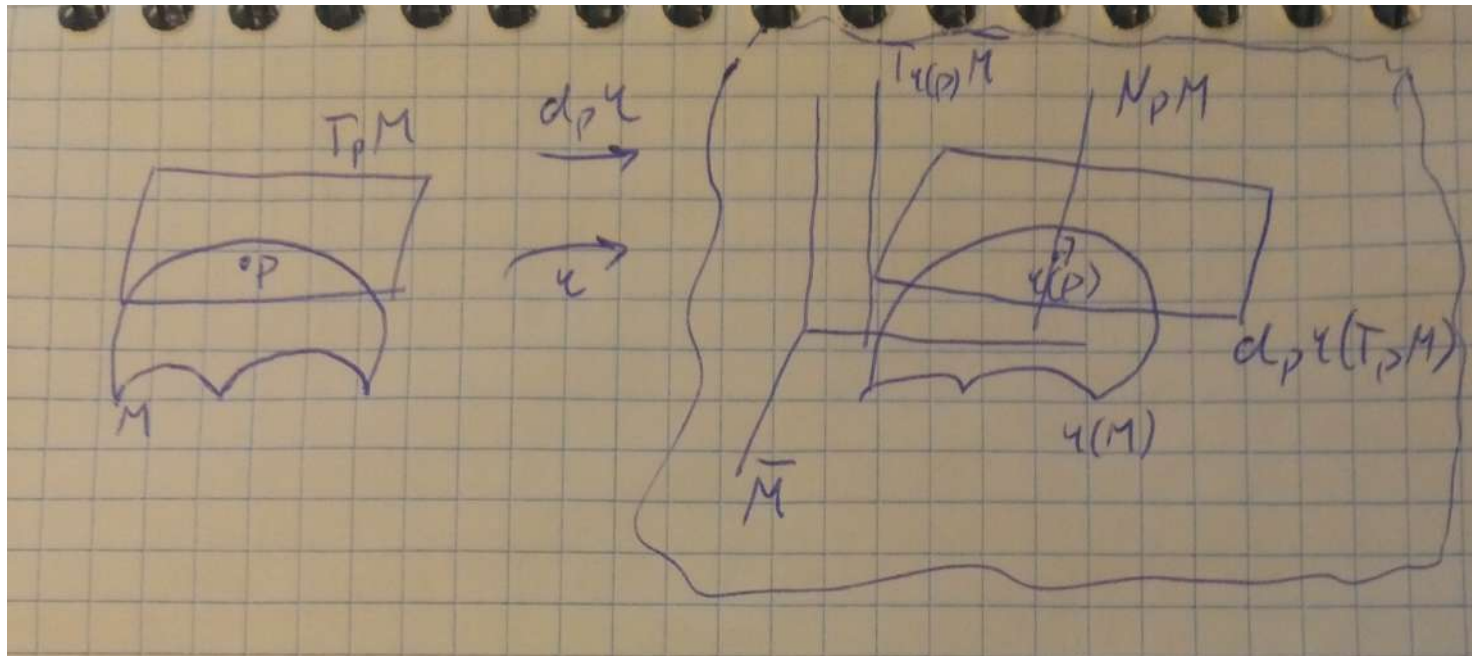
1. А.А. Борисенко. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий.
2. Ю.А. Аминов. Геометрия подмногообразий.
3. В.-Ү. Chen. Geometry of submanifolds and its applications.
4. M. Dajczer. Submanifolds and isometric immersions.
5. M. Dajczer, R. Tojeiro. Submanifold theory.

Підмноговиди ріманового многовида і перша фундаментальна форма

Тут і далі зазвичай будемо розглядати k -гладкий рімановий многовид (\bar{M}, \bar{g}) , $k \geq 1$ (де \bar{g} – $(k-1)$ -гладка ріманова метрика), $\dim \bar{M} = n + q$, де $q \in \mathbb{Z}_+$. Нехай (M, r) – k -гладкий n -вимірний підмноговид у \bar{M} , тобто $r: M \rightarrow \bar{M}$ – k -гладке занурення. Тоді для кожної $p \in M$ $d_p r$ – лінійна ін'єкція, а отже $d_p r: T_p M \rightarrow d_p r(T_p M)$ – лінійний ізоморфізм.

def. Нормальним простором (до) (M, r) (або просто до M) у точці $p \in M$ називається ортогональне доповнення до $d_p r(T_p M)$ в $T_{r(p)} \bar{M}$ (відносно $\bar{g}_{r(p)}$):

$$N_p M := d_p r(T_p M)^\perp.$$



Rem. Тобто у кожній $p \in M$ маємо ортогональне розкладення

$$T_{r(p)} \bar{M} = d_{pr}(T_p M) \bigoplus_{\bar{g}_{r(p)}}^{\perp} N_p M.$$

Rem. У спрощених позначеннях (якщо ототожнити p з $r(p)$, а $T_p M$ – з $d_p r(T_p M)$) воно має вигляд $T_p \overline{M} = T_p M \oplus N_p M$.

Rem. Для $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+q}$ можна ототожнити $T_{r(p)} \overline{M}$ з \mathbb{R}^{n+q} , тоді $N_p M \subset \mathbb{R}^{n+q}$.

Rem. $\dim N_p M = q$ зветься ковимірністю підмноговида M у \overline{M} : $q = \dim \overline{M} - \dim M$. Якщо $q = 1$, (M, r) (або просто M) називається гіперповерхнею у \overline{M} .

Впр. Аналогічно до TM (або $T\overline{M}$) побудувати структури $(k - 1)$ -гладких многовидів на

$$T_M \overline{M} := \bigcup_{p \in M} T_{r(p)} \overline{M} \subset T\overline{M}$$

та

$$NM := \bigcup_{p \in M} N_p M \subset T_M \bar{M}.$$

Rem. Їхні вимірності дорівнюють $2n + q$ та $n + q$ відповідно.

def. NM зветься нормальним розшаруванням підмноговида (M, r) у (\bar{M}, \bar{g}) .

def. Векторним полем на M зі значеннями в $T\bar{M}$ будемо називати

$$\eta: M \rightarrow T\bar{M}: p \mapsto \eta_p \in T_{r(p)}\bar{M}$$

Ex. Для векторного поля X на M визначимо поле $dr(X)$ наступним чином:

$$dr(X)_p := d_p r(X_p) \in d_p r(T_p M) \subset T_{r(p)} \overline{M}$$

для кожної $p \in M$. Це буде поле на M зі значеннями в $T\overline{M}$, а точніше – зі значеннями у $dr(TM) \subset T_M \overline{M}$.

def. Нормальним векторним полем на M називається

$$\xi: M \rightarrow NM: p \mapsto \xi_p \in N_p M,$$

що теж є, зокрема, полем на M зі значеннями в $T\overline{M}$.

Впр. Сформулювати локальні критерії гладкості для таких полів аналогічно до векторних полів та форм.

Rem. Далі всі поля і форми вважаємо максимальної можливої гладкості $k - 1$, якщо не вказано інше.

def. Нехай (M, r) – k -гладкий підмноговид у рімановому (\bar{M}, \bar{g}) . Першою фундаментальною (квадратичною) формою (M, r) зветься 2-форма g на M , що визначається наступним чином:

$$g(X, Y) := \bar{g}(dr(X), dr(Y))$$

для будь-яких полів $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$.

Rem. В означенні записана рівність функцій на M . Вона означає, що для кожної точки $p \in M$

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = \bar{g}_{r(p)}(d_p r(X_p), d_p r(Y_p)).$$

Звідси випливає, що для будь-яких $v, w \in T_p M$

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(w)).$$

Rem. Локально: нехай $\{\bar{g}_{ab}\}_{a,b=1}^{n+q}$ – коефіцієнти \bar{g} у локальних координатах (x^1, \dots, x^{n+q}) на $V \subset \bar{M}$, а (u^1, \dots, u^n) – локальні координати на $U \subset M$. У точках $p \in U \cap r^{-1}(V) \neq \emptyset$ для $i, j = \overline{1, n}$ маємо:

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \bar{g}_{r(p)}\left(d_p r\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), d_p r\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right) = \\ &= \bar{g}_{r(p)}\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial x^b}{\partial u^j}(p) \frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \bar{g}_{ab}(r(p)) \frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p) \frac{\partial x^b}{\partial u^j}(p), \end{aligned}$$

де $\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p)$ – частинні похідні координатного задання r у відповідних локальних координатах. Тут за

індексами a і b сума від 1 до $n+q$. Далі будемо позначати (як ми вже робили для підмноговидів у \mathbb{R}^{n+q}) для $i = \overline{1, n}$

$$r_i := dr \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Це поля, що задані на координатному околі, і значення яких утворюють базиси $d_p r(T_p M)$ у кожній його точці $p \in M$.

Ех. Для $(\overline{M}, \overline{g}) = E^{n+q}$, тобто \mathbb{R}^{n+q} з евклідовою метрикою в декартових координатах:

$$\overline{g}_{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b. \end{cases}$$

Тому

$$g_{ij} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j} = \sum_{a=1}^{n+q} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^a}{\partial u^j} = \langle r_i, r_j \rangle$$

для $i, j = \overline{1, n}$.

Pr. g – ріманова метрика на M .

► За лінійністю dr і білінійністю \bar{g} у кожній точці, g – 2-форма, з вигляду локальних коефіцієнтів вище, вона $(k-1)$ -гладка. Симетричність впливає з симетричності \bar{g} :

$$g(Y, X) = \bar{g}(dr(Y), dr(X)) = \bar{g}(dr(X), dr(Y)) = g(X, Y).$$

Додатна визначеність: у будь-якій $p \in M$

$$g_p(v, v) = \bar{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(v)) > 0$$

для будь-якого $0 \neq v \in T_p M$, оскільки $d_p r$ – лінійна ін'єкція, отже $d_p r(v) \neq 0$, і \bar{g} додатно визначена. ◀

Cor. На будь-якому k -гладкому многовиді M існує $(k - 1)$ -гладка ріманова метрика.

► З теореми про вкладення, існує k -гладке вкладення $r: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ для деякого натурального N . Введемо на \mathbb{R}^N евклідову метрику і розглянемо першу фундаментальну форму g на M . ◀

Rem. g ще називають метрикою, що індукована на M метрикою \bar{g} (і зануренням r). Відображення ріманових многовидів $r: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ в цьому випадку (тобто коли g – перша ф.ф.) називається ізометричним зануренням (або вкладенням).

Впр. Занурення r є ізометричним тоді й тільки тоді, коли воно переводить кусково гладкі шляхи (M, g) у шляхи $(\overline{M}, \overline{g})$ тієї ж довжини: $l_g(\gamma) = l_{\overline{g}}(r \circ \gamma)$.

Аналогічно до теорем про вкладення існують (суттєво складніші) теореми про існування ізометричних вкладень:

Th.1. (Дж. Неш) Для будь-якого k -гладкого ріманового (M, g) , де $k \geq 3$, існує k -гладке ізометричне вкладення $r: (M, g) \rightarrow E^N$ для деякого N .

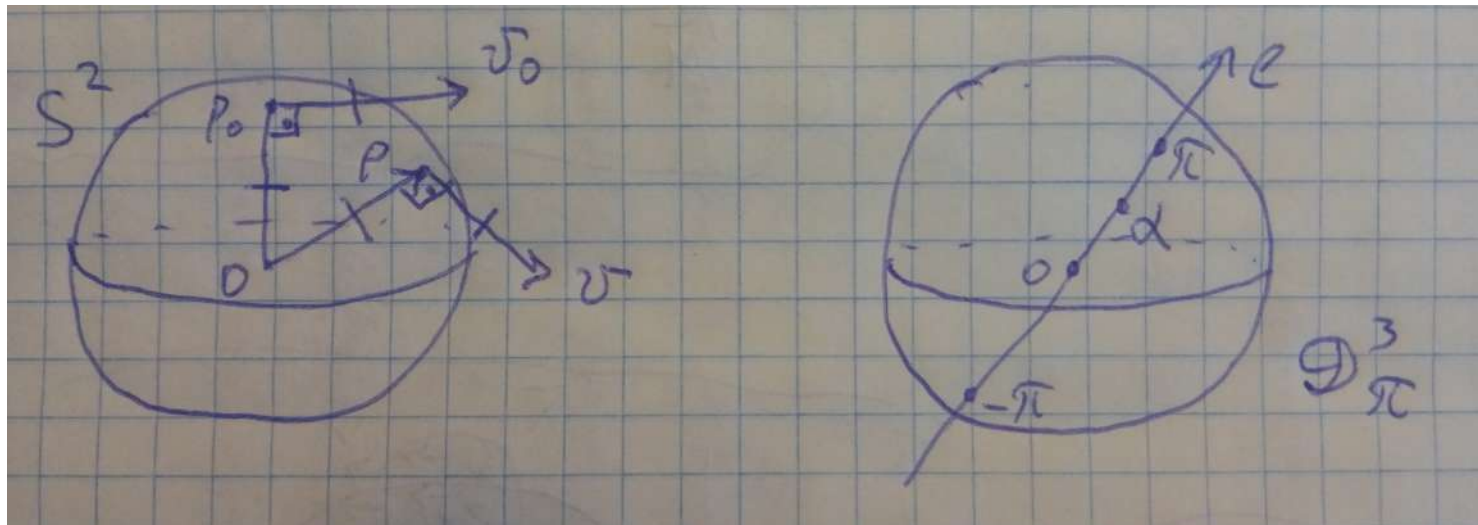
2. (Дж. Неш – К. Кейпер) Для будь-якого ∞ -гладкого n -вимірного ріманового (M, g) і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує 1-гладке ізометричне вкладення $r: (M, g) \rightarrow B_\varepsilon(0) \subset E^{2n}$ (тобто у $2n$ -вимірну відкриту евклідову кулю радіуса ε).

Розшарування одиничних векторів і теорема Уїтні

def. Розшаруванням одиничних векторів ріманового многовида (M, g) називають

$$T_1M := \{(p, v) \in TM \mid g_p(v, v) = 1\}.$$

Ex. Для S^2 (зі стандартною метрикою, індукованою вкладенням $S^2 \rightarrow E^3$) T_1S^2 можна ототожнити з $SO(3)$ – групою ортогональних 3×3 -матриць з визначником 1. Дійсно, для кожного (p, v) існує рівно один рух, що зберігає орієнтацію тривимірного простору і переводить фіксовану пару векторів (p_0, v_0) у дану (p, v) . Тоді елемент $SO(3)$, що відповідає (p, v) , – матриця цього руху.



Впр. Показати, що $SO(3)$ є тривимірним ∞ -гладким вкладеним підмноговидом у дев'ятивимірному просторі усіх квадратних матриць порядку 3 з дійсними коефіцієнтами, використавши теорему про прообраз регулярного значення. Для цього потрібно представити групу $O(3)$ усіх ортогональних матриць як прообраз регулярного значення деякого гладкого від-

ображення у \mathbb{R}^6 , що визначене умовою ортогональності матриці, та довести, що $SO(3)$ є відкритою підмножиною $O(3)$ (однією з двох її зв'язних компонент).

Також $SO(3)$ можна ототожнити з тривимірним проєктивним простором $\mathbb{R}P^3$, наприклад, наступним чином. За теоремою Шаля, будь-яка матриця з $SO(3)$ задає обертання навколо (орієнтованої) осі l на кут $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Відмітимо на l точку з координатою α (див. рис. вище). Отримаємо точки замкненої кулі D_π^3 радіуса π з центром у початку координат, причому цей центр буде відповідати тотожному руху (одичній матриці), а діаметрально протилежні точки на границі кулі відповідають одному й тому ж руху

і таким чином склеюються. Отже отримуємо ото-
тожнення $SO(3)$ з факторпростором $D_{\pi}^3/\sim \cong \mathbb{R}P^3$,
де \sim – відношення еквівалентності, що ототожнює
діаметрально протилежні точки на границі кулі.

Отже, $T_1S^2 \cong \mathbb{R}P^3$. Можна показати, що це дифе-
оморфізм для ∞ -гладкої структури на T_1S^2 , яку ми
зараз опишемо.

Rem. Для будь-якої $p \in M$ підмножина $S_p := \{v \in$
 $T_pM \mid g_p(v, v) = 1\}$ є $(n - 1)$ -вимірним еліпсоїдом
у T_pM , а отже дифеоморфна сфері $S^{n-1} \subset E^n$ (де
 $n = \dim M$). Щоб це показати можна, наприклад,
ввести локальні координати (x^1, \dots, x^n) , обчислити

власні значення $(\lambda_1)_p, \dots, (\lambda_n)_p$ матриці g_p і побудувати стиснення з коефіцієнтами $\frac{1}{(\lambda_1)_p}, \dots, \frac{1}{(\lambda_n)_p}$ відносно головних осей (тобто власних напрямків, що відповідають цим значенням). Нехай $\psi_p: S_p \rightarrow S^{n-1}$ – цей дифеоморфізм.

Впр. Записати ψ_p у локальних координатах явно і переконатися, що воно гладко залежить від p .

Згадаємо стандартний атлас S^{n-1} : він має вигляд $\{(S_N^{n-1}, \chi_N), (S_S^{n-1}, \chi_S)\}$, де точки $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = (0, \dots, 0, -1)$ – полюси сфери, носії карт $S_{N(S)}^{n-1} := S^{n-1} \setminus \{N\}(\{S\})$, а $\chi_{N(S)}: S_{N(S)}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ – стереографічні проєкції.

Нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – атлас M ; $\pi: T_1M \rightarrow M$ – як вище: $(p, v) \mapsto p$ (канонічна проєкція). Тоді

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p \in U_\alpha} S_p.$$

Покладемо для кожного індекса α

$$V_{\alpha N} := \bigcup_{p \in U_\alpha} \psi_{\alpha p}^{-1}(S_N^{n-1}),$$

$$V_{\alpha S} := \bigcup_{p \in U_\alpha} \psi_{\alpha p}^{-1}(S_S^{n-1}),$$

де $\psi_{\alpha p}: S_p \rightarrow S^{n-1}$ – дифеоморфізм, що побудований, як описано вище, з використанням локальних координат карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Таким чином, $\pi^{-1}(U_\alpha) = V_{\alpha N} \cup V_{\alpha S}$.

Як і у випадку TM , побудуємо "кандидатів" у координатні відображення: для кожного α

$$\Omega_{\alpha N}: V_{\alpha N} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}: (p, v) \mapsto (\varphi_{\alpha}(p), \chi_N(\psi_{\alpha p}(v))).$$

Зауважимо, що $\varphi_{\alpha}(p) \in \mathbb{R}^n$, а $\chi_N(\psi_{\alpha p}(v)) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Аналогічно будуємо $\Omega_{\alpha S}: V_{\alpha S} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$.

Впр. Виписати відображення переходу (разом з їхніми областями визначення і значень) та аналогічно до TM переконатися в існуванні $(k-1)$ -гладкої структури $(2n-1)$ -вимірного многовида на T_1M .

Rem. Це приклад не векторного розшарування (з шаром S^{n-1}).

Ех. Аналогічно до дотичного розшарування можна показати, що TU дифеоморфний добутку $U \times S^{n-1}$ для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$.

Нехай тепер (M, r) – підмноговид у \mathbb{R}^N (занурений), g – перша ф.ф., що індукована евклідовою структурою на \mathbb{R}^N . Трошки модифікуємо відображення, яке ми побудували раніше:

$$F: T_1M \rightarrow S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N: (p, v) \mapsto d_p r(v).$$

Зауважимо, що оскільки це ізометричне занурення, довжина вектора v зберігається: $|d_p r(v)| = 1$. Як ми бачили вище, композиція проєкції на ν^\perp і r теж буде зануренням тоді й тільки тоді, коли $\nu \notin F(T_1M)$.

Впр. Перевірити $(k - 1)$ -гладкість F .

Таким чином, з Th. Сарда випливає, що при $k \geq 2$ і $2n - 1 < N - 1$ такий вектор ν існує, і за його допомогою можна побудувати занурення M у \mathbb{R}^{N-1} . Так можна робити (також забезпечуючи до передостаннього кроку вкладеність за іншою конструкцією; об'єднання образів F та відображення G з цієї конструкції – також міри 0 за Th. Сарда), поки не стане $2n - 1 = N - 1$, тобто $N = 2n$. Це завершує доведення (слабкого формулювання) Th. Уїтні. Нагадаємо також, що у "повноцінному" її формулюванні достатньо довільної гладкості $k \geq 1$.

Розкладення Гаусса і Вейнгартена.

Друга фундаментальна форма

Як і раніше, нехай (\bar{M}, \bar{g}) – $(n + q)$ -вимірний рімановий многовид. У цьому розділі його гладкість $k \geq 2$. Нехай (M, r) – k -гладкий n -вимірний підмноговид у \bar{M} , g – його перша ф.ф.

Позначимо через $\bar{\nabla}$ ріманову зв'язність \bar{g} (зв'язність Леві-Чивіті), що однозначно визначена метрикою. Згадаємо її означення. Це відображення

$$\bar{\nabla}: \mathcal{X}^{k-2}(\bar{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\bar{M}) \rightarrow \mathcal{X}^{k-2}(\bar{M}): X, Y \mapsto \bar{\nabla}_X Y$$

таке, що

- $\bar{\nabla}_{fX+hY}Z = f\bar{\nabla}_XZ + h\bar{\nabla}_YZ,$
- $\bar{\nabla}_X(Y + Z) = \bar{\nabla}_XY + \bar{\nabla}_XZ,$
- $\bar{\nabla}_X(fY) = f\bar{\nabla}_XY + X(f)Y,$
- $\bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX = [X, Y],$
- $X(\bar{g}(Y, Z)) = \bar{g}(\bar{\nabla}_XY, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_XZ)$

для будь-яких векторних полів X, Y, Z і функцій f, h на \bar{M} відповідних гладкостей. При цьому $\bar{\nabla}_XY$ називається коваріантною похідною поля Y за X .

Rem. Далі для простоти будемо брати X та Y однакової гладкості $k - 1$. Згадаємо, що перші три умови тут означають, що $\bar{\nabla}$ – це афінна зв'язність, четверта – що це зв'язність без скрута, п'ята – що вона узгоджена з \bar{g} .

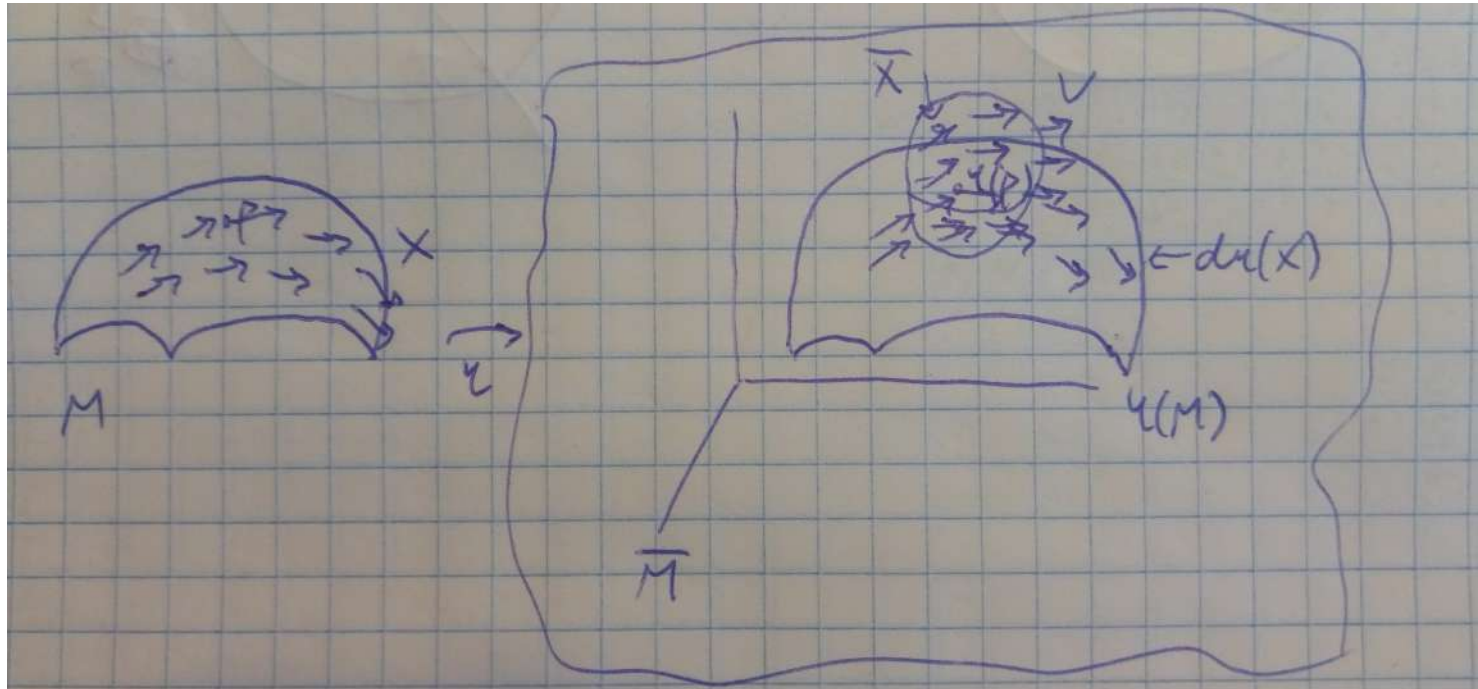
Виникає природне питання: як "перенести" цю структуру на підмноговид M за аналогією з першою ф.ф.?

Для полів $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ розглянемо як у попередньому розділі $dr(X), dr(Y) \in C^{k-1}(M, T_M \bar{M})$ – поля на M зі значеннями у $T\bar{M}$ (або $T_M \bar{M}$). Продовжимо їх полями \bar{X}, \bar{Y} на деякому околі точки $r(p)$ для $p \in M$ і знайдемо $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$:

Лем.1. Для будь-якого поля $X \in \mathcal{X}^l(M)$ на M ($0 \leq l \leq k-1$) і для будь-якої точки $p \in M$ існують відкрита $V \ni r(p)$ у \bar{M} та поле $\bar{X} \in \mathcal{X}^l(V)$ таке, що для всіх $q \in r^{-1}(V)$

$$\bar{X}_{r(q)} = d_q r(X_q)$$

(у цьому випадку будемо говорити, що \bar{X} продовжує $dr(X)$ на V).



2. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $p \in M$, $V \ni r(p)$ – відкрита, \bar{X} та \bar{Y} продовжують $dr(X)$ на V , а \bar{Y} та \bar{Y} продов-

жують $dr(Y)$ на V в сенсі п.1. Тоді

$$\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)_{r(p)} = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\overline{Y}}\right)_{r(p)}.$$

Тобто значення $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ у $r(p)$ не залежить від вибору продовжень, а лише від самих X та Y (і, звичайно, від структури $(\overline{M}, \overline{g})$ і занурення).

► В силу Th. про ранг відображення, можемо вважати, що в околах p та $r(p)$ обрані локальні системи координат (u^1, \dots, u^n) та (x^1, \dots, x^{n+q}) відповідно такі, що r локально має вигляд $(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0)$.

1. В якості V виберемо носій другої з цих систем (або будь-який відкритий окіл $r(p)$ в ньому). Нехай

$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Тоді $dr(X) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (тут суми від 1 до n).
Покладемо:

$$\bar{X}^a(x^1, \dots, x^{n+q}) := \begin{cases} X^a(x^1, \dots, x^n), & a = \overline{1, n}, \\ 0, & a = \overline{n+1, n+q}. \end{cases}$$

Тоді в точках $r(M)$ (тобто з координатами вигляду $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$) $\bar{X} := \bar{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ збігається з $dr(X)$ за побудовою.

2. Локальні координати обираємо як вище. Нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\bar{X} = \bar{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ й $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (на перетині V та відповідного координатного околу). Аналогічно, нехай $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\bar{Y} = \bar{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ й $\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тут всюди i сумується від 1 до n , а a – від 1 до $n+q$ (і аналогічні умови будемо використовувати для інших індексів).

Умова продовження: $\bar{X} = \overline{\bar{X}} = dr(X)$ у точках $r(M)$.
 Локально це означає, що для будь-яких (u^1, \dots, u^n)

$$\begin{aligned} \bar{X}^a(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) &= \overline{\bar{X}}^a(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) = \\ &= \begin{cases} X^a(u^1, \dots, u^n), a = \overline{1}, \overline{n}, \\ 0, a = \overline{n+1}, \overline{n+q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно для Y, \bar{Y} та $\overline{\bar{Y}}$. Згадаємо формулу для коваріантної похідної у локальних координатах:

$$\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} = \bar{X}^a \left(\frac{\partial \bar{Y}^c}{\partial x^a} + \bar{\Gamma}_{ab}^c \bar{Y}^b \right) \frac{\partial}{\partial x^c},$$

тут сума за a, b, c від 1 до $n+q$, $\{\bar{\Gamma}_{ab}^c\}_{a,b,c=1}^{n+q}$ – символи

Крістоффеля, що визначаються умовами $\bar{\Gamma}_{ab}^c \frac{\partial}{\partial x^c} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^b}$. c -та координата цього розкладення у довіль-

ній точці $r(M)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^c (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) = \\
 & = \bar{X}^a (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) \left(\frac{\partial \bar{Y}^c}{\partial x^a} (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) + \right. \\
 & \quad \left. + \bar{\Gamma}_{ab}^c (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) \bar{Y}^b (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) \right) = \\
 & = X^i (u^1, \dots, u^n) \left(\frac{\partial \bar{Y}^c}{\partial x^i} (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) + \right. \\
 & \quad \left. + \bar{\Gamma}_{ij}^c (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) Y^j (u^1, \dots, u^n) \right).
 \end{aligned}$$

Тут ми використали умови продовження, заміни індексів означають відповідні заміни меж додавання. Зауважимо, що для $i = \overline{1, n}$ з умов продовження

і означення частинної похідної впливає

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{Y}^c}{\partial x^i}(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) = \\
 & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}^c(u^1, \dots, u^i + \delta, \dots, u^n, 0, \dots, 0) - \bar{Y}^c(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0)}{\delta} = \\
 & = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Y^c(u^1, \dots, u^i + \delta, \dots, u^n) - Y^c(u^1, \dots, u^n)}{\delta}, & c = \overline{1, n}, \\ 0, & c = \overline{n+1, n+q}. \end{cases} = \\
 & = \begin{cases} \frac{\partial Y^c}{\partial u^i}(u^1, \dots, u^n), & c = \overline{1, n}, \\ 0, & c = \overline{n+1, n+q}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)_{(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0)} = X^i(u^1, \dots, u^n) \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}(u^1, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial x^j} +$$

$$X^i(u^1, \dots, u^n) Y^j(u^1, \dots, u^n) \bar{\Gamma}_{ij}^c(u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x^c}$$

не залежить від координат \bar{X} та \bar{Y} , тобто для \bar{X} та \bar{Y} має такий же вигляд. ◀

def. Коваріантною похідною Y за X в \bar{M} (відносно $\bar{\nabla}$) будемо називати поле

$$\bar{\nabla}_X Y : p \in M \mapsto (\bar{\nabla}_X Y)_p := \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)_{r(p)} \in T_{r(p)} \bar{M},$$

де \bar{X}, \bar{Y} – деякі продовження $dr(X), dr(Y)$ відповідно на окіл $r(p)$.

Rem. За побудовою це поле на M зі значеннями в $T\bar{M}$. З Lem. випливає коректність цього означення, а з її доведення – що це поле $(k - 2)$ -гладке для $(k - 1)$ -гладких X та Y .

Rem. Ми ніде не використовували зв'язок $\bar{\nabla}$ з метрикою (або відсутність скрута). Ця конструкція працює для будь-якої афінної зв'язності $\bar{\nabla}$.

Rem. Згадаємо, що у кожній $p \in M$ маємо ортогональне розкладення

$$T_{r(p)}\bar{M} = d_{pr}(T_pM) \oplus^{\perp} N_pM.$$

Будемо позначати через $(\cdot)^T$ та $(\cdot)^{\perp}$ ортогональні проєкції на відповідні (дотичний і нормальний) компоненти цього розкладення.

def. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$. Позначимо для $p \in M$

$$(\nabla_X Y)_p := (d_{pr})^{-1}(((\bar{\nabla}_X Y)_p)^T) \in T_pM,$$

$$B(X, Y)_p := ((\bar{\nabla}_X Y)_p)^\perp \in N_p M.$$

Тоді відображення $\nabla: X, Y \mapsto \nabla_X Y$ називається індукованою зв'язністю підмноговида (M, r) , а $B: X, Y \mapsto B(X, Y)$ – другою фундаментальною (квадратичною) формою (M, r) .

Rem. Тут використали ін'єктивність $d_p r$ у кожній p . За побудовою, $\nabla_X Y$ – поле на M , а $B(X, Y)$ – нормальне поле, $(k-2)$ -гладкі для $(k-1)$ -гладких X і Y .

Впр. Перевірити це, тобто переконатися, що ортогональні проєкції не знижують гладкість.

Cor. (Розкладення Гаусса) Для будь-якої $p \in M$

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = d_p r((\nabla_X Y)_p) + B(X, Y)_p$$

– ортогональне розкладення на елементи з $d_p r(T_p M)$ і $N_p M$ відповідно.

Rem. Або простіше, переходячи від запису у точці до рівності полів на M зі значеннями у $T\bar{M}$:

$$\bar{\nabla}_X Y = dr(\nabla_X Y) + B(X, Y).$$

У спрощеному запису (див. вище) це буде $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$.