Задача 1. Розглянемо параметрично задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$ і точку P на цій кривій. Знайдіть вектори базису Френе в довільній точці кривої γ. Запишіть рівняння дотичної та нормальної прямих кривої γ в точці P:

0) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt \end{cases}$, $t \in (-\infty,+\infty)$, $P(t=t_0)$

1) $\begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}$, $t \in (-\infty,+\infty)$, $P(t=0)$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}$, $t \in (-\infty,+\infty)$, $P(t=\ln 2)$

3) $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t+\tanh t) \end{cases}$, $t \in (-\infty,+\infty)$, $P(t=t_0)$

Задача 2.1. Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = t\cos t \\ x^2 = t\sin t\,, \;\; t \in (-\infty,+\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої γ в точці $t=\pi$.

Задача 2.2. Розглянемо гвинтову лінію γ в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t\,, \;\; t \in (-\infty,+\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Доведіть (або спростуйте), що усі головні нормалі гвинтової лінії перетинають координатну вісь x^3.

***Задача 3.**

1) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$ проходять через фіксовану точку O, то крива γ є прямою.

2) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$ є паралельними деякій фіксованій прямій, то крива γ є прямою.

3) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі нормальні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^2$ проходять через фіксовану точку, то крива γ є колом.

***Задача 4.**

Нехай γ – це пряма, P – довільна її точка. Чи існує щільнодотична площина кривої γ в точці P? Якщо існує, то наскільки багато різноманітних щільнодотичних площина має крива γ в точці P?

* – ускладнені задачі, за бажанням