тоді $\psi(F(C)\cap V) = \bigcup\limits_i \psi(F(U_i \cap F^{-1}(V)\cap C))$ - міри 0.

За def, тоді $F(C)$ - міри 0.

Отже, Th. Сарда достатньо довести для $F\in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$, де $U\subset\mathbb{R}^m$ - відкрита.

Для $k\in\mathbb{N}$ позначимо через $C_k$ множину $p\in U$, у яких усі част. похідні усіх коорд. ф-цій $F$ до $k$-того порядку включно нульові. Очевидно, тоді

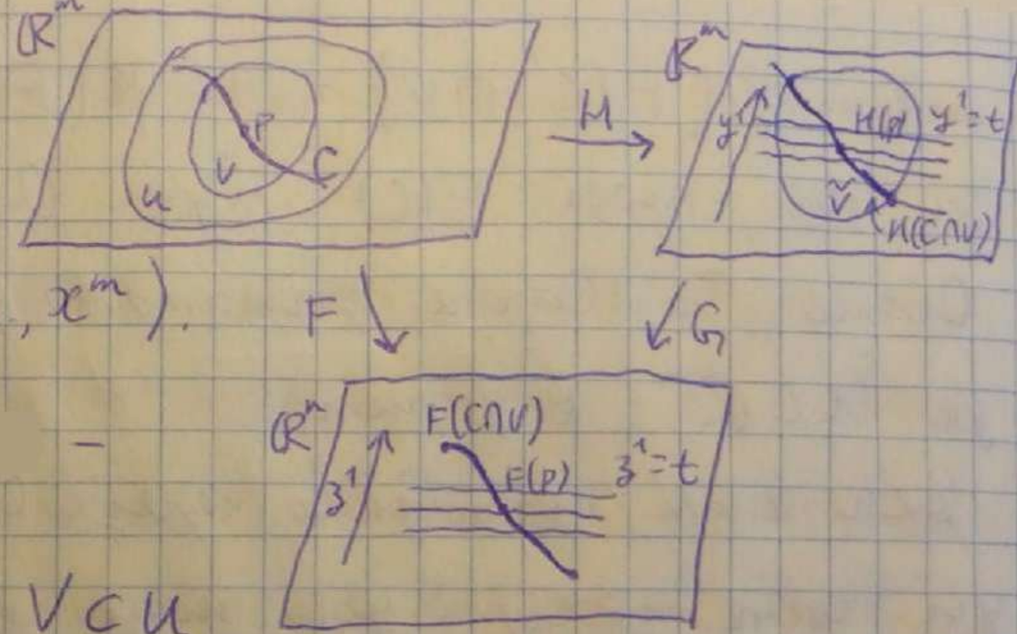
$$C\supset C_1\supset \dots \supset C_k\supset C_{k+1}\supset \dots$$

1. Доведемо, що $F(C\setminus C_1)$ - міри 0. Доводимо індукцією за $m$:

$m=0$ - очевидно ($\mathbb{R}^0$, $U$ і $C$ - одноточкові)

$m-1\to m$. $\forall p\in C\setminus C_1$ за def $\operatorname{rank}_p F<n$ і $\exists$ част. похідна якоїсь коорд. ф-ції $F$, що у $p$ $\neq 0$.
Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) \neq 0.$




Побудуємо $H: U \to \mathbb{R}^m$:

$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (F^1(x^1, \dots, x^m), x^2, \dots, x^m)$.

Тоді $d_pH = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$ — невиродж., тому $\exists$ відкр. $V \subset U$ ($p \in V$) і $\tilde{V} \ni H(p)$ в $\mathbb{R}^m$ такі, що $H: V \to \tilde{V}$ — дифео-зм.

Визначимо $G := F \circ H^{-1} \in C^\infty(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$. Оскільки $H$ — дифео-зм, множина крит. точок відобр. $G$ на $\tilde{V}$ співпадає з образом мн. крит. точок $F$ на $V$, тобто це $H(C \cap V)$, тоді мн. крит. значень — це $F(C \cap V)$.

За побудовою, $G$ переводить $(y^1, \dots, y^m) \in \tilde{V}$ у точку $\mathbb{R}^n$ з першою коорд. $y^1 (= F^1(x^1, \dots, x^m)$, де $(x^1, \dots, x^m) =$

$= H^{-1}(y^1, \dots, y^n)$) Тому $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad G(\{y^1 = t\} \cap \tilde{V}) \subset \{z^1 = t\}$.

Розглянемо $G_t := G|_{\{y^1 = t\} \cap \tilde{V}}$. Воно гладке як обм. гладкого (Вгр), і у відповідних точках (з $y^1 = t$)

$$d_p G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots \dots 0 \\ \hline * & d_p G_t \end{array}\right)$$

(в силу завув. вище (і поняття)). Тому якщо $p$ критична для $G$, вона крит. і для $G_t$, тобто мн. крит. точок $G_t$ — це $H(C \cap V) \cap \{y^1 = t\}$, її образ — $F(C \cap V) \cap \{z^1 = t\}$.

$G_t \in C^\infty(\underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}^{m-1}}}{\{y^1 = t\}} \cap \tilde{V}, \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}^{n-1}}}{\{z^1 = t\}})$ можна розглядати як гл. відображення відкр. підмножини $\mathbb{R}^{m-1}$ у $\mathbb{R}^{n-1}$.

Тоді за припущенням індукції множина її крит. значень $F(C \cap V) \cap \{z^1 = t\}$ — міри $0$ (у $\{z^1 = t\} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, а отже і у $\mathbb{R}^n$). Це так $\forall t$. Оскільки $F(C \cap V)$ — вимірна (наприклад, бо $C = \bigcup_i \hat{C}_i$ — об'єднання

$\leq$ злічен. кількості компактів), за Th. Фубіні, $F(C\cap V)$ - міри 0.

Зробимо так $\forall p \in C\setminus C_1$ : $\exists$ відкр. $V_p \subset U$ : $p \in V_p$ і $F(C\cap V_p)$ - міри 0. Виділимо $\leq$ злічeнне підпокриття $C\setminus C_1$ $\{V_i\}$ : $F(C\setminus C_1) \subset \bigcup\limits_i F(C\cap V_i)$ - міри 0.

2. Доведемо, що $\forall k$ $F(C_k \setminus C_{k+1})$ - міри 0. Знову інд. за $m$, знову $m=0$ очевидно.

$m-1 \to m$ Отже, $\forall p \in C_k \setminus C_{k+1}$ у $p$ всі $l$-ті частин. похідні нульові, $l \leq k$ і $\exists$ $(k+1)$-ша ненульова:

$$\frac{\partial^{k+1} F^i}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{k+1}}}(p) \neq 0.$$

Не зм. загальності, вважаємо $i^1 = 1$. Позначимо

$f := \dfrac{\partial^k F^i}{\partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_{k+1}}}$. Зокрема, $f(p) = 0$ і $\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(p) \neq 0$.

(і взагалі $f(q) = 0$ $\forall q \in C_k$).

Знову покладемо $H : U \to \mathbb{R}^m : (x^1, \ldots, x^m) \mapsto (f(x^1, \ldots, x^m), x^2, \ldots, x^m)$, за побудовою, $d_p H$ невироджений тому $\exists$ відкр. $V \subset U$, $p \in V$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ : $H : V \to \tilde{V}$ - дифео-зм, і $G := F \circ H^{-1} \in C^\infty(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$.

За побудовою $H(C_k \cap V) \subset \{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}$. Як і раніше, покладемо $G_0 := G|_{\{y^1=0\} \cap \tilde{V}} \in C^\infty(\{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}, \mathbb{R}^n)$ - гладке на відкр. підмножині у $\mathbb{R}^{m-1}$. Точки з $C_k \cap V$ критичні для $F$ : $\forall q \in C_k \cap V$ $d_q F = 0$. Оскільки $H$ - дифео-зм, тоді $\forall$ $H(q) \in H(C_k \cap V)$ $d_{H(q)} G = 0$ $\Rightarrow d_{H(q)} G_0 = 0$ ($H(q) \in \{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}$ за заув. вище). Тобто $G_0(H(C_k \cap V)) = G(H(C_k \cap V)) = F(C_k \cap V)$ входить до мн. крит. значень $G_0$, що має міру 0 за прип. індукції. Тому $F(C_k \cap V)$ міри 0. Аналогічно до 1, переходячи до $\leq$ зл. підпокриття, отримуємо, що $F(C_k \setminus C_{k+1})$ -

міри 0.

3. Доведемо, що $\exists\, k$ : $F(C_k)$ - міри 0.

$\forall\, p \in C_k$ із ф-ли Тейлора випливає (для евкл. норми):

$$|F(p+h) - F(p)| \leq L\,|h|^{k+1}$$

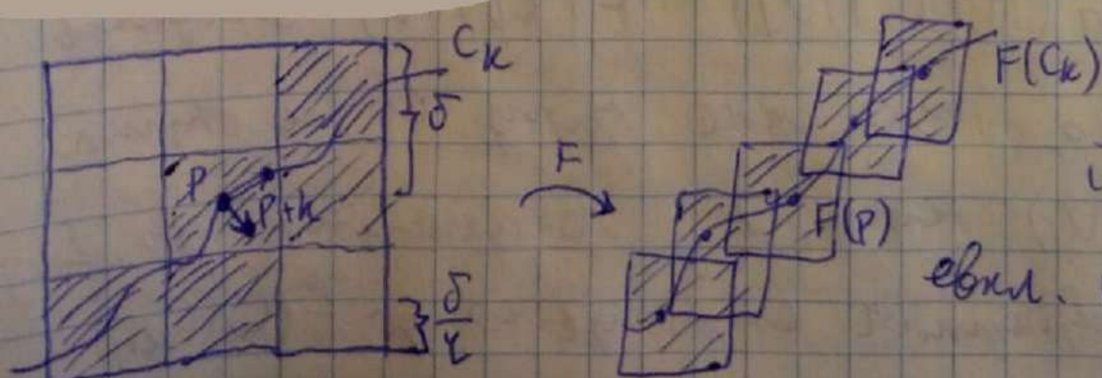
для дост. малих $h$: $|h| < \sqrt{m}\,\delta$, тобто зокрема для точок $p+h$ з куба з центром $p$ і ребром $2\delta$. $\forall\, ч \in \mathbb{N}$ покриємо $C_k$ кубіками з ребром $\frac{2\delta}{ч}$ (їх $\leq ч^m$ у вихідному кубі).

[redacted]

Тепер $|h| < \sqrt{m}\,\frac{\delta}{ч}$, і

$$|F(p+h) - F(p)| < \frac{L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}{ч^{k+1}}$$

Тобто образ кожного кубіка міститься у




кубі з центром $F(p)$

і ребром $\frac{2L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}{ч^{k+1}}$, $2L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1} =: a$

евкл. об'єму $a^n\, ч^{-n(k+1)}$.

Їх загальний об'єм $\leq a^n r^{m-n(k+1)}$. Якщо $m-n(k+1)<0$, це $\to 0$ при $r \to +\infty$. Тобто образ частини $C_k$, що міститься у кубі зі стороною $2\delta$, має міру 0. Оскільки $C_k$ можна покрити $\leq$ зліч. кількістю таких кубів, $F(C_k)$ - міри 0.

1. - 3. разом і дають, що $F(C)$ - міри 0. ▲

Rem. Для доведення Сард з $\dim M < \dim N$ і $F \in C^k(M,N)$, $k \geq 1$ достатньо лише кроку 3. вище, застосованого до $\overbrace{C = M}^{(C=U\subset\mathbb{R}^m)}$ замість $C_k$ (і формально $k=0$: у цьому випадку $m-n(k+1) = m-n < 0$ все); для цієї ф-ли Тейлора достатньо гладкості 1.

Впр. Якої гладкості достатньо для справедливості Тн Сарда у загальному випадку?

Rem. Як ми бачили, для Тн Уітні достатньо лише цього

Наведемо приклад застосування більш загального випадку <u>Th.</u> Сарда (але для многовидів з межею).

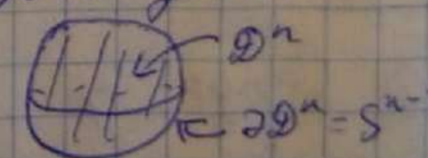
<u>def.</u> $n$-вимірним многовидом з межею ($n \in \mathbb{N}$) зветься хаусд. топ. простір $M$ з $\leq$ зліч. базою такий, що $\forall\, p \in M$

– або $\exists$ відкр. $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$

– або $\exists$ відкр. $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0\}$, і $\varphi(p) \in \{x^1 = 0\}$.

<u>Rem.</u> У другому випадку кажуть, що $p$ належить до межі $\partial M$ многовиду $M$.

Для многовидів з межею визначені поняття гл. структури, гл. відображень etc. При цьому $\partial M$ – (гладкий) $(n-1)$ – вимірний многовид.



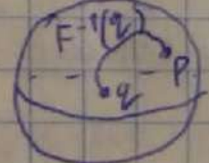

<u>Ex.</u> $\mathbb{R}^n_+$, куля $\mathcal{D}^n$ – $\infty$-гладкі мн. з межею.

<u>Th</u> (гладка теорема про барабан).

$\nexists$ гладкої ретракції $F \in C^\infty(\mathcal{D}^n, S^{n-1})$ (тобто такого $F$, що $\forall p \in S^{n-1}$ $F(p) = p$).

▷ Ідея: н/п $\exists$ таке $F$. <u>Th</u> Сарда $\Rightarrow$ $\exists$ регулярне значення $q \in S^{n-1}$ ($q \in F(\mathcal{D}^n) = S^{n-1}$, бо це ретракція).

Тоді з теореми про прообраз рег. значення, $F^{-1}(q)$ -



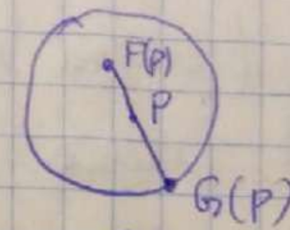

1-вимірний вкладений підмноговид з межею у $\mathcal{D}^n$ (причому його межа лежить у $\partial \mathcal{D}^n = S^{n-1}$)

Для таких мн. $\in$ аналог <u>Th</u> класифікації зв. 1-вим. многовидів (за якою зв'язні диф-мі $\mathbb{R}$ або $S^1$). Зокрема, зв. компонента $q \in F^{-1}(q)$ (криволінійний відрізок) - дуга, що з'єднує $q$ і $p \in S^{n-1}$, $p \neq q$. Але $p \in F^{-1}(q) \Rightarrow q = F(p) = p$ ↯ ◭

<u>Cor</u> (гладка теорема Брауера)

$\forall F \in C^\infty(\mathcal{D}^n, \mathcal{D}^n)$ $\exists p : F(p) = p$.

▷ Н $\forall p$ $F(p) \neq p$. Тоді можна побудувати гл. ретракцію $G \in C^\infty(\mathcal{D}^n, S^{n-1})$, провівши $\forall p$ промінь з $F(p)$ через $p$ до перетину $G(p)$ з $S^{n-1}$. ◁




<u>Rem.</u> Версії цих <u>Th.</u> нижчої гладкості (у т.ч. неперервні) можна вивести з гладких за допомогою техніки згладжування.

<u>Pr.</u> Нехай $M$ і $N$ — $k$-гл. многовиди. Сукупність підмножин вигляду

$$\left\{F \in C^k(M,N) \;\middle|\; \frac{\partial^l}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_l}} (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(K) \subset W\right\}$$

для усіх можливих пар карт $(U,\varphi)$, $(V,\psi)$, пар з компактної $K \subset \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ і відкритої $W \subset \psi(F(U \cap F^{-1}(V)))$ і частинних похідних з $l \leq k$, утворює передбазу деякої топології на $C^k(M,N)$.

▷ Див., наприклад, Рохлин, Фукс, Нач. курс топології, як і доведення теорем нижче. $\triangle$

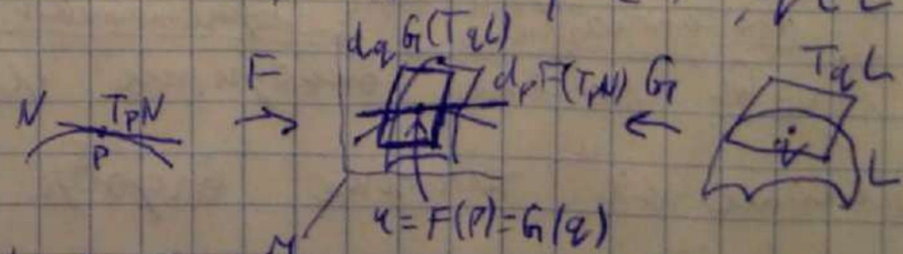
Th. (про згладжування)

Якщо $M$ і $N$ – $\ell$-гладкі і компактні мн., то $\forall\ 0 \le k \le \ell \le \infty$ $C^{\ell}(M,N)$ всюди щільна у $C^{k}(M,N)$ (з топологіями з минулого Рм., причому на $C^{\ell}$ ця топ. збігається з індукованою з $C^{k}$).

Rem Ідея полягає у використанні апроксимації $k$-гл. ф-цій поліномами за Вейєрштрассом.

def Нехай $M, N, L$ – $\infty$-гл. многовиди. Відображення $F \in C^{\infty}(N, M)$ і $G \in C^{\infty}(L, M)$ звуться трансверсальними, якщо $\forall\ p \in N,\ q \in L$ таких, що $F(p) = G(q) = r \in M$

$$T_r M = d_p F(T_p N) + d_q G(T_q L).$$




Rem Зокрема, при $\dim N + \dim L < \dim M$ ця умова означає, що таких точок немає, тобто $F(N) \cap G(L) = \varnothing$.

Наступна теорема доводиться за допомогою Th. Сарда:

Th. (про трансверсалізацію)

Нехай $F \in C^\infty(N, M)$ (зокрема, коли це підмноговид у $M$). Тоді $\forall L$ множина трансверсальних до $F$ відображень всюди щільна у $C^\infty(L, M)$ (з топологією з Pr.).

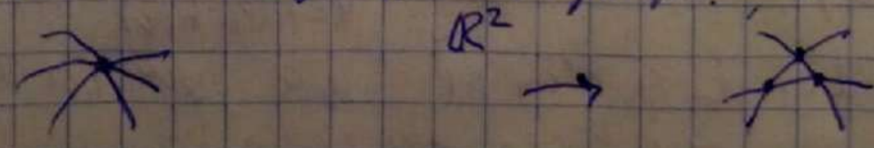
Rem. Це означає, що нетрансверсальне відображення завжди можна малою деформацією перевести у трансверс.:


є дотик

трансверс

або аналогічно з використанням Th. Сарда

Звідти можна виводити й інші результати про "загальне положення" гладких відобр., наприклад:




потрійний перетин

# Дотичне розшарування

Наступна конструкція знадобиться нам як для завершення доведення теореми Уітні, так і для подальшого вивчення гладких (під)многовидів. Нехай $M$ – $k$-гладкий многовид, де $k \geqslant 1$, $\dim M = n$.

<u>def.</u> Дотичним розшаруванням $M$ зветься

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\},$$

тобто (формальне) об'єднання дотичних просторів у всіх точках $M$.

<u>Rem.</u> Для кожної $p \in M$ існує $(U, \varphi)$ – карта $M$ така, що $p \in U$. Введемо канонічну проєкцію $\pi\colon TM \to$

$M\colon (p,v)\mapsto p$. Тоді

$$\pi^{-1}(U)=\{(p,v)\in TM \mid p\in U\}.$$

Нехай $(x^1,\dots,x^n)$ – локальні координати, що відповідають $(U,\varphi)$. Побудуємо

$$\psi\colon \pi^{-1}(U)\to\mathbb{R}^{2n}\colon$$

$$\left(p, v=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mapsto (\underbrace{x^1(p),\dots,x^n(p)}_{\varphi(p)}, v^1,\dots,v^n).$$

Це схоже на карту (зокрема, це бієкція). Що буде аналогами відображень переходу для таких ''карт''?

Отже, нехай $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $(U_\beta,\varphi_\beta)$ – карти $M$ такі, що $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $(x^1_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$, $(x^1_\beta,\dots,x^n_\beta)$ – відповідні локальні координати. Побудуємо $\psi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$ і $\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to \mathbb{R}^{2n}$ як вище.

Зауважимо, що

$$\psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

є відкритою підмножиною $\mathbb{R}^{2n}$, і аналогічно для

$$\psi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n.$$

Відображення переходу діє таким чином з $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ у $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$:

$$\psi_\beta \circ {\psi_\alpha}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) =$$

$$= \psi_\beta \left( {\varphi_\alpha}^{-1}(x^1, \dots, x^n), v^i \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} \right) =$$

Використаємо відоме нам правило перетворення координат вектора:

$$= \psi_\beta \left( {\varphi_\alpha}^{-1}(x^1, \ldots, x^n), v^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \right) =$$

$$= \left( (\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1})(x^1, \ldots, x^n), v^i \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^i}(x^1, \ldots, x^n), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, v^i \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^i}(x^1, \ldots, x^n) \right).$$

Це відображення $(k-1)$-гладке, як і повинно бути для відображень переходу. Але чи задовольняє $TM$ означення многовида?

Впр.1. Топологію на $TM$ можна ввести наступним чином. Нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – атлас $M$ (з $k$-гладкої структури). Скажемо, що $W \subset TM$ – відкрита, якщо для кожного $\alpha \in A$ $\psi_\alpha(W \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ відкрита у $\mathbb{R}^{2n}$. Простір $TM$ з такою топологією хаусдорфовий і має не більш ніж зліченну базу.

2. У позначеннях вище тоді $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – атлас, що задає на $TM$ структуру $(k-1)$-гладкого $2n$-вимірного многовида.

3. Ця структура не залежить від вибору початкового атласу $M$, а лише від гладкої структури $M$.

Ex. Існує природне ототожнення (і $\infty$-дифеоморфізм) $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, оскільки на $\mathbb{R}^n$ координати глобальні:

$$\left((x^1, \ldots, x^n), v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n).$$

Аналогічно, для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$ $TU$ ототожнюється з $U \times \mathbb{R}^n$.

Rem. Взагалі кажучи, $TM$ не гомеоморфне прямому добутку $M$ на $\mathbb{R}^n$. Це приклад більш складної топологічної конструкції – векторного розшарування. Детальніше див., наприклад, у М.М. Постников, Лекции по геометрии, семестр IV; або А.С. Мищенко, Векторные расслоения и их применения.

def. Векторним полем на $M$ зветься відображення $X\colon M \to TM$ таке, що $\pi \circ X = id_M$.

Rem. Тобто для кожної $p \in M$ $p \mapsto X_p \in T_pM$.

Rem. У локальних координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \subset M$ для кожної точки $p \in U$ розкладемо за локальним базисом: $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$; отримуємо таким чином функції $X^1, \ldots, X^n \colon U \to \mathbb{R}$. Далі у таких випадках будемо записувати $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ на $U$.

Тоді у відповідній парі карт (тобто коли ми будуємо карту $TM$ за картою $M$ як вище) локальне задання $X$ має вигляд:

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n,$$

$$X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

Точніше, тут через $X^i$ позначені композиції цих функцій з оберненим координатним відображенням відповідної карти.

Cor. Векторне поле $X$ на $k$-гладкому $M$ $l$-гладке (де $0 \leqslant l \leqslant k-1$) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких локальних координат $(x^1 \ldots, x^n)$, що задані на координатному околі $U \subset M$, якщо $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на $U$, то $X^i \in C^l(U)$ для всіх $i = \overline{1, n}$.

Rem. Позначимо через $\mathcal{X}^l(M)$ множину $l$-гладких векторних полів на $M$.

Rem. $\mathcal{X}^l(M)$ – векторний простір над $\mathbb{R}$ (нескінченновимірний) та модуль над кільцем функцій $C^l(M)$, бо можна ввести лінійні операції над полями наступним чином:

$$(\lambda X + \mu Y)_p := \lambda X_p + \mu Y_p,$$

$$(fX+gY)_p := f(p)X_p + g(p)Y_p$$

для $X, Y \in \mathcal{X}^l(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^l(M)$.

Впр. Перевірити це.

Ex. Розкладення $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ можна розуміти як рівність обмеження поля $X$ на $U$ лінійній комбінації полів $\frac{\partial}{\partial x^i}$, що локально визначені на $U$ і ставлять у відповідність точці $p \in U$ базисні вектори $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$.

def. Похідною функцій у напрямку векторного поля $X \in \mathcal{X}^l(M)$ зветься відображення

$$X \colon C^k(M) \to C^l(M) \colon f \mapsto X(f) \colon X(f)(p) := X_p(f).$$

Rem. Локально у позначеннях, що вводилися вище, якщо $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ (зокрема, це дійсно функція з $C^l(M)$). Зауважимо, що тоді $X^i = X(x^i)$ для всіх $i = \overline{1,n}$ (де, щоправда, $i$-та координатна функція $x^i$ визначена лише локально).

Впр. Поле $X$ однозначно визначається своєю дією на функції.

def. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ (де тепер $k \geqslant 2$). Їх дужкою Лі зветься $[X,Y] \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$ таке, що

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

для будь-якої функції $f \in C^k(M)$.

Rem. У локальних координатах: нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ і нехай $[X, Y] = [X, Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тоді для будь-якого $i = \overline{1, n}$:

$$[X, Y]^i = [X, Y](x^i) = X(Y(x^i)) - Y(X(x^i)) =$$

$$= X(Y^i) - Y(X^i) = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

З цього, зокрема, можна вивести коректність означення $[X, Y]$ і його гладкість.

Ex. Для (локально визначених) базисних полів з попередньої формули маємо $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$.

Pr. (властивості дужки Лі). Для будь-яких $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k(M)$:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисиметричність, зокрема, маємо $[X, X] = 0$);

2. $[X+Y, Z] = [X, Z]+[Y, Z]$; $[X, Y+Z] = [X, Y]+[X, Z]$;

3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ (зокрема, $[\lambda X, \mu Y] = \lambda\mu[X, Y]$, тому маємо білінійність над $\mathbb{R}$);

4. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тотожність Якобі, тут $k \geqslant 3$).

► Впр. ◄

Rem. Розглянемо $m$-лінійні форми на $T_pM$, $p \in M$, тобто відображення $\alpha\colon \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{m} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu w_i, v_{i+1}, \ldots, v_m) =$$

$$= \lambda\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + \mu\alpha(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_m)$$

для будь-яких $i = \overline{1, m}$, $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_m \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Вони утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$. Позначимо його через $T_pM^m$ (зокрема, $T_pM^1 = T_pM^*$ – спряжений простір лінійних функціоналів на $T_pM$).

Впр. Побудувати на $TM^m := \bigcup\limits_{p \in M} T_pM^m$ структуру $(k-1)$-гладкого многовиду аналогічно до $TM$. Якою є його вимірність?

Rem. Це ще один приклад векторного розшарування! Воно інколи називається розшаруванням $m$-форм на $M$.

def. $m$-формою на $M$ зветься $\alpha\colon M \to TM^m$ таке, що $\pi \circ \alpha = id_M$ (де канонічна проєкція $\pi\colon TM^m \to M$ визначається як для $TM$).

Rem. Тобто кожна $p \in M$ відображається у $\alpha_p \in T_pM^m$. Локально для координат $(x^1, \dots, x^n)$ на $U$ позначимо для кожної $p \in U$

$$\alpha_{i_1 \dots i_m}(p) := \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \right) \in \mathbb{R}$$

для будь-яких $i_1, \dots, i_m = \overline{1, n}$. Отримаємо тоді набір функцій

$$\left\{ \alpha_{i_1 \dots i_m}\colon U \to \mathbb{R} \right\}_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n}.$$

Впр. $m$-форма $\alpha$ – $l$-гладка (як відображення $M \to TM^m$) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких локальних координат, що задані на околі $U$, відповідні коефіцієнти $\alpha_{i_1 \dots i_m} \in C^l(U)$ для будь-яких $i_1, \dots, i_m = \overline{1, n}$ (тут знову $0 \leqslant l \leqslant k-1$).

Rem. В силу полілінійності, якщо $v_1, \dots, v_m \in T_pM$ і для кожного $i = \overline{1, m}$ $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, то

$$\alpha_p(v_1, \dots, v_m) = \alpha_p\left(v_1^{i_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, v_m^{i_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_m}}\right) =$$

$$= v_1^{i_1} \dots v_m^{i_m} \alpha_{i_1 \dots i_m}(p).$$

Rem. $l$-гладкі $m$-форми утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^l(M)$ аналогічно полям (Впр.).

Rem. Кожна $l$-гладка $m$-форма $\alpha$ на $M$ визначає $m$-лінійне (відносно множення на функції з $C^l(M)$) відображення

$$\alpha\colon \underbrace{\mathcal{X}^l(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^l(M)}_{m} \to C^l(M)\colon$$

$$\alpha(X_1, \ldots, X_m)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_m)_p).$$

Полілінійність тут випливає з відповідної властивості форм у точках.

Впр. Це відображення однозначно визначає $\alpha$.

Rem. У локальних координатах: нехай $X_i = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ для $i = \overline{1, m}$ і $\{\alpha_{i_1 \ldots i_m}\}$ – коефіцієнти $\alpha$. Тоді з виразу вище для кожної точки випливає

$$\alpha(X_1, \ldots, X_m) = X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m} \alpha_{i_1 \ldots i_m}.$$

Зокрема, це дійсно $l$-гладка функція.

<u>Ex.1.</u> Диференціал функції: згадаємо, що для $f \in C^l(M)$ (тут $1 \leqslant l \leqslant k$) і для кожної $p \in M$ $d_pf\colon T_pM \to \mathbb{R}$ – лінійне, тобто $d_pf \in T_pM^* = T_pM^1$. Визначимо $df\colon p \mapsto d_pf$. Очевидно, це 1-форма. Локально: $d_pf(v) = v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, тобто коефіцієнти $(d_pf)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Інакше кажучи, $d_pf = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) d_px^i$, де $d_px^i$ – диференціали координатних функцій: $d_px^i(v) = v(x^i) = v^i$. Тоді на координатному околі $U$: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Зокрема, $df$ – $(l-1)$-гладка.

2.Ріманова метрика: 2-форма $g$ на $M$ (скажімо, максимальної гладкості $k-1$), яка

– симетрична: $g(X,Y) = g(Y,X)$ для будь-яких $X, Y$ (що еквівалентне $g_{ij} = g_{ji}$ для будь-яких $i, j$);

– додатно визначена: $g_p(v,v) > 0$ для всіх $p \in M$ і $0 \neq v \in T_pM$.

Інакше кажучи, $g_p$ – скалярний добуток на $T_pM$ для кожної $p \in M$.

Впр. Як змінюються коефіцієнти $m$-форми при заміні координат?