Питання 0.1.

1.1. Припустимо, що регулярна крива параметризована натуральним параметром t. Якщо уявляти параметрично задану криву як траєкторію точки, що рухається, чому дорівнює абсолютне значення швидкості, з якою рухається точка?

Розв'язання: $\left|\dfrac{d\vec{f}}{dt}\right| \equiv 1$

1.2. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P, скільки існує різних дотичних прямих кривої γ в точці P?

Відповідь: Одна дотична пряма в точці P.

1.3. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P, скільки існує різних щільнодотичних площин кривої γ в точці P?

Відповідь: Якщо $[\dfrac{d\vec{f}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$ в точці P, то щільнодотична площина в точці P одна.

1.4. Якщо на регулярній кривій взяти довільну точку P і побудувати дотичну пряму в цій точці, чому дорівнює кут між кривою і її дотичною прямою в точці P?

Відповідь: Кут дорівнює 0.

Задача 0.2.1. Розглянемо наступні параметрично задані криві:

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty), \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} x^1 = A\cosh t \\ x^2 = B\sinh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty),$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Розв'язання. Перепозначимо параметр на кривій γ_2 так, щоб на кожній кривій було окреме позначенням параметру

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty), \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} x^1 = A\cosh \sigma \\ x^2 = B\sinh \sigma \end{cases}, \ \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

Точка перетину знаходиться з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\cos t = A\cosh \sigma \\ b\sin t = B\sinh \sigma \end{cases}$$

2.1 $\begin{cases} a\cos t = A \operatorname{ch}\sigma \\ b \sin t = B \operatorname{sh}\sigma \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{A}{a}\operatorname{ch}\sigma\right)^2 + \left(\frac{B}{b}\operatorname{sh}\sigma\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

При учёте $\operatorname{ch}^2\sigma - \operatorname{sh}^2\sigma = 1$: $\frac{A^2}{a^2}\operatorname{ch}^2\sigma + \frac{B^2}{b^2}(\operatorname{ch}^2\sigma - 1) = 1.$

$$\left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2}\right)\operatorname{ch}^2\sigma = 1 + \frac{B^2}{b^2} \Rightarrow \operatorname{ch}\sigma = \frac{\sqrt{1+\frac{B^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}}}.$$

$$\operatorname{sh} \sigma = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2\sigma - 1} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{A^2}{a^2}}{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}}}$$

$$\cos t = \frac{A}{a}\operatorname{ch}\sigma = \sqrt{\frac{A^2}{a^2}\,\frac{1+\frac{B^2}{b^2}}{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}}} = \sqrt{\frac{A^2\left(b^2+B^2\right)}{A^2b^2+a^2B^2}} = \sqrt{\frac{\frac{b^2}{B^2}+1}{\frac{b^2}{B^2}+\frac{a^2}{A^2}}}$$

$$\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\sqrt{\frac{\frac{a^2}{A^2}-1}{\frac{b^2}{B^2}+\frac{a^2}{A^2}}}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} \cosh\sigma = \sqrt{1+\frac{B^2}{b^2}} / \sqrt{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}} \\ \sinh\sigma = \pm\sqrt{1-\frac{A^2}{a^2}} / \sqrt{\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \sqrt{1+\frac{b^2}{B^2}} / \sqrt{\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}} \\ \sin t = \pm\sqrt{\frac{a^2}{A^2}-1} / \sqrt{\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}} \end{cases}$$

Запишемо радіус-вектори кривих:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}(\sigma) = \begin{pmatrix} A\cosh\sigma \\ B\sinh\sigma \end{pmatrix}$$

Обчислимо дотичні вектори:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{w}}{d\sigma} = \begin{pmatrix} A\sinh\sigma \\ B\cosh\sigma \end{pmatrix}$$

Умова ортогональності перетину кривих:

$$< \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d\vec{w}}{d\sigma} >= 0$$

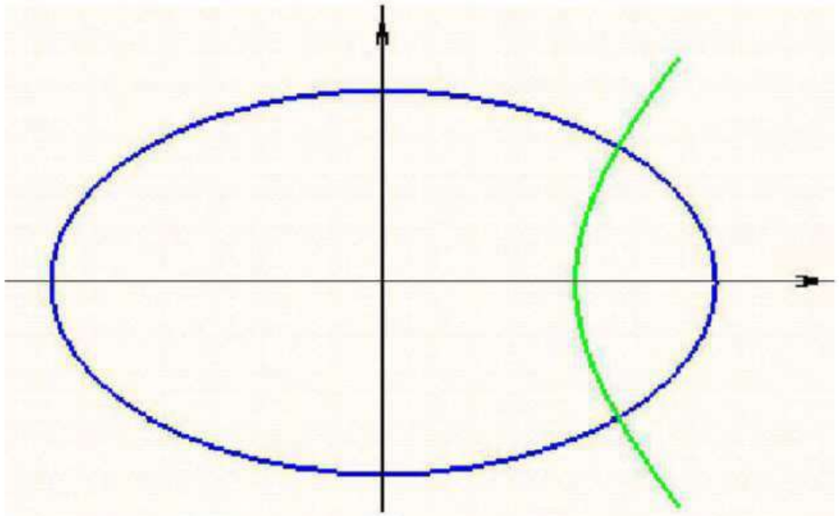
$$-a\sin t \; A\sinh\sigma \; + b\cos t \; B\cosh\sigma \; = 0$$

Підставляємо розв'язок в умову ортогональності:

$$-a\sqrt{\frac{a^2}{A^2}-1}\,A\sqrt{1-\frac{A^2}{a^2}}\;+b\,\sqrt{1+\frac{b^2}{B^2}}\;B\sqrt{1+\frac{B^2}{b^2}}\;=0$$

$$a^2 - A^2 = b^2 + B^2$$

Відповідь: $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$



Задача 0.2.2. Розглянемо наступні неявно задані криві:

$$\gamma_1\colon\ \frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1=0, \qquad \gamma_2\colon\ \frac{(x^1)^2}{A^2}-\frac{(x^2)^2}{B^2}-1=0,$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Розв'язання. Точка перетину знаходиться з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^1)^2}{a^2}+\dfrac{(x^2)^2}{b^2}-1=0 \\ \dfrac{(x^1)^2}{A^2}-\dfrac{(x^2)^2}{B^2}-1=0 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} x^1=\pm\, aA\sqrt{b^2+B^2}\,/\sqrt{A^2b^2+B^2a^2} \\ x^2=\pm\, bB\sqrt{a^2-A^2}\,/\sqrt{A^2b^2+B^2a^2} \end{cases}$$

Запишемо відповідні функції:

$$\Phi(x^1,x^2)=\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-1, \qquad \Psi(x^1,x^2)=\frac{(x^1)^2}{A^2}-\frac{(x^2)^2}{B^2}-1$$

Обчислимо їх градієнти:

$$\nabla\Phi = \left(2\frac{x^1}{a^2}, 2\frac{x^2}{b^2}\right), \qquad \nabla\Psi = \left(2\frac{x^1}{A^2}, -2\frac{x^2}{B^2}\right)$$

Умова ортогональності перетину кривих:

$$<\nabla\Phi, \nabla\Psi>=0$$

$$\frac{(x^1)^2}{a^2A^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2B^2}=0$$

Підставляємо розв'язок в умову ортогональності:

$$\frac{a^2A^2(b^2+B^2)}{a^2A^2(A^2b^2+B^2a^2)}-\frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{b^2B^2(A^2b^2+B^2a^2)}=0$$

$$a^2-A^2=b^2+B^2$$

Відповідь: $a^2=b^2+A^2+B^2$

Задача 0.2.3. Розглянемо наступну параметрично задану криву γ:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \rho(t)\cos t \\ x^2 = \rho(t)\sin t \end{cases}, \ t \in (a,b),$$

де $\rho(t)$ – деяка неперервно диференційована функція.

За яких умов на функцію $\rho(t)$ задана крива γ буде регулярною?

Підберіть функцію $\rho(t)$ так, щоб задана крива γ перетиналась з будь-яким променем, що виходить з початку координат O, під одним і тим же кутом α.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos t \\ \rho(t)\sin t \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є неперервно диференційовною.

Обчислимо похідну:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \rho'\cos t - \rho\sin t \\ \rho'\sin t + \rho\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(\rho)^2 + (\rho')^2}$$

Значить, задана крива є регулярною тоді, і тільки тоді, коли

$$(\rho)^2 + (\rho')^2 \neq 0$$

Для довільної точки *P(t)* кривої γ задамо промінь *OP* як параметрично задану криву:

$$\gamma_2 : \begin{cases} x^1 = \sigma\rho(t)\cos t \\ x^2 = \sigma\rho(t)\sin t \end{cases}, \ \sigma \in (0, +\infty),$$

точці *P* на промені γ_2 відповідає значення $\sigma = 1$.

Запишемо радіус-вектор променя:

$$\vec{w}(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma\rho(t)\cos t \\ \sigma\rho(t)\sin t \end{pmatrix}$$

Обчислимо похідну:

$$\frac{d\vec{w}}{d\sigma}=\begin{pmatrix}\rho(t)\cos t\\ \rho(t)\sin t\end{pmatrix}$$

В точці P , тобто при $\sigma=1$, дотичний вектор променя:

$$\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(1)=\begin{pmatrix}\rho(t)\cos t\\ \rho(t)\sin t\end{pmatrix}$$

Обчислимо відповідні скалярні добутки:

$$<\frac{d\vec{f}}{dt}(t),\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(1)>=\rho\rho'$$

$$|\frac{d\vec{f}}{dt}(t)|^2=<\frac{d\vec{f}}{dt}(t),\frac{d\vec{f}}{dt}(t)>=(\rho)^2+(\rho')^2$$

$$|\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(1)|^2=<\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(1),\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(1)>=\rho^2$$

Запишемо умову, що кут між кривими є сталим і дорівнює α:

$$\cos\alpha\equiv\frac{\rho\rho'}{|\rho|\cdot\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}}$$

Вважаємо, що $\rho(t)>0$.

Отримуємо диференціальне рівняння для знаходження функції $\rho(t)$:

$$\rho' \cdot \sin\alpha = \pm\rho \cdot \cos\alpha$$

При $\alpha=0$ розв'язку немає.

При $\alpha\neq 0$ маємо рівняння

$$\rho' = \pm\rho \cdot ctg\alpha$$

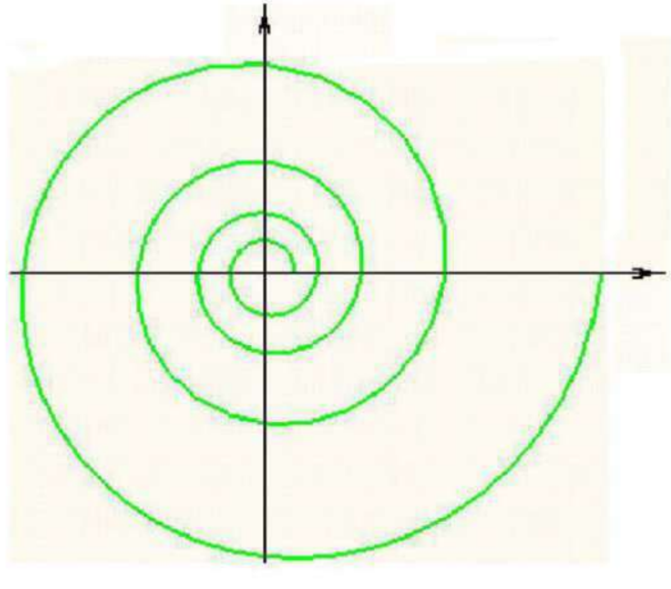
Розв'язок:

$$\rho = C \cdot e^{\pm t \cdot ctg\alpha}$$

Довільна ненульова константна C відповідає гомотетії (можливо – з центральною симетрією) на площині. Вибір знаку відповідає заміні орієнтації $t \to -t$ на кривій

Відповідь:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = C \cdot e^{\pm t \cdot ctg\alpha} \cdot \cos t \\ x^2 = C \cdot e^{\pm t \cdot ctg\alpha} \cdot \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$



При $\alpha \neq \pi/2$ – логарифмічна спіраль

При $\alpha = \pi/2$ – коло

* **Задача 0.3.3.** Доведіть (або спростуйте), що якщо у регулярної (класу C^2) кривої γ в $\mathbb{R}^3$ усі щільнодотичні площини паралельні фіксованій площині П, то тоді уся крива γ належить якійсь площині, паралельній площині П.

Ідея розв'язання.

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = a(t)\vec{X} + b(t)\vec{Y}$$

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = c(t)\vec{X} + d(t)\vec{Y}$$

Інтегруємо тотожність $\frac{d\vec{f}}{dt} = a(t)\vec{X} + b(t)\vec{Y}$

Отримуємо

$$\vec{f}(t) = A(t)\vec{X} + B(t)\vec{Y} + \vec{f}_0$$

де

$$A(t) = \int a(t)dt\,,\ B(t) = \int b(t)dt$$

Задача 5.5. Потрібно перевірити, що якщо усі щільнодотичні площини деякої кривої проходять через деяку точку M, то ця крива пласка. Це, нагадаємо, означає, що образ відповідної вектор-функції $r = (x, y, z)$ лежить у деякій площині. Перш за все, паралельно перенесемо криву так, що M перейде у початок координат. Паралельно перенесена крива задовольняє тій же умові на щільнодотичні площини і пласка тоді й тільки тоді, коли вихідна крива пласка. Тому можна без обмеження загальності вважати, що M – початок координат. Із загального рівняння у розв'язку задачі 5.10 тоді маємо в усіх точках кривої

$$[r', r'']^1 (0 - x_0) + [r', r'']^2 (0 - y_0) + [r', r'']^3 (0 - z_0) = 0.$$

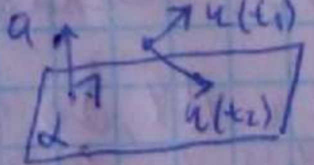
Згадаємо, що тут (x_0, y_0, z_0) – координати точки кривої, тобто вектора r. Таким чином, маємо умову

$$(r, r', r'') = -\langle [r', r''], r \rangle = 0.$$

Тоді потрібне твердження випливає з задачі 1.6. Дійсно, згідно з результатом цієї задачі, образ r лежить у деякій площині, що проходить через початок координат. У загальному випадку потрібна площина проходитиме через точку M (щоб це показати, треба зробити обернене паралельне перенесення).

- Показати, що $r \parallel$ фіксованій площині $\alpha \Leftrightarrow (r, r', r'') = 0$.

$\Rightarrow$



Нехай a – в. нормалі α.

Тоді з умови $\langle r, a \rangle = 0$. Диференціюємо:

$$0 = \langle r, a \rangle' = \langle r', a \rangle + \langle r, a' \rangle = \left[\underset{a' = 0}{a - \text{постійний},}\right] = \langle r', a \rangle$$

$$0 = \langle r', a \rangle' = \langle r'', a \rangle + \langle r', a' \rangle = \langle r'', a \rangle.$$

Тобто $r, r', r'' \perp a \Rightarrow r, r', r''$ компланарні $\Rightarrow (r, r', r'') = 0$.

$\Leftarrow$. Доведемо при $[r, r'] \neq 0$ (зокрема, $r, r' \neq 0$).

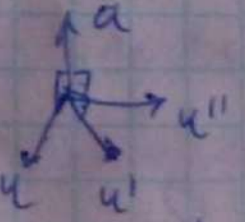
Покладемо $a := \dfrac{[r, r']}{|[r, r']|}$. Тоді $|a| = 1$, $a \perp r$, $a \perp r'$.

$|a| = 1 \Rightarrow \langle a, a' \rangle = 0.$

$\langle r, a \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle r, a \rangle' = \langle r', a \rangle + \langle r, a' \rangle = \langle r, a' \rangle.$

$\langle r', a \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle r', a \rangle' = \langle r'', a \rangle + \langle r', a' \rangle =$

За умовою $(r, r', r'') = 0 \Rightarrow r, r', r''$ компланарні $\Rightarrow r'' \perp a.$



Тому $= \langle r', a' \rangle.$

Т.ч. $a' \perp a, r, r'$. Але $\{a, r, r'\}$ утворюють базис: $r \nparallel r'$, $a \perp r$, $a \perp r'$. Тому $a' = 0 \Rightarrow a \equiv const$. Покладемо α – з в. нормалі a (і проходить через 0) – постійна і $\parallel r$, бо $\langle r, a \rangle = 0$.

1. Базис Френе плоскої кривої

Задача 1.1. Розглянемо коло γ в площині $I\!R^2$, задане параметрично

$$\begin{cases} x^1 = c^1 + r\cos t \\ x^2 = c^2 + r\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння дотичної та нормальної прямих кривої γ в точці $t = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}$$

Знаходимо похідну:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

Оскільки $\vec{f} \in C^1$ і $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

Запишемо дотичний та нормальний вектори:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -\dfrac{df^2}{dt} \\ \dfrac{df^1}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix}$$

Знайдемо одиничні (нормовані) дотичний та нормальний вектори:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Знайдені вектори $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ в кожній точці на кривій γ (при кожному значенні t) утворюють ортонормований додатно орієнтований базис в площині $\mathbb{R}^2$:

$$<\vec{\tau},\vec{\tau}> \equiv 1 \, , \; <\vec{\tau},\vec{n}> \equiv 0 \, , \; <\vec{n},\vec{n}> \equiv 1 \, ,$$

$$\begin{vmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Для конкретної точки P, що відповідає значенню $t=\frac{\pi}{6}$, маємо

$$\vec{f}(\frac{\pi}{\,}) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos\frac{\pi}{6} \\ c^2 + r\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 + r\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c^2 + r\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -r\sin\frac{\pi}{6} \\ r\cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\frac{1}{2} \\ r\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -r\cos\frac{\pi}{6} \\ -r\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -r\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Рівняння дотичної прямої: проходить через точку P, напрямний вектор $\vec{T}$

$$\frac{x^1 - (c^1 + r\frac{\sqrt{3}}{2})}{-r\frac{1}{2}} = \frac{x^2 - (c^2 + r\frac{1}{2})}{r\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Рівняння нормальної прямої: проходить через точку P, напрямний вектор $\vec{N}$

$$\frac{x^1 - (c^1 + r\frac{\sqrt{3}}{2})}{-r\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - (c^2 + r\frac{1}{2})}{-r\frac{1}{2}}$$

Відповідь: Базис Френе

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Дотична пряма в точці P:

$$\frac{x^1 - (c^1 + r\frac{\sqrt{3}}{2})}{-1} = \frac{x^2 - (c^2 + r\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$$

Нормальна пряма в точці P:

$$\frac{x^1 - (c^1 + r\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{3}} = \frac{x^2 - (c^2 + r\frac{1}{2})}{1}$$

2. Триградник Френе кривої в $I\!R^3$

Задача 2. Розглянемо гвинтову лінію γ в $I\!R^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \quad , \ t \in (-\infty, +\infty) \\ \quad x^3 = ht \end{cases}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння елементів триградника Френе кривої γ в точці $t=\dfrac{2\pi}{3}$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

Знаходимо першу та другу похідні:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\vec{f} \in C^1$ і $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

Також, маємо:

$$[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{pmatrix} hr\sin t \\ -hr\cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

Значить, в кожній точці на кривій однозначно визначається тригранник Френе.

Записуємо базисні вектори:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{pmatrix} hr\sin t \\ -hr\cos t \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}] = \begin{pmatrix} -r(r^2+h^2)\cos t \\ -r(r^2+h^2)\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо одиничні базисні вектори:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\\ h\end{pmatrix},\quad \vec{\nu}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=\begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix}h\sin t\\ -h\cos t\\ r\end{pmatrix}$$

В конкретній точці P, що відповідає значенню $t=\dfrac{2\pi}{3}$, маємо:

$$\vec{f}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}r\cos\frac{2\pi}{3}\\ r\sin\frac{2\pi}{3}\\ h\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\frac{1}{2}\\ r\frac{\sqrt{3}}{2}\\ h\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix}-r\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -r\frac{1}{2}\\ h\end{pmatrix},\quad \vec{\nu}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix}h\frac{\sqrt{3}}{2}\\ h\frac{1}{2}\\ r\end{pmatrix}$$

Дотична пряма – проходить через точку P в напрямку вектора $\vec{\tau}$:

$$\frac{x^1 + \frac{1}{2}r}{-r\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r}{-r\frac{1}{2}} = \frac{x^3 - \frac{2\pi}{3}h}{h}$$

Головна нормаль – проходить через точку P в напрямку вектора $\vec{\nu}$:

$$\frac{x^1 + \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^3 - \frac{2\pi}{3}h}{0}$$

Бінормаль – проходить через точку P в напрямку вектора $\vec{\beta}$:

$$\frac{x^1 + \frac{1}{2}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}h} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{1}{2}h} = \frac{x^3 - \frac{2\pi}{3}h}{r}$$

Нормальна площина – проходить через точку P, нормаль $\vec{\tau}$:

$$-r\frac{\sqrt{3}}{2}(x^1+\frac{1}{2}r)-r\frac{1}{2}(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r)+h(x^3-\frac{2\pi}{3}h)=0$$

Спрямна площина – проходить через точку P, нормаль $\vec{\nu}$:

$$\frac{1}{2}(x^1+\frac{1}{2}r)-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r)+0(x^3-\frac{2\pi}{3}h)=0$$

Щільнодотична площина – проходить через точку P, нормаль $\vec{\beta}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}h(x^1+\frac{1}{2}r)+\frac{1}{2}h(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r)+r(x^3-\frac{2\pi}{3}h)=0$$

Рівняння прямих і площин, за бажанням, можна спростити…

Задача 5.10. Для просторової кривої

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$$

(гвинтової лінії) знайдемо репер Френе, а також усі ребра та грані тригранника Френе. Позначимо вектор-функцію, що задає криву, через r:

$$r = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt).$$

Згадаємо, що напрямним вектором дотичної в кожній точці кривої є похідний вектор

$$r' = (x', y', z') = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Якщо бути точним, це теж не вектор, а вектор-функція, або, ще коректніше, векторне поле у тривимірному просторі, що задане уздовж нашої кривої, але для простоти ми будемо усі такі об'єкти звати векторами. Він має довжину

$$|r'| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Тоді одиничний дотичний вектор утворюється нормуванням з r', тобто має вигляд

$$\tau = \frac{r'}{|r'|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Знайдемо тепер другу похідну вектор-функції r:

$$r'' = (x'', y'', z'') = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0).$$

Векторний добуток першої та другої похідної дорівнює

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2),$$

де через $\{i, j, k\}$ традиційно позначено стандартний додатно орієнтований ортонормований репер тривимірного евклідового простору: $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$. Довжина цього вектора дорівнює

$$|[r', r'']| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (-ab\cos t)^2 + (a^2)^2} = |a|\sqrt{a^2+b^2}.$$

Далі, не обмежуючи загальність, вважатимемо $a > 0$. (Одиничним) вектором бінормалі кривої буде нормований вектор $[r', r'']$:

$$\beta = \frac{[r', r'']}{|[r', r'']|} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}(ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t,\ -b\cos t,\ a).$$

Неважко безпосередньо пересвідчитися у тому, що він ортогональний τ. Нарешті, ще одним вектором репера Френе буде (одиничний) вектор головної нормалі ν. Його простіше за все знайти з умови ортонормованості та додатної орієнтованості усього репера Френе $\{\tau, \nu, \beta\}$. За означенням векторного добутку, тоді

$$\nu = [\beta, \tau] = \frac{1}{(\sqrt{a^2+b^2})^2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(-(a^2+b^2)\cos t,\ -(a^2+b^2)\sin t,\ 0) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0).$$

Отже, ми знайшли репер Френе.

Перейдемо до знаходження елементів тригранника Френе. Перше з його ребер нам добре відоме – це дотична пряма. У якості її напрямного вектора можна брати як r', так і нормований вектор τ. Із загального рівняння

$$\frac{x-x_0}{x'} = \frac{y-y_0}{y'} = \frac{z-z_0}{z'}$$

(де (x_0, y_0, z_0) – координати точки кривої, у якій ми будуємо тригранник, тобто тієї, що відповідає параметру t) у нашому випадку отримуємо

$$\frac{x-a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y-a\sin t}{a\cos t} = \frac{z-bt}{b}.$$

Наступне ребро – це головна нормаль. Її напрямним вектором є вектор головної нормалі ν, тобто рівняння у загальному випадку має вигляд

$$\frac{x-x_0}{\nu^1} = \frac{y-y_0}{\nu^2} = \frac{z-z_0}{\nu^3}.$$

У нас це буде

$$\frac{x-a\cos t}{\cos t} = \frac{y-a\sin t}{\sin t} = \frac{z-bt}{0}.$$

В задачі також потрібно перевірити, що ця пряма перетинає вісь гвинтової лінії (тобто вісь Oz) під прямим кутом. Перш за все, спробуємо знайти точку перетину вигляду $(0, 0, z)$:

$$\frac{-a\cos t}{\cos t} = \frac{-a\sin t}{\sin t} = \frac{z-bt}{0}.$$

Ця система сумісна і має розв'язок $z = bt$, тобто прямі дійсно перетинаються. Їхні напрямні вектори $(\cos t, \sin t, 0)$ і $(0, 0, 1)$, очевидно, ортогональні, тож і прямі ортогональні.

Нарешті, третє ребро тригранника Френе – це бінормаль з напрямним вектором бінормалі β. Звичайно, замість нього можна взяти вектор $[r', r'']$ або будь-який пропорційний:

$$\frac{x-x_0}{[r', r'']^1} = \frac{y-y_0}{[r', r'']^2} = \frac{z-z_0}{[r', r'']^3}.$$

Для нашої кривої після скорочення на ненульовий множник a маємо:

$$\frac{x-a\cos t}{b\sin t} = \frac{y-a\sin t}{-b\cos t} = \frac{z-bt}{a}.$$

В умові задачі стверджується, що ці прямі утворюють з віссю Oz гвинтової лінії постійний кут. Дійсно, косинус кута між їхніми напрямними векторами $u = (b\sin t, -b\cos t, a)$ і $v = (0, 0, 1)$ дорівнює постійному числу

$$\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Грані тригранника Френе – це площини, кожна з яких містить два ребра і ортогональна третьому. Першу з них ми вже знаємо – це нормальна площина, вона ортогональна дотичній, отже її вектор нормалі – дотичний вектор. Таким чином, рівняння у загальному випадку має вигляд

$$x'(x-x_0) + y'(y-y_0) + z'(z-z_0) = 0,$$

а в нашому –

$$-a\sin t(x - a\cos t) + a\cos t(y - a\sin t) + b(z - bt) = 0.$$

Розкриємо дужки та приведемо подібні:

$$-a\sin t\, x + a\cos t\, y + b\, z - b^2 t = 0.$$

Ортогональною до головної нормалі є спрямна площина. Таким чином, її рівняння має загальний вигляд

$$\nu^1 (x - x_0) + \nu^2 (y - y_0) + \nu^3 (z - z_0) = 0.$$

Для нашого випадку також можна зробити деякі спрощення:

$$\cos t(x - a\cos t) + \sin t(y - a\sin t) = 0,$$

$$\cos t\, x + \sin t\, y - a = 0.$$

Щільнодотична площина ортогональна до бінормалі, тому загальний вигляд її рівняння повинен бути таким:

$$[r', r'']^1 (x - x_0) + [r', r'']^2 (y - y_0) + [r', r'']^3 (z - z_0) = 0.$$

Для гвинтової лінії, спрощуючи, отримуємо

$$b\sin t(x - a\cos t) - b\cos t(y - a\sin t) + a(z - bt) = 0,$$

$$b\sin t\, x - b\cos t\, y + a\, z - abt = 0.$$

3. Як виглядає базис Френе в натуральній параметризації ?

В довільній параметризації, якщо регулярна крива γ в $\mathbb{R}^3$ задана параметрично радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \ ,$$

то вектори базису Френе обчислюються наступним чином

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt} \ , \quad \vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \ , \quad \vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}] \ ,$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} \ , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \ , \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

за умови $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$.

Якщо параметр t є *натуральним* параметром, позначимо $s=t$, то

$$\left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right| \equiv 1\,,$$

тобто,

$$<\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d\vec{f}}{ds}> \equiv 1$$

Продиференціюємо:

$$<\frac{d^2\vec{f}}{ds^2},\frac{d\vec{f}}{ds}> + <\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}> \equiv 0,$$

тобто,

$$<\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}> \equiv 0$$

Далі, маємо

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right]\right|^2 = \left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right|^2 \left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right|^2 - <\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}>^2 = \left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right|^2$$

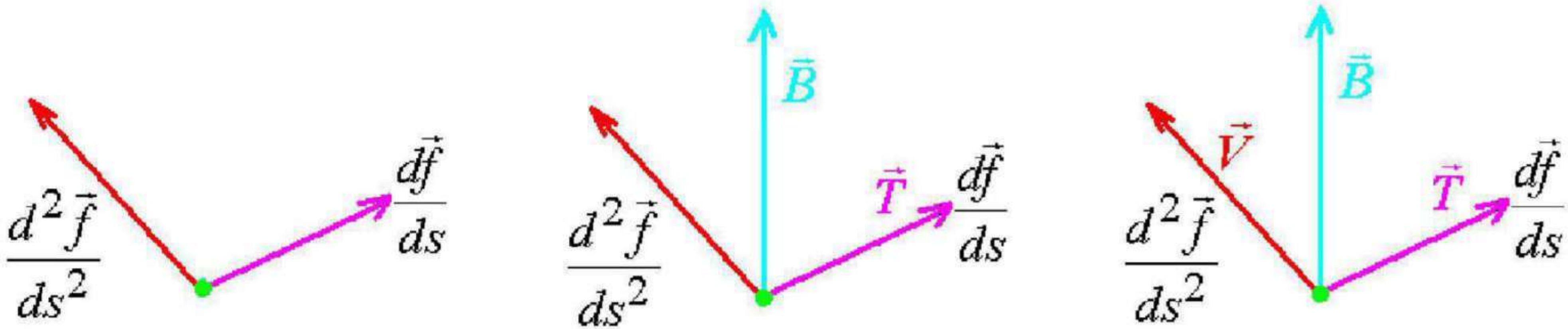
Для базиса Френе отримуємо:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}], \quad \vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}] = [[\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}], \frac{d\vec{f}}{ds}] = \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|} \cdot [\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}], \quad \vec{\nu} = \frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$$

Таким чином, в натуральній параметризації маємо:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \vec{\nu} = \frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|} \cdot [\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}] = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$



4. Загальні властивості базису Френе

Задача 4.1. Довести, що при зміні орієнтації на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\beta}$ змінюють напрям на протилежний, а вектор $\vec{\nu}$ не змінюється:

$$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} \;\rightarrow\; -\vec{\tau}, \vec{\nu}, -\vec{\beta}$$

Розв'язання. Параметризуємо криву γ натуральним параметром s. Тоді маємо:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \vec{\nu} = \frac{1}{\left|\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right|} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \quad \vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$

Змінимо орієнтацію, перейшовши до параметру $s^* = -s$.

Оскільки

$$\frac{d\vec{f}}{ds^*} = \frac{d\vec{f}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = -\frac{d\vec{f}}{ds}, \quad \left|\frac{d\vec{f}}{ds^*}\right| = \left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right| \equiv 1,$$

параметр s^* є натуральним.

Запишемо вектори базису Френе в новій параметризації:

$$\vec{\tau}^{\,*}=\frac{d\vec{f}}{ds^{*}}\,,\qquad \vec{\nu}^{\,*}=\frac{1}{\left|\dfrac{d^{2}\vec{f}}{ds^{*2}}\right|}\cdot\frac{d^{2}\vec{f}}{ds^{*2}}\,,\qquad \vec{\beta}^{*}=[\vec{\tau}^{\,*},\vec{\nu}^{\,*}]$$

Підставляючи

$$\frac{d\vec{f}}{ds^{*}}=\frac{d\vec{f}}{ds}\frac{ds}{ds^{*}}=-\frac{d\vec{f}}{ds}\,,\qquad \frac{d^{2}\vec{f}}{ds^{*2}}=\frac{d}{ds^{*}}\left(-\frac{d\vec{f}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(-\frac{d\vec{f}}{ds}\right)\frac{ds}{ds^{*}}=\frac{d^{2}\vec{f}}{ds^{2}}\,,$$

отримуємо:

$$\vec{\tau}^{\,*}=\frac{d\vec{f}}{ds^{*}}=-\frac{d\vec{f}}{ds}=-\vec{\tau}$$

$$\vec{\nu}^{\,*}=\frac{1}{\left|\dfrac{d^{2}\vec{f}}{ds^{*2}}\right|}\cdot\frac{d^{2}\vec{f}}{ds^{*2}}=\frac{1}{\left|\dfrac{d^{2}\vec{f}}{ds^{2}}\right|}\cdot\frac{d^{2}\vec{f}}{ds^{2}}=\vec{\nu}$$

$$\vec{\beta}^{*}=[\vec{\tau}^{\,*},\vec{\nu}^{\,*}]=[-\vec{\tau},\vec{\nu}]=-[-\vec{\tau},\vec{\nu}]=-\vec{\beta}$$

Задача 4.2. Довести, що при паралельному переносі кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ не змінюються.

Розв'язання. При паралельному переносі в просторі $\mathbb{R}^3$ радіус-вектор кривої змінюється наступним чином

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \vec{f}(t) + \vec{c}$$

При такому перетворенні похідні вектор-функції не змінюються. Як наслідок, вектори базису Френе, які виражаються через похідні радіус-вектора кривої, також не будуть змінюватись.

Задача 4.3. Довести, що при ортогональному перетворенні (обертанні) кривої γ в просторі $I\!R^3$ вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ змінюються відповідно до того ж ортогонального перетворення.

Розв'язання. Параметризуємо криву натуральним параметром.

При повороті (обертанні) в просторі $I\!R^3$ радіус-вектор кривої змінюється наступним чином

$$\vec{x} = \vec{f}(s) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = U \cdot \vec{f}(s) = \vec{f}_u(s)$$

де U – ортогональна матриця, $U^{tr} = U^{-1}$.

При такому перетворенні зберігаються скалярний добуток векторів і довжина векторів. Крім того, маємо $[U \cdot \vec{X}, U \cdot \vec{Y}] = U \cdot [\vec{X}, \vec{Y}]$

Маємо:

$$\frac{d}{ds}(U \cdot \vec{f}) = U \cdot \frac{d\vec{f}}{ds} \ , \qquad \left| \frac{d}{ds}(U \cdot \vec{f}) \right| = \left| U \cdot \frac{d\vec{f}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{f}}{ds} \right| \equiv 1$$

$$\frac{d^2}{ds^2}(U \cdot \vec{f}) = U \cdot \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \ , \qquad \left| \frac{d^2}{ds^2}(U \cdot \vec{f}) \right| = \left| U \cdot \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right|$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\vec{\tau}_u = \frac{d}{ds}(U \cdot \vec{f}) = U \cdot \frac{d\vec{f}}{ds} = U \cdot \vec{\tau} \ ,$$

$$\vec{\nu}_u = \frac{1}{\left| \frac{d^2}{ds^2}(U \cdot \vec{f}) \right|} \cdot \frac{d^2}{ds^2}(U \cdot \vec{f}) = \frac{1}{\left| \frac{d^2 \vec{f}}{ds^2} \right|} \cdot U \cdot \frac{d^2 \vec{f}}{ds^2} = U \cdot \vec{\nu} \ ,$$

$$\vec{\beta}_u = [\vec{\tau}_u, \vec{\nu}_u] = [U \cdot \vec{\tau}, U \cdot \vec{\nu}] = U \cdot [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = U \cdot \vec{\beta}$$

Задача 6.13. Тепер перепишемо рівняння гвинтової лінії, прийнявши за новий параметр довжину дуги. Такий параметр зветься натуральним. Виразимо його через вихідний параметр, взявши довжину дуги від його значення t_0 до t:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(\tau)|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\,\tau\Big|_{t_0}^{t} = \sqrt{a^2+b^2}(t-t_0).$$

Тут при $t < t_0$ значення стає від'ємним: більш точно, натуральний параметр – це "орієнтована" довжина дуги. Зауважимо, що вибір натурального параметра залежить від вибору початкової точки дуги, тобто таких параметрів багато. Нехай для визначеності $t_0 = 0$. Тоді $s = \sqrt{a^2+b^2}\,t$, отже $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким чином, нова параметризація має вигляд:

$$r(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Зауважимо, що у натуральній параметризації вектор

$$r' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b)$$

має довжину 1. Також маємо

$$r'' = \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0)$$

і (знову вважаючи, що $a > 0$)

$$|r''| = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

У цій параметризації вектори репера Френе можна обчислювати за спрощеними формулами:

$$\tau = r' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\right),$$

$$\nu = \frac{r''}{|r''|} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right),$$

$$\beta = [\tau,\nu] = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & b \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\right).$$