Лекція 5. Кривина та скрут регулярних кривих

Розглядаємо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

За необхідності, від довільного параметра t будемо переходити до натурального параметра s на кривій γ :

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|$$

Така заміна параметризації є регулярною і не зменшує клас гладкості.

Основна мета лекції – ввести в розгляд два базових геометричних об'єкти, кривину і скрут, які характеризують форму/розміри кривої в $\mathbb{R}^3$ і не зважають на розташування кривої в просторі.

1. Кривина кривої

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

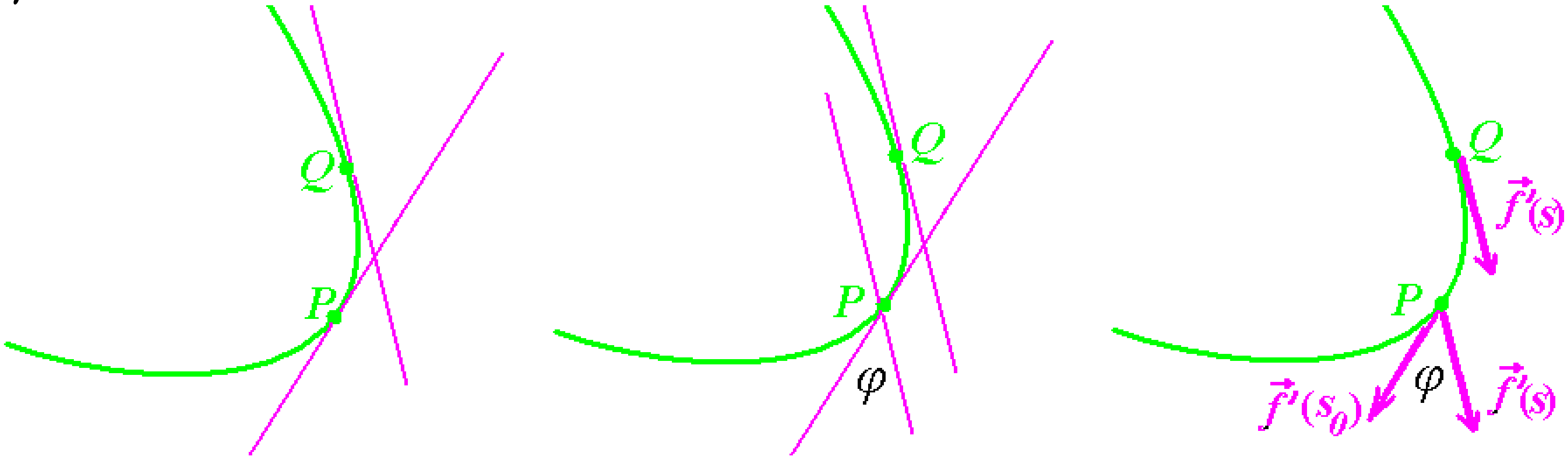
$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s – натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій γ розглянемо кут φ між дотичними прямими кривої γ в точках P і Q.

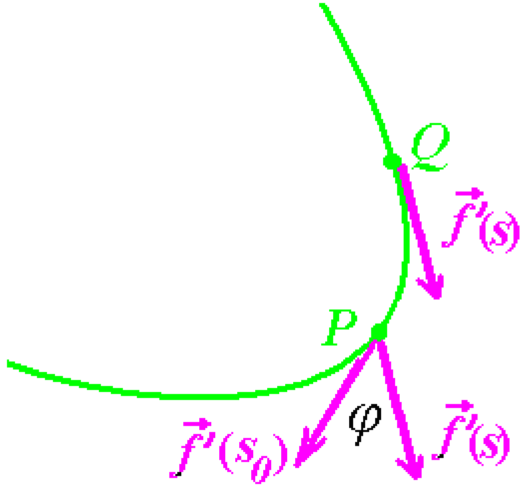
Проаналізуємо поведінку кута φ при $s \to s_0$, коли точка Q збігається по кривій γ до точки P.



Очевидно, що $\lim\limits_{s\to s_0} \varphi = 0$. Розглянемо $\lim\limits_{s\to s_0} \dfrac{\varphi}{|s-s_0|}$

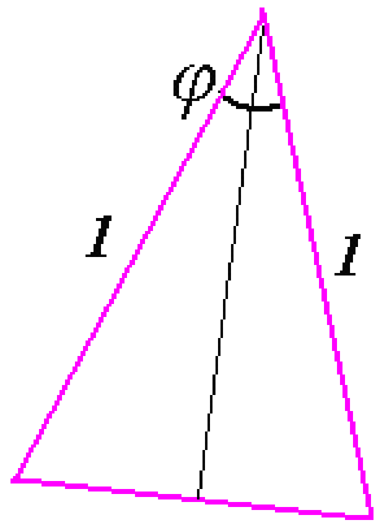
Визначення. Якщо границя $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\varphi}{|s-s_0|}$ існує, то її значення називається *кривиною* кривої γ в точці P і позначається k.

Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^2. Тоді отримаємо:



$$\lim_{s\to s_0}\frac{\varphi}{|s-s_0|}=\lim_{s\to s_0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{|s-s_0|}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{2\frac{|\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)|}{2}}{|s-s_0|}=\lim_{s\to s_0}\frac{|\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)|}{|s-s_0|}=$$



$$=|\lim_{s\to s_0}\frac{\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)}{s-s_0}|=|\vec{f}''(s_0)|$$

Висновок: $k=|\vec{f}''(s_0)|$

Зауваження 1. В кожній точці P на кривій γ виникає своє значення кривини, тобто, маємо функцію $k=k(s)$. При цьому, якщо $\vec{f}(s) \in C^m$, то $k(s) \in C^{m-2}$.

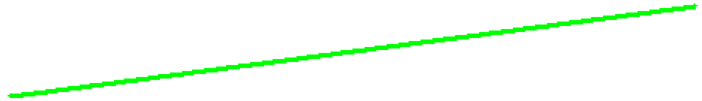
Зауваження 2. Кривина k характеризує швидкість, з якою змінюється напрямок дотичної прямої кривої, коли точка рухається по кривій з одиничною швидкістю.

Зауваження 3. Кривина k не залежить від розташування кривої γ в просторі. Інакше кажучи, якщо до кривої γ застосувати паралельний перенос, обертання або симетрію в $\mathbb{R}^n$, то кривина k не зміниться.

(Доведіть самостійно, використовуючи що рух в просторі $\mathbb{R}^n$ представляється у вигляді $\vec{x} \to W \cdot \vec{f}(s) + \vec{c}, \quad W \in O(n)$)

Приклад 1. Нехай γ – довільна *пряма* в $\mathbb{R}^n$. Її кривина $k \equiv 0$.

Пояснення. Коли точка рухається по прямій, то її дотична пряма не змінює свого напрямку,.



Доведення. Пряма задається лінійною вектор-функцією

$$\vec{f}(s) = \vec{e}s + \vec{q},$$

де $\vec{e}$ – одиничний напрямний вектор прямої, $\vec{q}$ – початкова точка на прямій.

Маємо

$$\vec{f}\,' = \vec{e}, \; |\,\vec{f}\,'| = |\,\vec{e}\,| \equiv 1,$$

тобто, s є натуральним параметром на прямій.

Також маємо $\vec{f}\,'' = \vec{0}$, тобто,

$$k = |\,\vec{f}\,''| \equiv 0.$$

Має місце і обернене

Твердження. *Якщо регулярна класу C^2 крива γ в $\mathbb{R}^n$ має нульову кривину,*

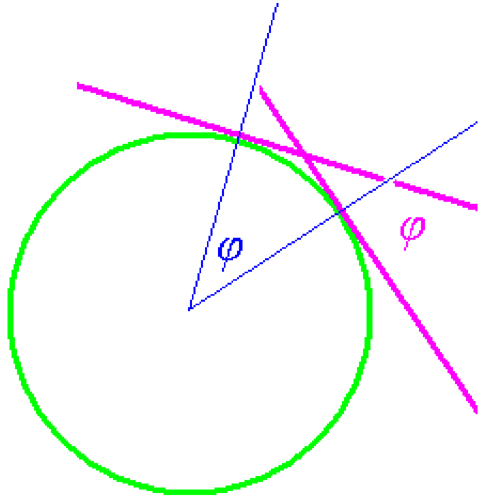
$$k \equiv 0,$$

то ця крива γ є відрізком прямої.

Доведіть самостійно.

Приклад 2. Нехай γ – довільне коло радіуса r в $I\!R^2$. Кривина кола $k \equiv \dfrac{1}{r}$.

Пояснення. Коли точка рухається по колу, дотична пряма кола змінює свій напрямок з однаковою швидкістю в усіх точках.



Доведення. Коло задається в площині $I\!R^2$ радіус-вектором

$$\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos\dfrac{s}{r} \\ c^2 + r\sin\dfrac{s}{r} \end{pmatrix},$$

де (c^1, c^2) – координати центра кола, r – радіус кола.

Маємо:

$$\vec{f}\,' = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{s}{r} \\ \cos\dfrac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}\,'' = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{r}\cos\dfrac{s}{r} \\ -\dfrac{1}{r}\sin\dfrac{s}{r} \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, $|\vec{f}\,'| = 1$, тобто, s є натуральним параметром на прямій.

А кривина $k = |\vec{f}\,''| \equiv \dfrac{1}{r}$.

Як обчислити функцію кривини, коли крива γ задана радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b),$$

відносно *довільного* параметра t ?

Від довільного параметра t можна перейти до натурального параметра s :

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

$$\left[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3$$

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right]\right| = \left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|^3$$

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right]\right| = \left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right| / \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^3$$

В натуральній параметризації вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ взаємно ортогональні, при цьому $|\frac{d\vec{f}}{ds}| \equiv 1$, $|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}| = k$. Як наслідок, маємо $|[\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}]| = k$.

Тому з рівності
$$|[\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}]| = |[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]| / |\frac{d\vec{f}}{dt}|^3$$

отримуємо
$$k = \frac{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|}{|\frac{d\vec{f}}{dt}|^3}$$

Тобто, має місце

Формула:
$$\boxed{k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3}}$$

Зауваження. Формула для кривини вибудувана таким чином, що її вигляд не змінюється при регулярній заміні параметризації на кривій.
Кількість «штрихів» в чисельнику і в знаменнику однакова.

Координатна форма запису функції кривини

$n=3$) Якщо крива γ в просторі $\mathbb{R}^3$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

то кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\right)^3}$$

$n=2$) Якщо крива γ в площині $\mathbb{R}^2$ задана параметрично

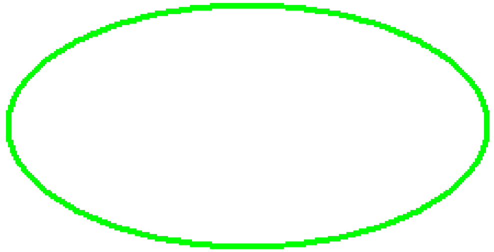
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

то кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{|\, x'y'' - x''y' \,|}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

Приклад 3. Розглянемо еліпс, що задається радіус-вектором

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}.$$



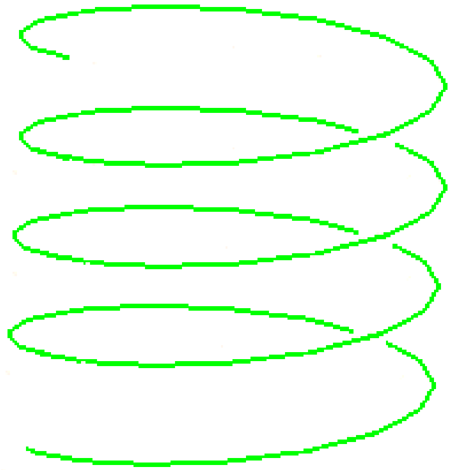
Обчислюючи кривину, отримуємо:

$$k = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}$$

Коли точка рухається по еліпсу, кривина еліпсу змінюється, приймаючи екстремальні значення у вершинах еліпсу.

Приклад 4. Гвинтова лінія в $\mathbb{R}^3$, задана параметрично

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases},$$



має постійну кривину

$$k \equiv \frac{r}{r^2 + h^2}$$

(Перевірте самостійно)

Зауваження.

Точки, в яких кривина обертається в нуль, $k = 0$, називаються *точками перегину* кривої. Саме в цих точках можуть виникнути проблеми з визначенням шільнодотичної площини кривої.

Якщо ж точка не є точкою перегину, $k \neq 0$, то в такій точці шільнодотична площина кривої визначається однозначно.

$$[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k \neq 0$$

2. Скрут (кручення) кривої

Розглянемо регулярну (класу C^3) параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

$s -$ натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ, що не є точкою перегину, $k(s_0) \neq 0$.

Тоді в точці P і в досить близьких до неї точках матимемо $k \neq 0$ і тому на в цих точках на кривій γ визначені щільнодотичні площини.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій γ, досить близької до точки P, розглянемо «кут» ψ між щільнодотичними площинами кривої γ в точках P і Q.

Проаналізуємо поведінку ψ при $s \to s_0$, коли точка Q збігається по кривій γ до точки P.

За неперервністю зміни щільнодотичних площин, маємо

$$\lim_{s \to s_0} \psi = 0.$$

Розглянемо

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\psi}{|s - s_0|}$$

Визначення. Якщо границя $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\psi}{|s-s_0|}$ існує, то її значення називається *крученням* (*скрутом)* кривої γ в точці P і позначається κ.

Нагадаємо, що щільнодотична площина кривої γ в довільній її точці натягнута на пару ортогональних векторів $\dfrac{d\vec{f}}{ds}$, $\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}$.

Тому в якості кута ψ будемо розглядати кут між бівекторами

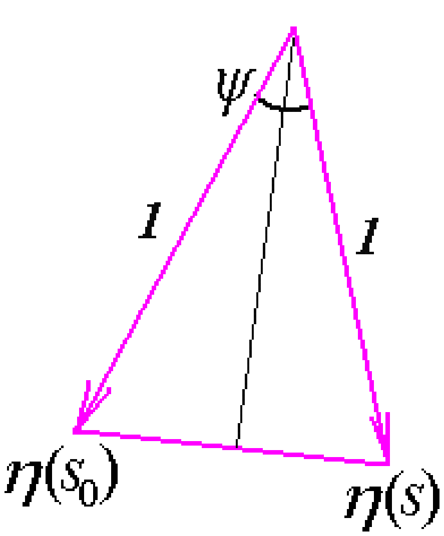
$$[\frac{d\vec{f}}{ds}(s),\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s)] \quad \text{і} \quad [\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s_0)],$$

а, точніше, кут між бівекторами одиничної довжини

$$\eta(s)=[\frac{d\vec{f}}{ds}(s),\frac{\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s)}{\left|\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s)\right|}] \quad \text{і} \quad \eta(s_0)=[\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\frac{\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s_0)}{\left|\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s_0)\right|}].$$

Обчислимо $\kappa=\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\psi}{|s-s_0|}$

Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^3. Тоді отримаємо:



$$\kappa = \lim_{s\to s_0}\frac{\psi}{|s-s_0|} = \lim_{s\to s_0}\frac{2\sin\frac{\psi}{2}}{|s-s_0|} =$$

$$= \lim_{s\to s_0}\frac{2\dfrac{\left|[\vec f'(s),\dfrac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]-[\vec f'(s_0),\dfrac{\vec f''(s_0)}{|\vec f''(s_0)|}]\right|}{2}}{|s-s_0|} =$$

$$= \left|\lim_{s\to s_0}\frac{[\vec f'(s),\dfrac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]-[\vec f'(s_0),\dfrac{\vec f''(s_0)}{|\vec f''(s_0)|}]}{s-s_0}\right| = \left|[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'\right|_{s=s_0}$$

Обчислимо $[\vec f'(s),\dfrac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'$, а потім $\left|[\vec f'(s),\dfrac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'\right|$.

Зауваження: $|[\vec a,\vec b]|^2=|\vec a|^2|\vec b|^2-<\vec a,\vec b>^2$

Нагадаємо, що в натуральній параметризації виконано

$$|\vec{f}'|^2 = <\vec{f}', \vec{f}'> \equiv 1 \qquad |\vec{f}''|^2 = <\vec{f}'', \vec{f}''> = k^2$$

$$<\vec{f}', \vec{f}''> \equiv 0 \qquad <\vec{f}'', \vec{f}'''> = k\,k'$$

$$<\vec{f}'', \vec{f}''> + <\vec{f}', \vec{f}'''> \equiv 0 \qquad <\vec{f}', \vec{f}'''> = -k^2$$

Застосуємо ці формули для обчислення:

$$[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]' = [\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{k}]' = [\vec{f}'', \frac{\vec{f}''}{k}] + [\vec{f}', \frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}] = [\vec{f}', \frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}]$$

$$|[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]'|^2 = |[\vec{f}', \frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}]|^2 = |\vec{f}'|^2 \left|\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}\right|^2 - <\vec{f}', \frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}>^2 =$$

$$= \left|\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}\right|^2 - <\vec{f}', \frac{\vec{f}'''}{k}>^2 = \left|\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}\right|^2 - k^2 =$$

$$= \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - 2\frac{k' <\vec{f}''', \vec{f}''>}{k^3} + \frac{(k')^2\,|\vec{f}''|^2}{k^4} - k^2 =$$

$$= \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - 2\frac{<\vec{f}''', \vec{f}''>^2}{k^4} + \frac{<\vec{f}''', \vec{f}''>^2}{k^4} - k^2 = \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - \frac{<\vec{f}''', \vec{f}''>^2}{k^4} - k^2$$

Отже, отримали формулу:

$$|[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]'|^2 = \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - \frac{<\vec{f}''', \vec{f}''>^2}{k^4} - k^2$$

З іншого боку, маємо

$$(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')^2 = \begin{vmatrix} <\vec{f}', \vec{f}'> & <\vec{f}', \vec{f}''> & <\vec{f}', \vec{f}'''> \\ <\vec{f}', \vec{f}''> & <\vec{f}'', \vec{f}''> & <\vec{f}'', \vec{f}'''> \\ <\vec{f}', \vec{f}'''> & <\vec{f}'', \vec{f}'''> & <\vec{f}''', \vec{f}'''> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k^2 & <\vec{f}'', \vec{f}'''> \\ -k^2 & <\vec{f}'', \vec{f}'''> & |\vec{f}'''|^2 \end{vmatrix} = k^2 |\vec{f}'''|^2 - <\vec{f}'', \vec{f}'''>^2 - k^6$$

Таким чином, отримуємо:

$$|[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]'|^2 = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')^2}{k^4}$$

Висновок. Для регулярної класу C^3 кривої γ в $\mathbb{R}^n$ в кожної її точці, що не є точкою перегину ($k\neq 0$), визначається скрут

$$\kappa = \frac{|(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')|}{k^2}$$

Зауваження 1. В кожній точці P з $k \neq 0$ на кривій γ виникає своє значення скруту, тобто, маємо функцію $\kappa = \kappa(s)$. Якщо $\vec{f}(s) \in C^m$, то $\kappa(s) \in C^{m-3}$.

Зауваження 2. Скрут κ характеризує швидкість, з якою змінюється «напрямок» щільнодотичної площини кривої, коли точка рухається по кривій.

Зауваження 3. Скрут κ не залежить від розташування кривої γ в просторі. Інакше кажучи, якщо до кривої γ застосувати паралельний перенос, обертання або симетрію в $\mathbb{R}^n$, то скрут κ не зміниться.

Зауваження 4. Для кривих в $\mathbb{R}^2$, як і для плоских кривих в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, скрут тотожно дорівнює нулю: $\kappa \equiv 0$.

Зауваження 5. Для кривих в $\mathbb{R}^3$ скрут κ визначається зі знаком:

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{k^2}$$

Як обчислити функцію скруту, коли крива γ задана радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b),$$

відносно довільного параметра t ?

Від довільного параметра t можна перейти до натурального параметра s :

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^3\vec{f}}{ds^3} = \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^3t}{ds^3},$$

$$\left(\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{f}}{ds^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^3t}{ds^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right)\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right) / \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6$$

$$\kappa = \frac{|(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3})|}{k^2 \cdot \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} = \frac{|(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3})|}{\frac{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|^2}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} = \frac{|(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3})|}{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|^2}$$

Таким чином, отримуємо наступне формулу для обчислення кручення *κ*.

Формула *(n>3)*:

$$\boxed{\kappa = \frac{|(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')|}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2}}$$

Формула *(n=3)*:

$$\boxed{\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2}}$$

Зауваження. Формула для кручення вибудувана таким чином, що її вигляд не змінюється при регулярній заміні параметризації на кривій.

Кількість штрихів в чисельнику і знаменнику однакова.

Координатне представлення. Якщо крива γ в $I\!R^3$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

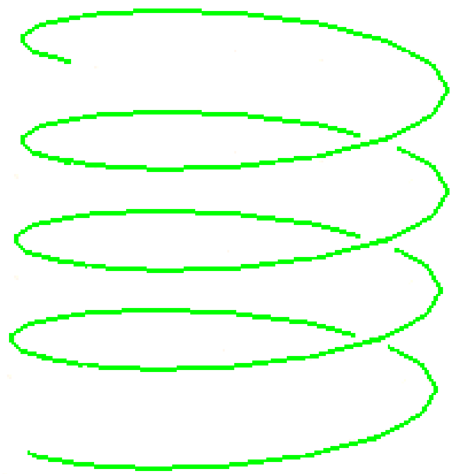
то скрут обчислюється за формулою

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}$$

Приклад. Гвинтова лінія в $I\!R^3$, задана параметрично

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases},$$

має постійний скрут $\kappa \equiv \dfrac{h}{r^2 + h^2}$.



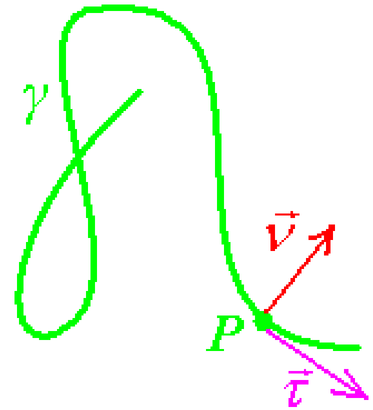
Висновок-анонс

1. Для регулярної кривої γ в двомірній площині $\mathbb{R}^2$ усі геометричні властивості кривої, які не залежать від розташування кривої в площині, закодовані саме у функції кривини $k=k(s)$.

2. Для регулярної кривої γ в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ усі геометричні властивості кривої, які не залежать від розташування кривої в просторі, закодовані саме у функціях кривини $k=k(s)$ і скруту $\kappa=\kappa(s)$.

Для кривих в багатомірному просторі $\mathbb{R}^n$, $n>3$, крім кривини $k_1=k$ і скруту $k_2=\kappa$ ще, крок за кроком, додатково визначаються *старші* кривини $k_3,\ldots,k_{n-1}$, які повністю визначають усі геометричні властивості кривої з точністю до розташування в просторі $\mathbb{R}^n$, дивись Yu.A. Aminov, *Differential geometry and topology of curves.*

3. Локальний вигляд кривої в площині $I\!R^2$



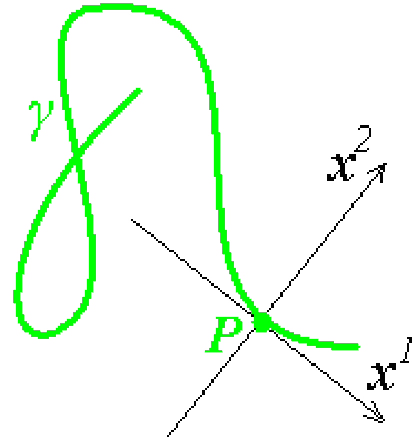
Розглянемо регулярну класу C^2 параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s - натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ.

Виберемо декартову систему координат в площині в $I\!R^2$ так, що точка P – початок координат, координатна вісь x^1 направлена вздовж дотичної прямої кривої γ в точці P, а координатна вісь x^2 направлена вздовж нормальної прямої кривої γ в точці P. Тобто, будемо розглядати криву γ в систему відліку, породженій базисом Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ кривої γ в точці P.



Розкладання Тейлора вектор-функції $\vec{f}(s)$ в точці P:

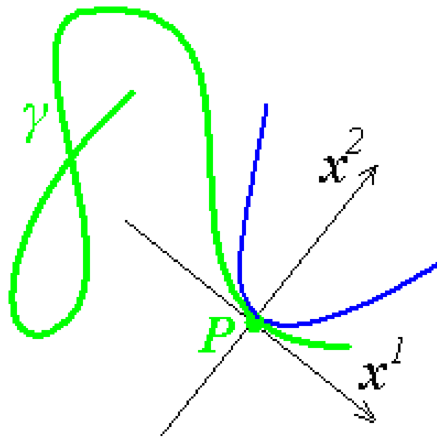
$$\vec{f}(s) = \vec{f}(s_0) + \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)\cdot(s-s_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s_0)\cdot(s-s_0)^2 + \vec{o}((s-s_0)^2) =$$

$$= \vec{\tau}(s_0)\cdot(s-s_0) + \frac{1}{2}\cdot k(s_0)\cdot\vec{\nu}(s_0)\cdot(s-s_0)^2 + \vec{o}((s-s_0)^2)$$

Тут ми використали, що $\frac{d\vec{f}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = k \cdot \vec{v}$

В координатній формі маємо:

$$\begin{cases} x^1 = s - s_0 + o((s - s_0)^2) \\ x^2 = k(s_0) \cdot (s - s_0)^2 + o((s - s_0)^2) \end{cases}$$

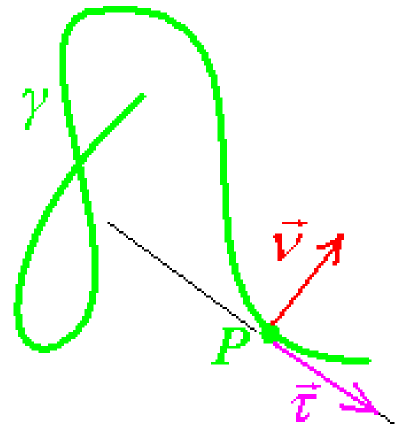


Як наслідок, якщо $k(s_0) \neq 0$, то в досить малому околі точки P крива γ виглядає приблизно, з точністю до $o((s - s_0)^2)$, як парабола

$$x^2 = k_0 \cdot (x^1)^2$$

Зовнішня форма параболи, а як наслідок – зовнішня форма кривої γ в досить малому околі точки P, визначаються значенням кривини $k_0 = k(s_0)$.

Зауваження. Якщо P не є точкою перегину, $k(s_0)\neq 0$, то в досить малому околі точки P крива γ лежить *по одну сторону* від дотичної прямої, причому саме в тій півплощині, куди направлено вектор $\vec{\nu}$ (еквівалентно – вектор $\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}$).



4. Локальний вигляд кривої в просторі $I\!R^3$

Розглянемо регулярну класу C^3 параметрично задану криву γ в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s – натуральний параметр.

Припустимо, що крива γ не має точок перегину, тобто, $k \neq 0$.

Нагадування:

$$< \vec{f}', \vec{f}' > \equiv 1 \qquad\qquad < \vec{f}'', \vec{f}'' > = k^2$$

$$< \vec{f}', \vec{f}'' > \equiv 0 \qquad\qquad < \vec{f}'', \vec{f}''' > = k\, k'$$

$$< \vec{f}'', \vec{f}'' > + < \vec{f}', \vec{f}''' > \equiv 0$$

$$< \vec{f}', \vec{f}''' > = -k^2$$

Запишемо, як похідні радіус-вектора виражаються через вектори базиса Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$. Маємо:

$$\vec{f}' = \vec{\tau} \quad , \quad \vec{f}'' = k\vec{\nu}$$

Запишемо

$$\vec{f}''' = A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta} = A\vec{f}' + B\frac{1}{k}\vec{f}'' + C\frac{1}{k}[\vec{f}', \vec{f}'']$$

Знайдемо крок за кроком коефіцієнти *A*, *B*, *C*.

Маємо:
$$\vec f''' = A\vec f' + B\frac{1}{k}\vec f'' + C\frac{1}{k}[\vec f', \vec f'']$$

$$1)\ <\vec f', \vec f'''> = A<\vec f', \vec f'> + B\frac{1}{k}<\vec f', \vec f''> + C\frac{1}{k}<\vec f', [\vec f', \vec f'']>$$
$$-k^2 = A$$

$$2)\ <\vec f'', \vec f'''> = A<\vec f'', \vec f'> + B\frac{1}{k}<\vec f'', \vec f''> + C\frac{1}{k}<\vec f'', [\vec f', \vec f'']>$$
$$k\,k' = B\frac{1}{k}k^2$$
$$k' = B$$

$$3)\ <[\vec f', \vec f''], \vec f'''> = A<[\vec f', \vec f''], \vec f'> + B\frac{1}{k}<[\vec f', \vec f''], \vec f''> + C\frac{1}{k}<[\vec f', \vec f''], [\vec f', \vec f'']>$$
$$\kappa k^2 = C\frac{1}{k}k^2$$
$$\kappa k = C$$

Отже, отримали:
$$\vec f''' = -k^2\vec\tau + k'\vec\nu + \kappa k\vec\beta$$

Запишемо тепер розкладання Тейлора для радіус-вектора $\vec{f}(s)$ кривої γ в довільній точці $P(s_0)$, що не є точкою перегину ($k(s_0)\neq 0$):

$$\vec{f}(s)=\vec{f}(s_0)+\vec{f}\,'(s_0)\cdot(s-s_0)+\frac{1}{2}\cdot\vec{f}\,''(s_0)\cdot(s-s_0)^2+\frac{1}{6}\cdot\vec{f}\,'''(s_0)\cdot(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3)$$

Підставимо

$$\vec{f}\,'=\vec{\tau}$$
$$\vec{f}\,''=k\vec{\nu}$$
$$\vec{f}\,'''=-k^2\vec{\tau}+k'\vec{\nu}+\kappa k\vec{\beta}$$

Отримаємо:

$$\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)=$$
$$=\vec{\tau}_0\cdot(s-s_0)+\frac{1}{2}k_0\vec{\nu}_0\cdot(s-s_0)^2+\frac{1}{6}(-k_0^2\vec{\tau}_0+k_0'\vec{\nu}_0+\kappa_0k_0\vec{\beta}_0)(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3),$$

тобто,

$$\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)=\vec{\tau}_0\cdot((s-s_0)-\frac{k_0^2}{6}(s-s_0)^3)+\vec{\nu}_0\cdot(\frac{1}{2}k_0(s-s_0)^2+\frac{k_0'}{6}(s-s_0)^3)+$$
$$+\vec{\beta}_0\cdot\frac{\kappa_0k_0}{6}(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3)$$

Оберемо тепер систему координат в $\mathbb{R}^3$ так, щоб точка P була початком координат, а вектори базису Френе $\vec{\tau}_0$, $\vec{\nu}_0$, $\vec{\beta}_0$ в точці P були напрямними векторами координатних осей x^1, x^2, x^3.

Крім того, натуральний параметр на кривій γ будемо відраховувати від точки P , тобто, $s_0=0$.

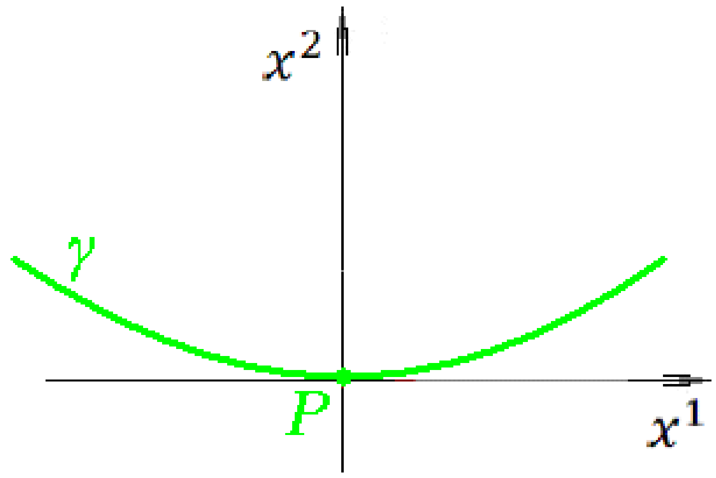
Тоді, в так обраній системі відліку, прив'язаній до базиса Френе кривої γ в точці P, матимемо:

$$\vec{f}(s)=\begin{pmatrix} s+o(s) \\ \frac{1}{2}k_0\, s^2+o(s^2) \\ \frac{\kappa_0 k_0}{6}s^3+o(s^3) \end{pmatrix}$$

Щоб проаналізувати зовнішній вигляд кривої γ, спроектуємо її на координатні площини в $\mathbb{R}^3$.

В проекції на площину x^1, x^2, що є щільнодотичною площиною кривої γ в точці P, отримаємо

$$\begin{cases} x^1 = s + o(s) \\ x^2 = \dfrac{1}{2}k_0 s^2 + o(s^2) \end{cases}$$



Отже, в проекції на щільнодотичну площину в точці P крива γ виглядає *приблизно* як парабола

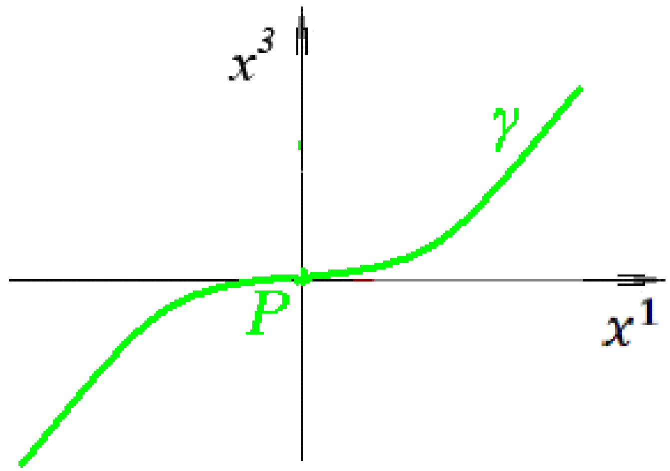
$$x^2 = \frac{1}{2}k_0\,(x^1)^2$$

Кривина $k_0 = k(0)$ кривої γ в точці P визначає коефіцієнт в рівнянні параболи.

Далі, в проекції на площину x^1, x^3, що є спрямною площиною кривої γ в точці P, отримаємо

$$\begin{cases} x^1 = s + o(s) \\ x^3 = \dfrac{\kappa_0 k_0}{6} s^3 + o(s^3) \end{cases}$$

Якщо в точці P не лише кривина $k_0 \neq 0$, а і скрут $\kappa_0 \neq 0$, то в проекції на спрямну площину в точці P крива γ виглядає *приблизно* як кубічна крива

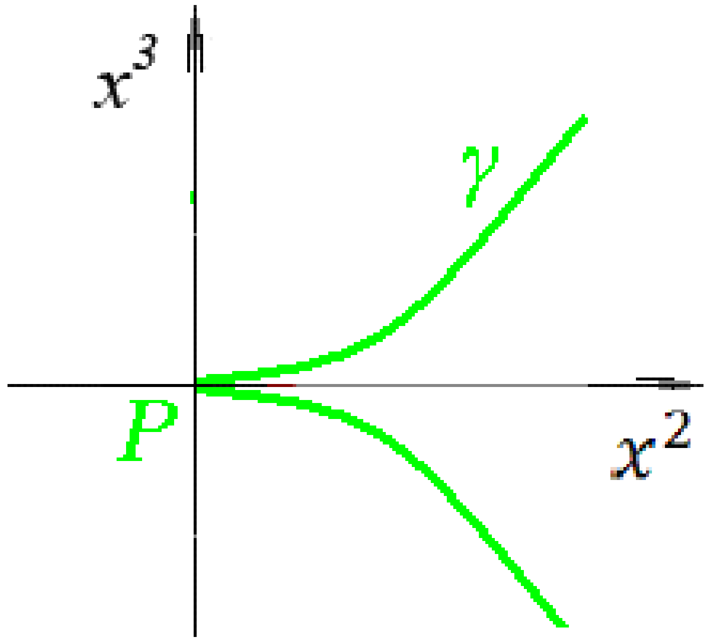


$$x^3 = \frac{\kappa_0 k_0}{6} (x^1)^3$$

Кривина $k_0 = k(0)$ і скрут $\kappa_0 = \kappa(0)$ кривої γ в точці P визначають коефіцієнт в рівнянні кубічної кривої.

Нарешті, в проекції на площину x^2, x^3, що є нормальною площиною кривої γ в точці P, отримаємо

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} k_0 \; s^2 + o(s^2) \\ x^3 = \frac{\kappa_0 k_0}{6} s^3 + o(s^3) \end{cases}$$

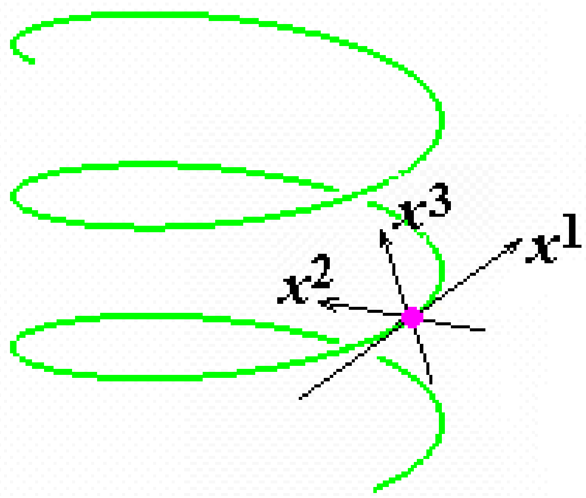


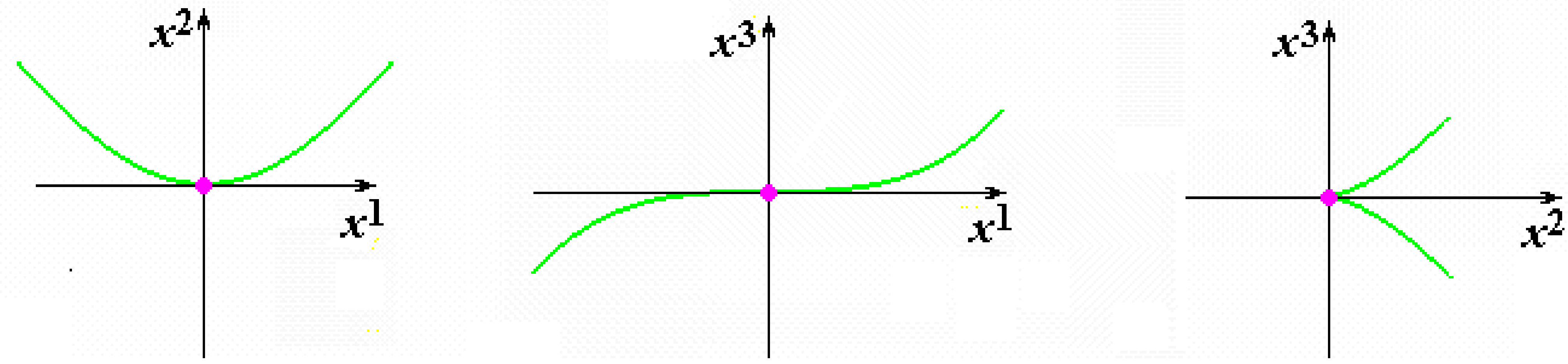
Якщо в точці P не лише кривина $k_0 \neq 0$, а і скрут $\kappa_0 \neq 0$, то в проекції на нормальну площину в точці P крива γ виглядає *приблизно* як напівкубічна парабола

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} k_0 \; s^2 \\ x^3 = \frac{\kappa_0 k_0}{6} s^3 \end{cases}$$

Кривина $k_0 = k(0)$ і скрут $\kappa_0 = \kappa(0)$ кривої γ в точці P визначають коефіцієнти в рівнянні напівкубічної параболи.

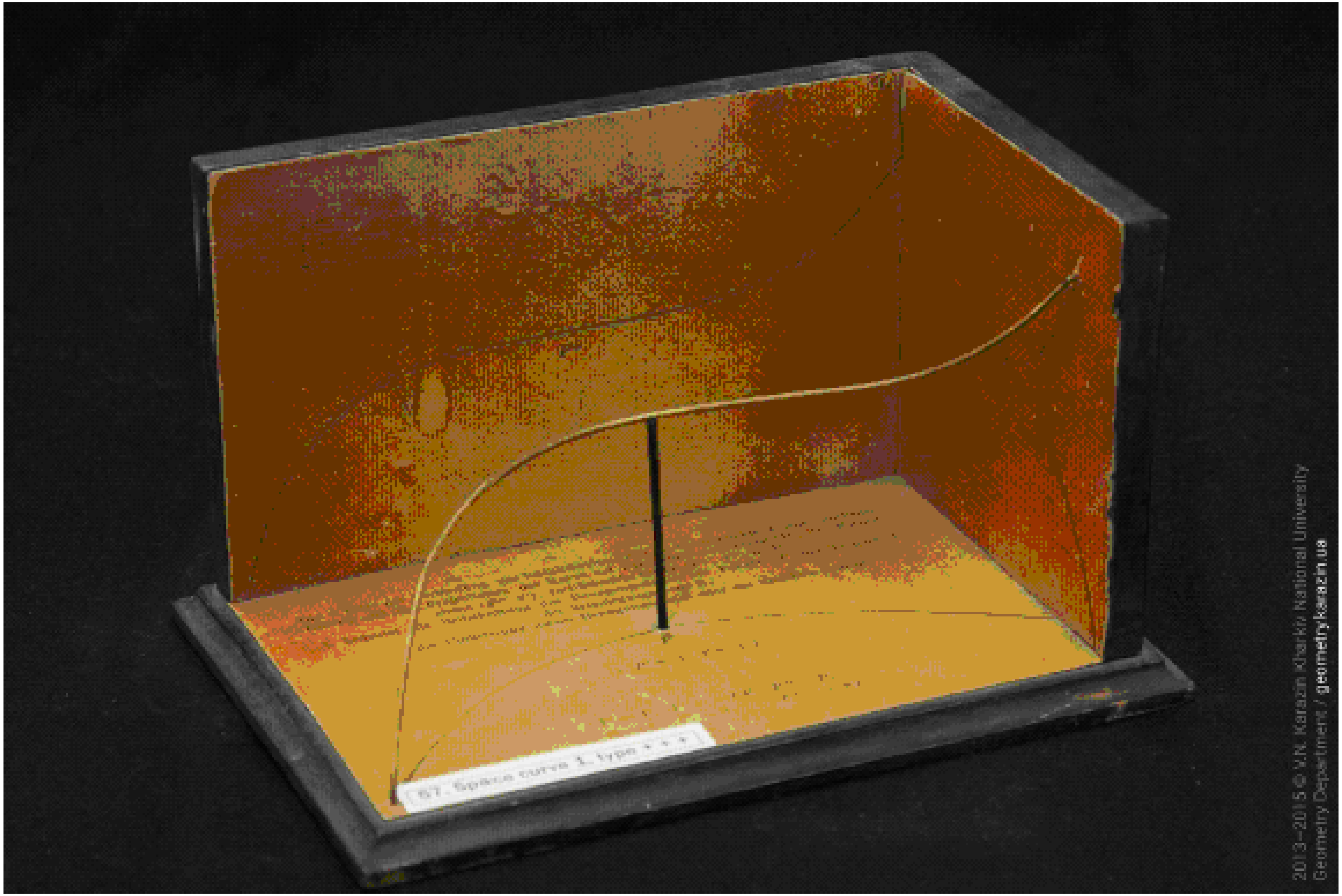
Приклад-ілюстрація

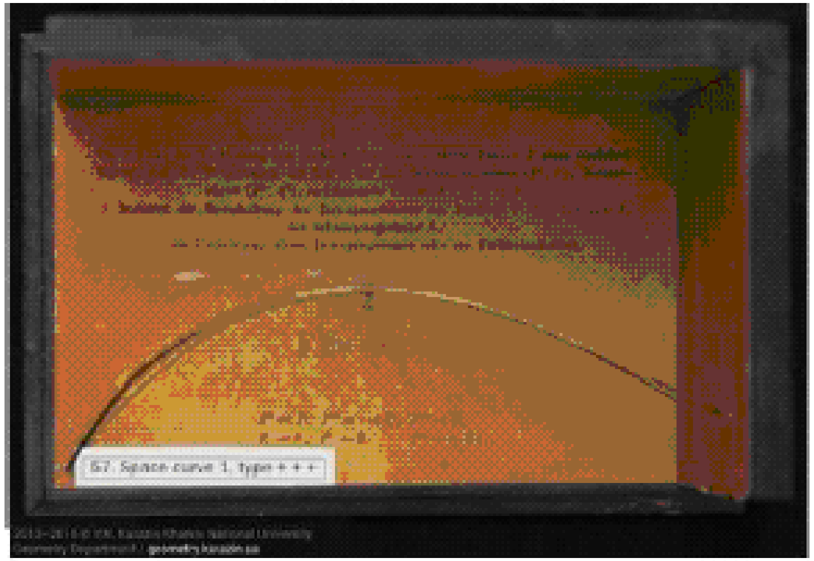


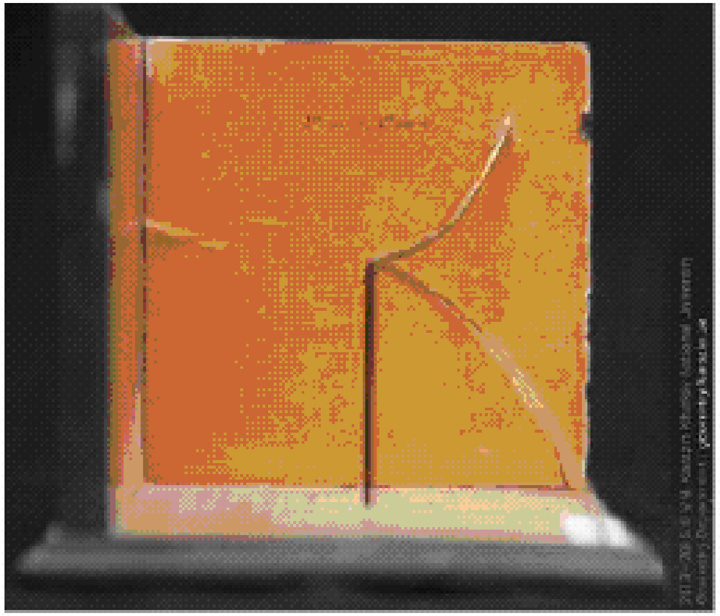


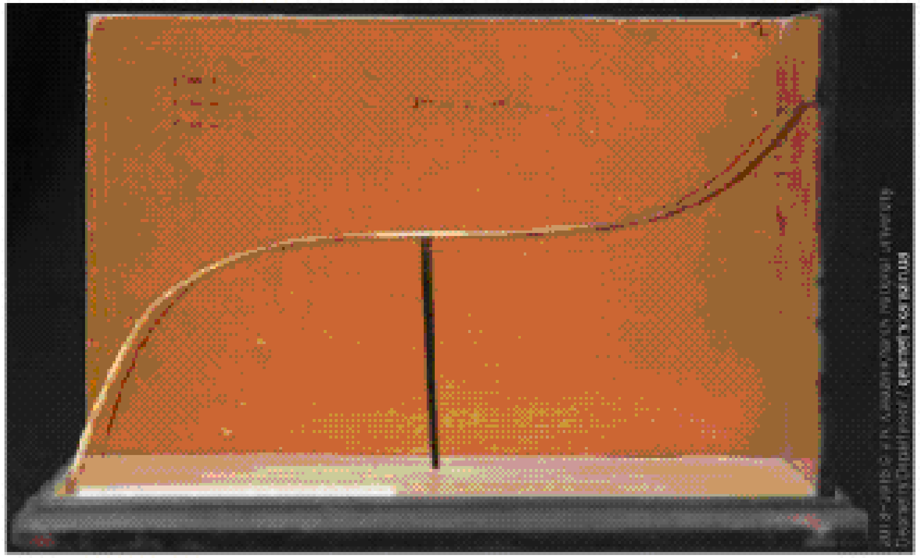
Колекція геометричних моделей:

http://geometry.karazin.ua/geometric-models-collection.html









Нами розглянуто загальний випадок, коли $k_0 \neq 0$ і $\kappa_0 \neq 0$.
Якщо ж $k_0 = 0$ або $k_0 \neq 0$, $\kappa_0 = 0$, то формули і малюнки будуть іншими!

Наслідок-висновок. Значення кривини k_0 та скруту κ_0 кривої γ в точці P визначають *приблизний* вигляд кривої γ в досить малому околі точки P.

Наслідок. *Якщо крива γ має ненульову кривину $k_0 \neq 0$ в точці P, то досить малий окіл точки P на кривій γ лежить по одну сторону від спрямної площини кривої γ в точці P, причому саме в тому півпросторі, куди спрямовано вектор головної нормалі $\vec{\nu}(P)$.*

Доведення. З отриманого вище розкладання Тейлора

$$\vec{f}(s) = \vec{\tau}_0 \cdot (s + o(s)) + \vec{\nu}_0 \cdot (\frac{k_0}{2} s^2 + o(s^2)) + \vec{\beta}_0 \cdot (\frac{\kappa_0 k_0}{6} s^3 + \vec{o}(s^3))$$

випливає, що коефіцієнт при $\vec{\nu}_0$ (вісь x^2) є додатним при досить малих абсолютних значеннях s. А це і означає, що крива γ лежить у півпросторі $x^2 \geq 0$, визначеному спрямною площиною $x^2 = 0$ кривої в точці P, причому саме в тому півпросторі, куди спрямовано вектор $\vec{\nu}_0$, що є напрямним вектором координатної осі x^2.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Задача 5.1. Знайдіть формулу для обчислення кривини довільної (класу C^2) явно заданої кривої $y=F(x)$.

Застосуйте знайдену формулу для обчислення кривини наступних явно заданих кривих:

1) $y=\sin x$,
2) $y = \operatorname{tg} x$
3) $y = x^2$
4) $y = x^3$
5) $y = \ln x$
6) $y = \cosh x$

Проаналізуйте, в яких точках на кривій: 1) кривина обертається в нуль, 2) кривина приймає максимальне значення, 3) кривина приймає мінімальне значення.

Задача 5.2. Обчисліть кривину наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

3) $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

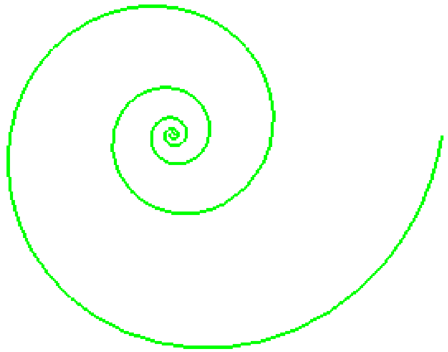
4) $\begin{cases} x^1 = e^{at}\cos t \\ x^2 = e^{at}\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

Намалюйте криві та спробуйте, дивлячись на малюнок, висловити гіпотези стосовно точок нульової кривини, точок максимальної кривини, точок мінімальної кривини на кожній з кривих. Підтвердьте або спростуйте гіпотези, проаналізувавши отримані функції кривини.

Додаток.

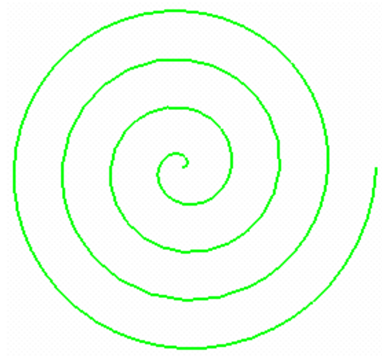
Логаріфмічна спіраль

$$\begin{cases} x^1 = e^{at}\cos t \\ x^2 = e^{at}\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Спіраль Архімеда

$$\begin{cases} x^1 = at\cos t \\ x^2 = at\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Узагальнена спіраль

$$\begin{cases} x^1 = \rho(t)\cos t \\ x^2 = \rho(t)\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

????

Чому дорівнює кривина узагальненої спіралі? В яких точках узагальненої спіралі кривина приймає екстремальні значення: Чи існують на такій кривій точки перегину?

Задача 5.3. Знайти кривину і скрут гвинтової лінії

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Відповідь: $k = \dfrac{r}{r^2+h^2}, \quad \kappa = \dfrac{h}{r^2+h^2}$

Задача 5.4. Розглянемо наступну кривої γ в тримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ x^2 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \ , \ t \in (-\infty, +\infty). \\ \qquad x^3 = r \cdot \sin(\alpha t) \end{cases}$$

Проаналізуйте, в залежності від значень додатних параметрів c, r, α і β, коли радіус-вектор кривої γ є періодичною вектор-функцією, а крива γ є замкнутою.

Обчисліть натуральний параметр s на кривій γ, який відраховується від точки *P(t=0)*.

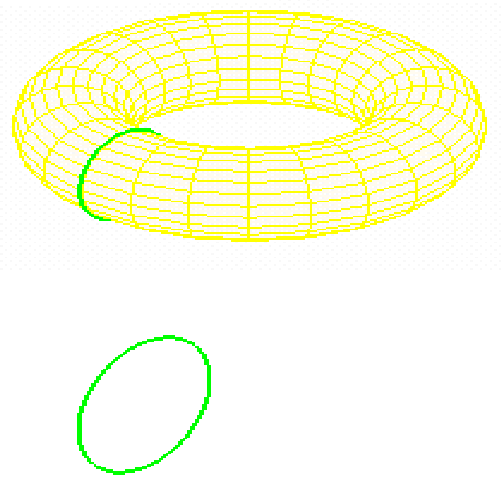
Обчисліть кривину та скрут кривої γ в точці *P(t=0)*.

* Чи може задана крива γ бути плоскою при якихось значеннях додатних параметрів c, r, α і β ?

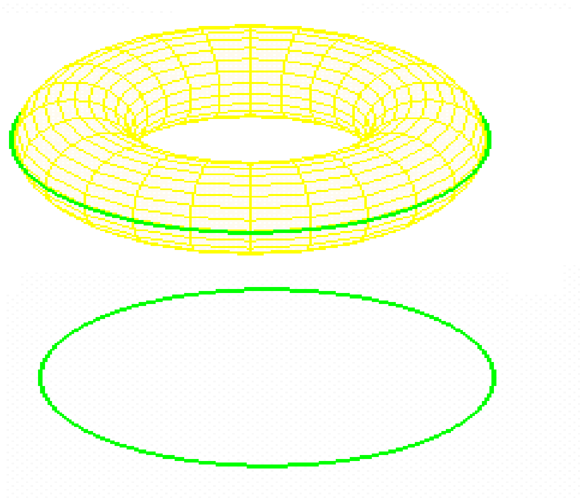
Спробуйте намалювати криву γ при якихось конкретних значеннях c, r, α і β.

Приклади:

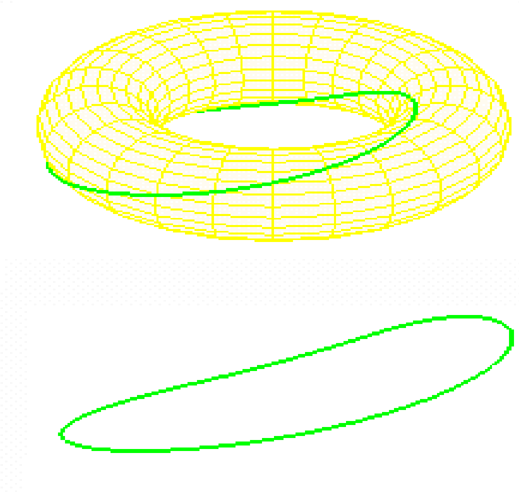
$\alpha=1, \beta=0$



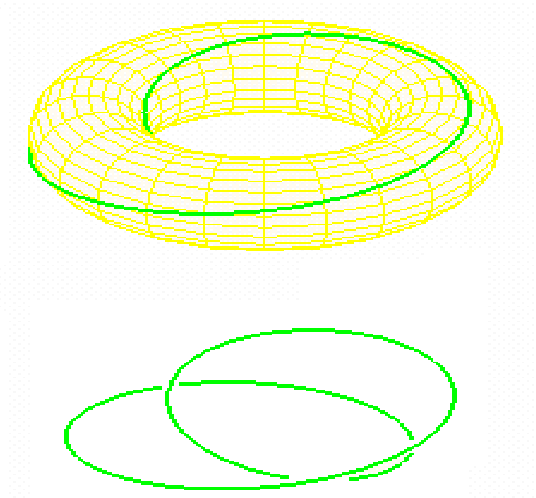
$\alpha=0, \beta=1$



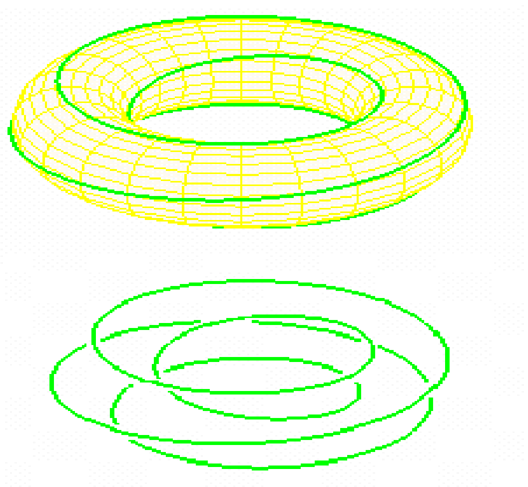
$\alpha=1, \beta=1$



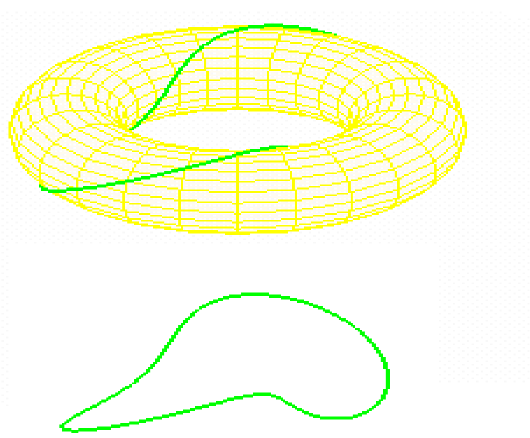
$\alpha=1, \beta=2$



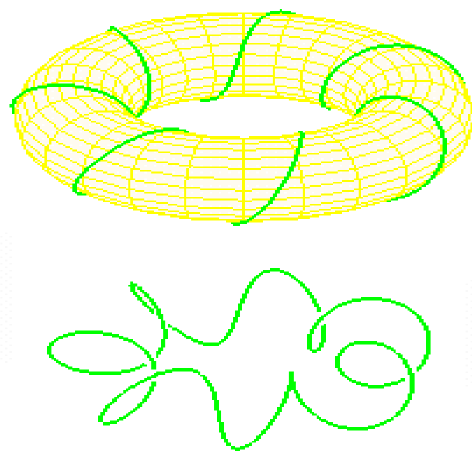
$\alpha=1, \beta=4$



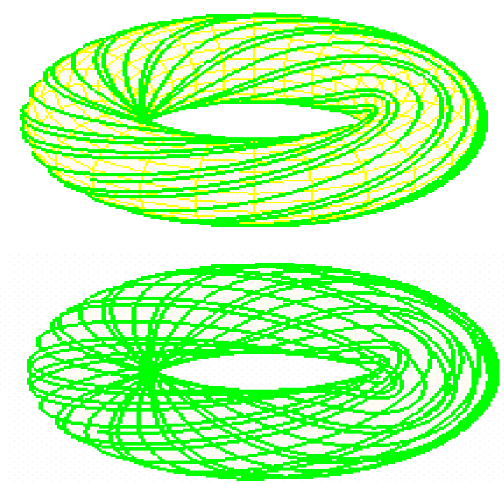
$\alpha=2, \beta=1$



$\alpha=7, \beta=1$



$\alpha=\pi, \beta=e$



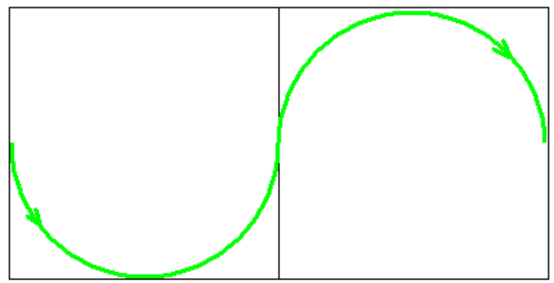
Задача 5.5. Доведіть, що кривина і скрут не залежать від розташування кривої в просторі.

Задача 5.6. Проаналізуйте, як змінюються кривина і скрут під дією гомотетії з коефіцієнтом $\lambda>0$ в просторі.

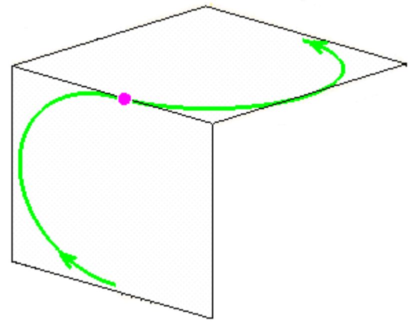
Відповідь: $k_* = \dfrac{1}{\lambda}\cdot k$, $\kappa_* = \dfrac{1}{\lambda}\cdot \kappa$

Задача 5.7. Розглянемо криву γ в тримірному просторі, яка є регулярною класу C^m і не містить точок перегину. Проаналізуйте, якому класу гладкості належать кожне з векторних полей $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ рухомого репера Френе кривої γ, а також функції кривини і скруту кривої γ.

Задача-експеримент 5.8. Виріжте з паперу прямокутник, утворений з двох квадратів. В кожний з квадратів впишіть півколо так, щоб вийшла наступна крива Γ.



Перегніть прямокутник вздовж середньої лінії так, що квадрати лежали в перпендикулярних площинах (як пара граней куба).



Розглянемо криву γ, що утворилась з намальованої кривої Γ після перегинання.

Чи є крива γ регулярною?

Якщо так, якого класу регулярності є крива γ?

Чи є крива γ плоскою?

Намалюйте дотичне векторне поле $\vec{\tau}$ і векторне поле головних нормалей $\vec{\nu}$ кривої γ, проаналізуйте їх неперервність. Опишіть векторне поле бінормалей $\vec{\beta}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Чому дорівнюють кривина і скрут кривої γ? Чи є крива γ плоскою?

Задача 5.9. Визначимо бівектор – векторний добуток пари векторів в *n*-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1,\dots,X^n),\ \vec{Y} = (Y^1,\dots,Y^n) \quad \to \quad [\vec{X},\vec{Y}] := (p^{12}, p^{13}, p^{14},\dots, p^{n-1n}),$$

де $p^{ij} := \begin{vmatrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{vmatrix}$, $1 \le i < j \le n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N,\ N = C_n^2,$$

має наступні властивості:

1) $[a\vec{X} + b\vec{Y}, \vec{Z}] = a[\vec{X},\vec{Z}] + b[\vec{Y},\vec{Z}]$, $[\vec{X}, a\vec{Y} + b\vec{Z}] = a[\vec{X},\vec{Y}] + b[\vec{X},\vec{Z}]$

2) $[\vec{X},\vec{Y}] = -[\vec{Y},\vec{X}]$

3) $<[\vec{X},\vec{Y}],[\vec{Z},\vec{W}]> = \begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{Z}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{Z}> & <\vec{Y},\vec{W}> \end{vmatrix}$

Чому дорівнює векторний добуток колінеарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X},\vec{Y}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=3$, коли $N=3$ і можемо ототожнити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^N$, в якому порядку треба розставити p^{ij} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток співпадав зі звичайним векторним добутком і, зокрема, задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y}]\perp \vec{X},\vec{Y}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів (multivectors)*

Посилання:

Yu.A. Aminov, *Differential geometry and topology of curves*

E.G. Shilov, *Linear Algebra*

N.V.Efimov, E.R. Rozendorn, *Linear algebra and multidimensional geometry*

Задача 5.10. Визначимо векторний добуток трійки векторів в n-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1,\dots,X^n),\ \vec{Y} = (Y^1,\dots,Y^n),\ \vec{Z} = (Z^1,\dots,Z^n) \to$$

$$\to [\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}] := (p^{123},\dots,p^{n-2\,n-1\,n}),$$

де $p^{ijk} := \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}$, $1 \le i < j < k \le n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N,\ N = C_n^3,$$

має наступні властивості:

1) лінійність по кожному аргументу,

2) якщо переставити місцями аргументи, то векторний добуток або не зміниться, якщо перестановка є парною, або змінить знак, якщо перестановка є непарною.

3) $<[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}],[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]>=\begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{U}> & <\vec{X},\vec{V}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{U}> & <\vec{Y},\vec{V}> & <\vec{Y},\vec{W}> \\ <\vec{Z},\vec{U}> & <\vec{Z},\vec{V}> & <\vec{Z},\vec{W}> \end{vmatrix}$

Чому дорівнює векторний добуток компланарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=3$ маємо $N=1$, а розглянутий векторний добуток – це просто звичайний змішаний добуток трьох векторів.

Зауваження. У випадку $n=4$, коли $N=4$ і можемо ототожнити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^N$, в якому порядку треба розставити p^{ijk} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]\perp\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів (multivectors)*

Посилання:

Yu.A. Aminov, *Differential geometry and topology of curves*

E.G. Shilov, *Linear Algebra*

N.V.Efimov, E.R. Rozendorn, *Linear algebra and multidimensional geometry*

Задача 5.11. Обчисліть кривину та скрут наступної кривої γ в чотиримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = A\cdot\cos(\alpha t) \\ x^2 = A\cdot\sin(\alpha t) \\ x^3 = B\cdot\cos(\beta t) \\ x^3 = B\cdot\sin(\beta t) \end{cases}, \quad t\in(-\infty,+\infty).$$