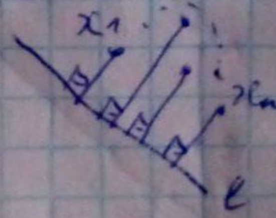
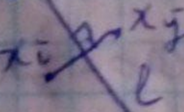
39.14. Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}^2 : x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тоді
$\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n} \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$.

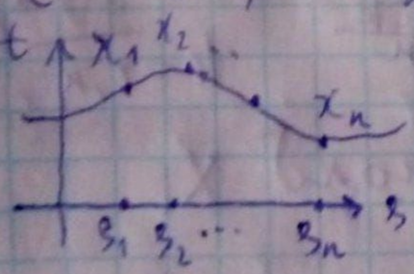
1. (11.23). $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{y_i\}_{i=1}^n$ $\forall$ точок: $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$.

Очевидно, достатньо показати для $y_i = (i, 0)$, $i = \overline{1,n}$.
$\exists$ пряма $\ell \subset \mathbb{R}^2$: усі ортог. проекції на неї $\{x_i\}$ попарно різні. Дійсно, для $\forall$ пари x_i, x_j нас влаштує $\forall$ напрямок прямої крім $\perp [x_i, x_j]$;





зробивши так $\forall$ пари i, j, виключимо лише скінч. кільк. напрямків. Введемо координати (ξ, t), для яких $\ell = O\xi$, тоді у $\{x_i = (\xi_i, t_i)\}_{i=1}^n$ усі ξ_i поп. різні.

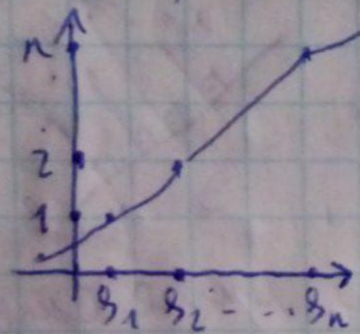


Перенумеруємо їх так, що $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$.
$\Rightarrow \exists \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \varphi(\xi_i) = t_i$, $i = \overline{1,n}$ (наприклад, кусково лінійна).

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (\xi, t) \mapsto (\xi, \varphi(\xi) - t)$ непер. інволюція: $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. Тому $f^{-1} = f \Rightarrow$ це гомеоморфізм. $\forall i$ $f(x^i) = (\xi^i, 0)$.

Отже f індукує гомео-зм $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(s_i,0)\}_{i=1}^n$.

Нарешті, $\exists$ строго монотонна $\psi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \psi(s_i) = i, \ i=\overline{1,n}$



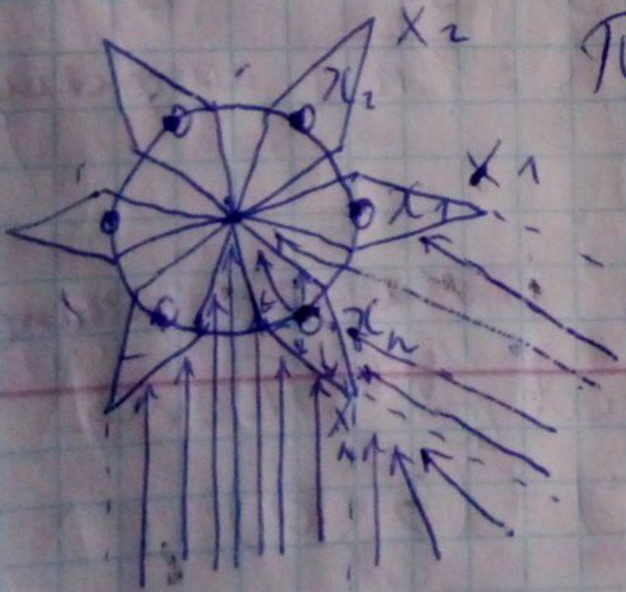
(наприклад, теж кусн. лінійна). Тоді:

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto (\psi(s), t)$ - непер., бієк,

$g^{-1} : (s,t) \mapsto (\psi^{-1}(s), t)$ - непер. $\Rightarrow$ g - гомео-зм,

що індукує гомео-зм $\mathbb{R}^2 \setminus \{(s_i,0)\}_{i=1}^n \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(i,0)\}_{i=1}^n$.

2. З 1, можемо без обмеження загальності вважати, що $x_i \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \ \forall i$. Скажімо, $x_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k=\overline{1,n}$.



Побудуємо навколо кожної x_i ромб X_i.

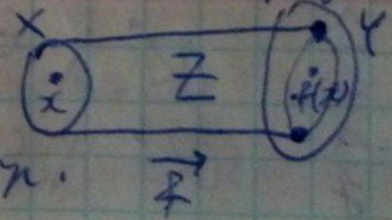
Тоді $\exists$ деформаційна ретракція

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \to \bigcup_{i=1}^n X_i \cong \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n}$$

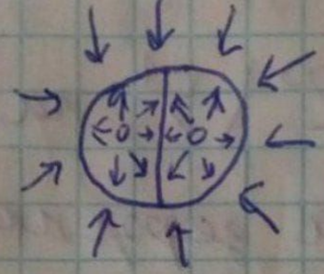
(у кожному ромбі будується за допомогою $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ і гомео-зма ромба і кола), за їх лемами - як на малюнку). За побудовою, лінійна гомотопія $(x,s) \mapsto (1-s)f(x) + sx$ демонструє, що $f \sim id_X$, тобто є деформ. ретракцією.

39.14. $X \sim Y \Rightarrow \exists$ ТП Z і деф. ретракти $\hat{X} \cong X$, $\hat{Y} \cong Y$ у ньому.

Ідея: нехай $f: X \to Y$ задає гом. екв-сть (тобто $\exists\, g: Y \to X$: $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$). Z - циліндр відображення f: $Z := X \times I \sqcup Y / \sim$, де $(x,1) \sim f(x)$ $\forall x \in X$. Тоді $\hat{X} := p(X \times \{0\})$, $\hat{Y} := p(Y)$, де p - канон. пр.



39.7(г) $S^1 \vee S^1$ і $S^1 \cup [x,y]$ (де $x,y \in S^1$, $x \neq y$) – деф. ретракти $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\}$:

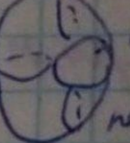


Гомотопії між цими ретракціями і id – лінійні ($F(x,s) = (1-s)f(x) + sx$).

39.9 Нехай $x, y \in S^2$, $x \neq y$. Тоді $S^2/\{x,y\} \sim S^2 \vee S^1$.

Використавши гомео-зм, можемо вважати, що $y = -x = (0,0,1)$.

Тоді $S^2/\{x,y\}$ гомеоморфна підмножині $\mathbb{R}^3$ (точніше $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$,

де $S^1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = \frac{1}{2}, z = 0\}$). (або  , але так несиметрично)

Ототожнимо їх.

Нехай $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \to S^1 \vee S^1$ і $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \to S^1 \cup [x,y]$ – ретракції з попереднього розв'язку. Будемо їх "обертати":

$$\hat{f}: \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \to S^2 / \{x, y\} : (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \mapsto (f^1(\rho, z)\cos\varphi, f^1(\rho, z)\sin\varphi, f^2(\rho, z)),$$

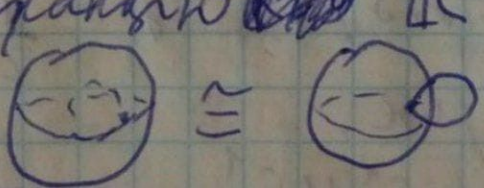
$$\hat{g}: \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \to S^2 \cup [x, y] : (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \mapsto (g^1(\rho, z)\cos\varphi, g^1(\rho, z)\sin\varphi, g^2(\rho, z)).$$

Отримаємо тепер ретракції $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ на $S^2/\{x,y\}$ і на $S^2 \cup [x,y]$:

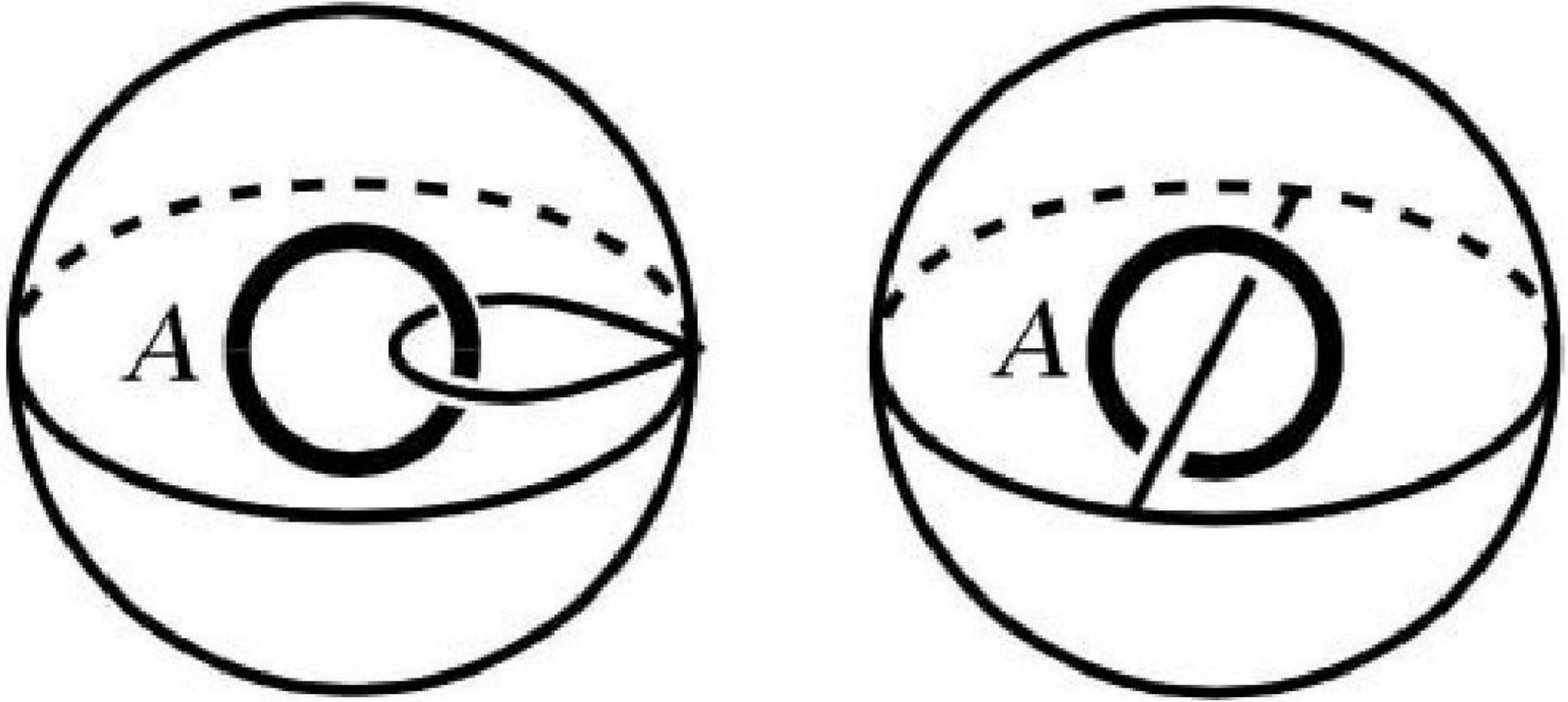
Вони деформаційні (лінійна гомотопія працює і тут).

Деформуємо $S^2 \cup [x,y]$, наближаючи точки одна до іншої, разом з тим деформуємо $\hat{g}$ і гомотопію:

Отримаємо деф. ретракцію $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ на підмножину, гомеоморфну $S^2 \vee S^1$:



Отже, $S^2/\{x,y\} \sim \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \cup [x,y] \sim S^2 \vee S^1$.


A
A

39.21 Знайти фундаментальні групи:

2. $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$

За 39.13(2), $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \sim S^{n-m-1}$ ← при $n \geq m+1$. Тому:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, x) \cong \pi_1(S^{n-m-1}, \varphi(x)) = \begin{cases} \{[e_{\varphi(x)}]\}, & n = m+1 \\ \simeq \mathbb{Z}, & n = m+2 \\ \{[e_{\varphi(x)}]\}, & n \geq m+3 \end{cases}$$

(тут φ - деформаційна ретр.)

39.24. <u>3.</u> $S^3 \setminus S^1$

За <u>39.13 (3)</u>, $S^3 \setminus S^1 \overset{\circ}{\sim} S^1$, тому $\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, \varphi(x)) \simeq$

$\simeq \mathbb{Z}$ (де φ - відп. деф. ретракція).

9. Лист Мебіуса.

За 39.5, $X \sim S^1$ тому $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}$.

31.1. Якщо X хаусдорфовий і $f, g, h \in C(I, X)$ - шляхи, то
$(f * g) * h = f * (g * h) \Leftrightarrow f = g = h = e_x$ (було в додаткових)

31.1. Якщо $X - T_1$, $f, g, h \in C(I, X)$ - шляхи, то $(f * g) * h = f * (g * h) \Leftrightarrow f = g = h = e_x$.

$\Leftarrow$. Оч.

$\Rightarrow$. Отже,

$$\begin{cases} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

$\forall t \in [0, \frac{1}{4}]$ $f(4t) = f(2t)$, тобто $\forall t \in [0, 1]$ $f(t) = f(\frac{t}{2}) \ominus$

Продовжимо: $\ominus f(\frac{t}{4}) = f(\frac{t}{8}) = \ldots$ Посл. $\frac{t}{2^{n-1}} \to 0$ і переходить під дією непер. f у постійну $f(\frac{t}{2^{n-1}})$, тоді її границею повинна бути $x := f(0)$. Але у T_1-пр. єдина границя $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ - це x, тому $f(t) = x$ $\forall t$. $\forall t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $g(4t-1) = f(2t) = x$, тобто $g(t) = x$ $\forall t$. Нарешті, $\forall t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ $h(2t-1) = g(4t-2) = x$ і $\forall t \in [\frac{3}{4}, 1]$ $h(2t-1) = h(4t-3)$, звідки отримуємо $h = x$ ан-но до 31.4.

31.4. Якщо $X - T_1$ і $f \in C(I, X)$ - шлях, то
$e_x * f = f \iff f = e_x$. (і ан-но для $f * e_y = f$).
$\Leftarrow$ оч., $\Rightarrow$:
$$e_x * f(t) = \begin{cases} x, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
$\shortparallel$
$f(t) \ \forall t$

Тобто $f(t) = x$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$. При $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ $2t-1 \in [0, \frac{1}{2}]$,
тому $f(t) = f(2t-1) = x$, etc., отримуємо, що $f(t) = x$
$\forall t \in [0, 1)$.
У T_1-просторі посл. $\{x_n = x\}_{n=1}^{\infty}$ має єдину границю x (бо
$\forall y \neq x \ \exists$ відкр. $U \ni y : U \not\ni x$). Тому $1 - \frac{1}{n} \to 1$, $f(1 - \frac{1}{n}) = x$
$\forall n$ і f непер. $\Rightarrow f(1) = x$. Т.ч., $f = e_x$.
31.5 $f \in C(I, X)$ - шлях: $f * \overline{f} = e_x \iff f = e_x$ (і ан-но $\overline{f} * f = e_y$)

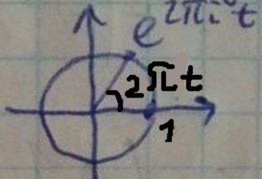
Дійсно, $f * \overline{f}(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = x \Leftrightarrow f(t) = x \ \forall t.$

Т.ч., в усіх гомотопічних властивостях $\underbrace{\text{шляхів}}_{}$ добутку

"гомотопічність" суттєва.

32. С-Д, 2-4 (Впр. 4.1. лекцій)

X – ТП. Кругова петля в $x \in X$ – це $\hat{f} \in C(S^1, X) : \hat{f}(1) = x$

(де $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$: 

).

Будемо називати дві кругові петлі $\hat{f}$ і $\hat{g}$ гомотопними, $\hat{f} \sim \hat{g}$, якщо вони $\{1\}$-гомотопні: $\overbrace{\exists\, \hat{F}}^{\text{гомотопія}} \in C(S^1 \times I, X) : \hat{F}(\cdot, 0) = \hat{f}$, $\hat{F}(\cdot, 1) = \hat{g}$, $\hat{F}(1, \cdot) = \hat{e}_x$ (тобто постійне $S^1 \to x$).

Розгл. множину гомотопічних класів:

$$\pi_1^c(X, x) := \{ [\hat{f}] \mid \hat{f} \in C(S^1, X),\ \hat{f}(1) = x \}.$$

$\forall$ петлі f у x, тобто $f \in C(I, X) : f(0) = f(1) = x$

f факторизується у неперервне $[0,1]/\{0,1\} \to X$.

$[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$ Ототожнимо їх і отримаємо з f за допоміжного відобр. $[t] \mapsto e^{2\pi i t}$ За побудовою, $\hat{f}(e^{2\pi i t}) = f(t)\ \forall t \in I$

$\hat{f} \in C(S^1, X)$: $\hat{f}(1) = x$ – кругову петлю.

Покажемо, що тоді кор. визначене $\alpha : \pi_1(X,x) \to \pi_1^c(X,x) : [f] \mapsto [\hat{f}]$.

Дійсно, нехай $f \sim g$: гомотопія $\exists F \in C(I \times I, X)$: $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$, $F(0,\cdot) = F(1,\cdot) = e_x$. Воно факторизується за $\sim$: $(0,s) \sim (1,s)$ $\forall s$ у $\hat{F} \in C(S^1 \times I, X)$, де $\hat{F}(e^{2\pi i t}, s) = F(t,s)\ \forall t,s \in I$.

При цьому $\hat{F}(e^{2\pi i t}, 0) = F(t,0) = f(t) = \hat{f}(e^{2\pi i t})$ і $\hat{F}(e^{2\pi i t}, 1) = F(t,1) = g(t) = \hat{g}(e^{2\pi i t})\ \forall t$ і $\hat{F}(1,s) = F(0,s) = x\ \forall s$.

Тому $\hat{F}$ – гомотопія $\hat{f}$ і $\hat{g}$: $\hat{f} \sim \hat{g}$.

І навпаки, нехай $\hat{f}$ – кругова петля в x. Тоді $f : I \to X : t \mapsto \hat{f}(e^{2\pi i t})$ – неперервне як комп. непер., і $f(0) = \hat{f}(1) = x$, тобто f – петля в x. Покажемо, що

$f(1) =$

$[\hat{f}] \mapsto [f]$ кор. визначає відобр. $\pi_1^c(X,x) \to \pi_1(X,x)$, тобто що визначене α^{-1}.

Дійсно, якщо $\hat{f} \sim \hat{g}$ і $\hat{F}$ - відп. гомотопія, то $F: I \times I \to X: (t, s) \mapsto \hat{F}(e^{2\pi i t}, s)$ неперервне, і $F(t,0) = \hat{F}(e^{2\pi i t}, 0) = \hat{f}(e^{2\pi i t}) = f(t)$, $F(t,1) = \hat{F}(e^{2\pi i t}, 1) = \hat{g}(e^{2\pi i t}) = g(t)$ $\forall t$, $\underset{F(1,s)}{F(0,s)} = \hat{F}(1, s) = \hat{f}(1) = x$ $\forall s$. Тому F - гомот. f і g, $f \sim g$.

Т.ч., $\alpha: \pi_1(X,x) \to \pi_1^c(X,x)$ - бієкц.

Перетворимо її на ізоморфізм груп, перенесши множення з $\pi_1(X,x)$ на $\pi_1^c(X,x)$:

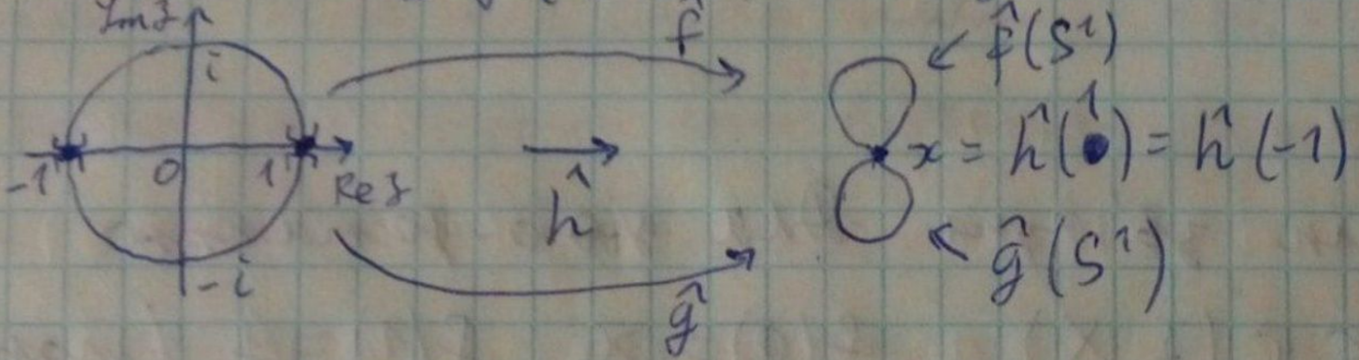
$\forall [\hat{f}], [\hat{g}] \in \pi_1^c(X,x)$ $\quad [\hat{f}][\hat{g}] := \alpha(\alpha^{-1}([\hat{f}]) \cdot \alpha^{-1}([\hat{g}]))$

Тобто (у позначеннях $[f] = \alpha^{-1}([\hat{f}])$, $[g] = \alpha^{-1}([\hat{g}])$ як вище):

$[\hat{f}][\hat{g}] = [\hat{h}]$, де $\hat{h}(e^{2\pi i t}) = f * g(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} =$

$= \begin{cases} \hat{f}(e^{4\pi i t}), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \hat{g}(e^{4\pi i t - 2\pi i}) = \hat{g}(e^{4\pi i t}), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$. Або:

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} \hat{f}(z^2), & \operatorname{Im} z \geq 0; \\ \hat{g}(z^2), & \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$



За побудовою, тоді α – ізоморфізм груп.