Лекція 4. Репер Френе регулярної кривої.

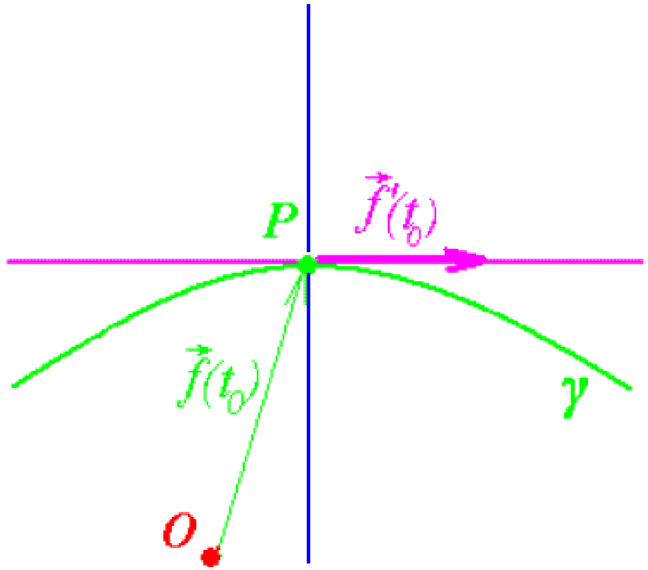
1. Базис Френе регулярної кривої в $\mathbb{R}^2$

Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною: 1) $\vec{f}(t) \in C^1$; 2) $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$.

В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ:



1) існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$;

2) існує і є єдиною *нормальна пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ ортогонально до дотичної прямої, вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ є її вектором нормалі.

В координатній формі:

крива γ

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \end{cases}$$

дотична пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}$$

нормальна пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

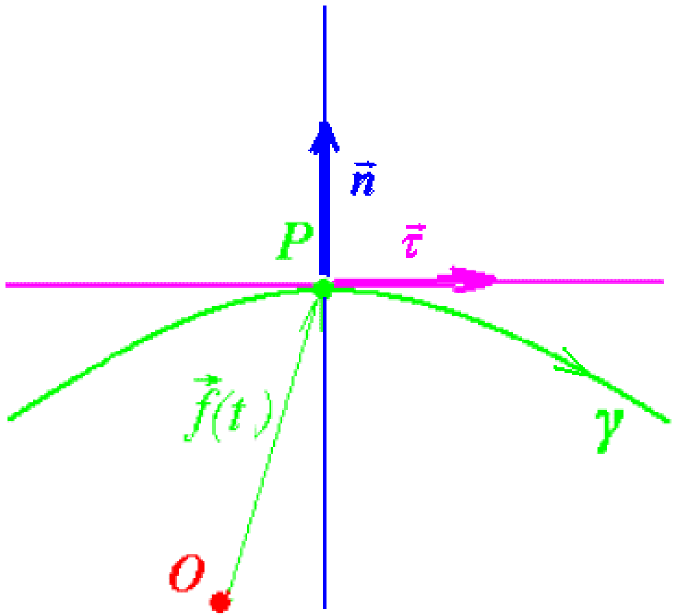
$$\frac{df^1}{dt}(t_0)\cdot(x^1 - f^1(t_0)) + \frac{df^2}{dt}(t_0)\cdot(x^2 - f^2(t_0)) = 0$$

В кожній точці P на регулярній кривій γ в $\mathbb{R}^2$ визначаються одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$ і одиничний нормальний вектор $\vec{n}$:

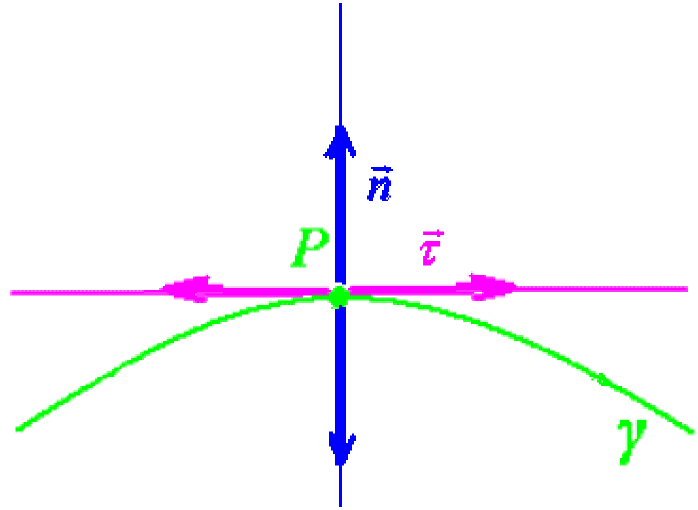
$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \frac{df^2}{dt} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{df^2}{dt} \\ \frac{df^1}{dt} \end{pmatrix}$$

Разом вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$, прив'язані до точки P, утворюють ортонормований додатно орієнтований базис в площині $\mathbb{R}^2$:

$$<\vec{\tau},\vec{\tau}>\equiv 1\,,\ <\vec{\tau},\vec{n}>\equiv 0\,,\ <\vec{n},\vec{n}>\equiv 1\,.$$



Зауваження 1. В кожній точці P на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ визначаються однозначно з точністю до знаку.



Якщо задано орієнтацію (напрямок руху) на кривій, то вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ визначаються однозначно.

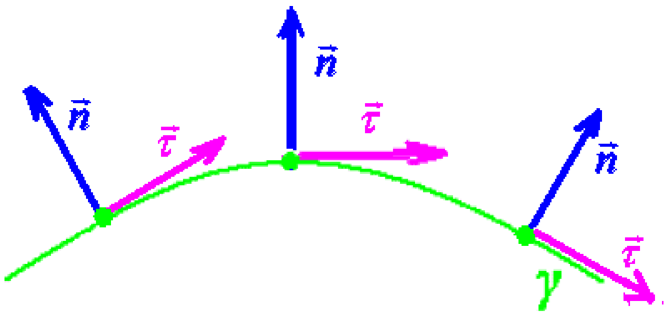
При зміні орієнтації (напрямку руху) на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ змінюють знак.

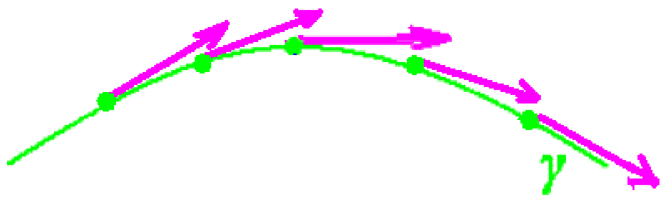
Зауваження 2. Коли точка P рухається по кривій γ , вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ змінюються неперервно, при цьому їх ортонормованість зберігається.

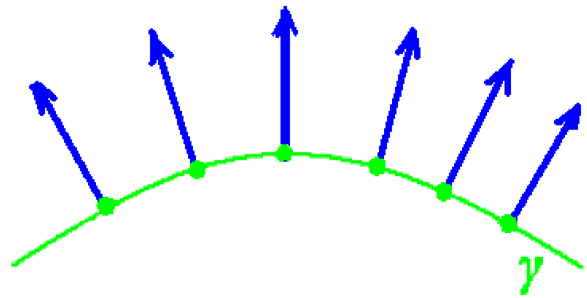
Термінологія: *рухомий ортонормований базис* вздовж кривої γ ,

дотичне векторне поле $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ вздовж кривої γ,

нормальне векторне поле $\vec{n} = \vec{n}(t)$ вздовж кривої γ.







Таким чином, векторні поля $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ утворюють рухомий ортонормований базис в $\mathbb{R}^2$ вздовж кривої γ.

2. Базис Френе регулярної кривої в $\mathbb{R}^3$

Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

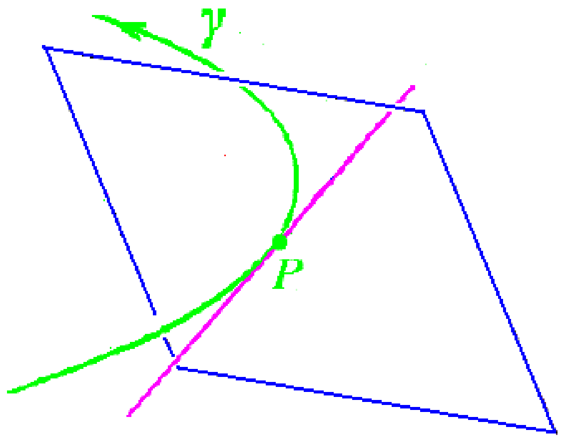
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

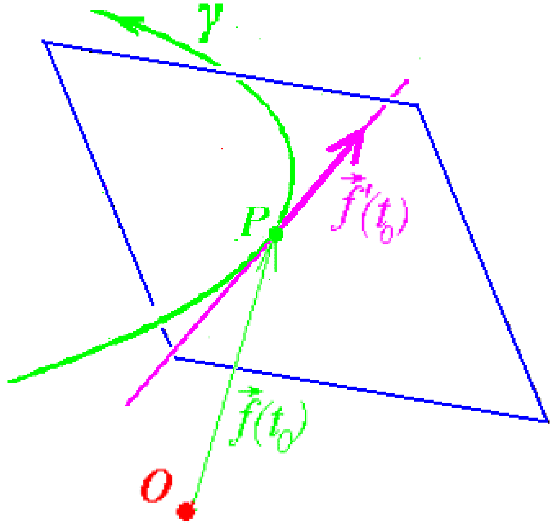
Будемо вважати, що крива γ є регулярною: 1) $\vec{f}(t) \in C^2$, 2) $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$.

В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ:

1) існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$

2) існує і є єдиною *нормальна площина* – вона проходить через точку $P(t_0)$ ортогонально до дотичної прямої, вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ є її вектором нормалі





В координатній формі:

крива γ

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \\ x^3 = f^3(t) \end{cases}$$

дотична пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

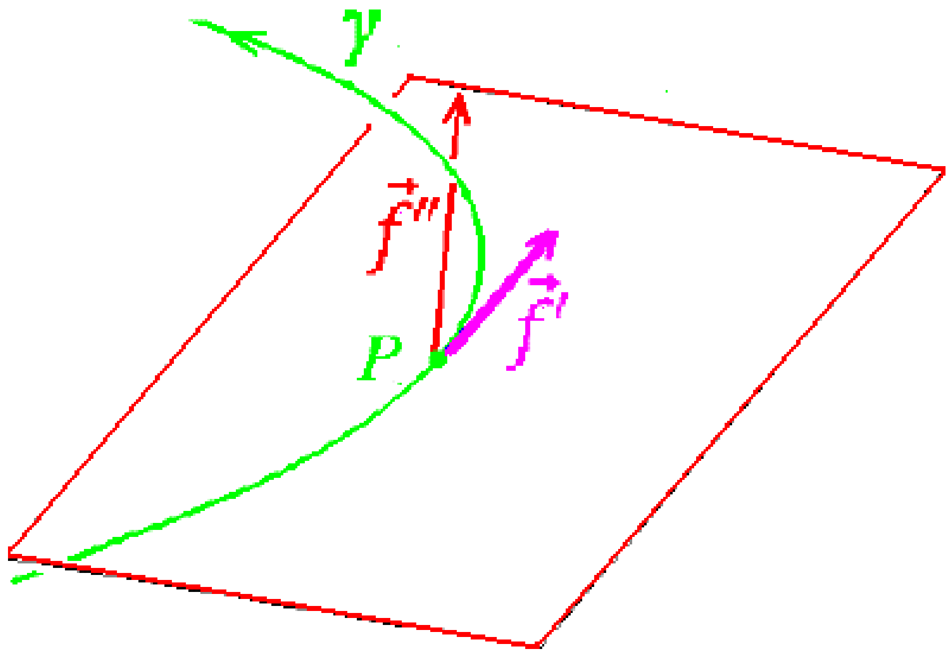
$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} = \frac{x^3 - f^3(t_0)}{\frac{df^3}{dt}(t_0)}$$

нормальна площина кривої γ в точці $P(t_0)$

$$\frac{df^1}{dt}(t_0)\cdot(x^1 - f^1(t_0)) + \frac{df^2}{dt}(t_0)\cdot(x^2 - f^2(t_0)) + \frac{df^3}{dt}(t_0)\cdot(x^3 - f^3(t_0)) = 0$$

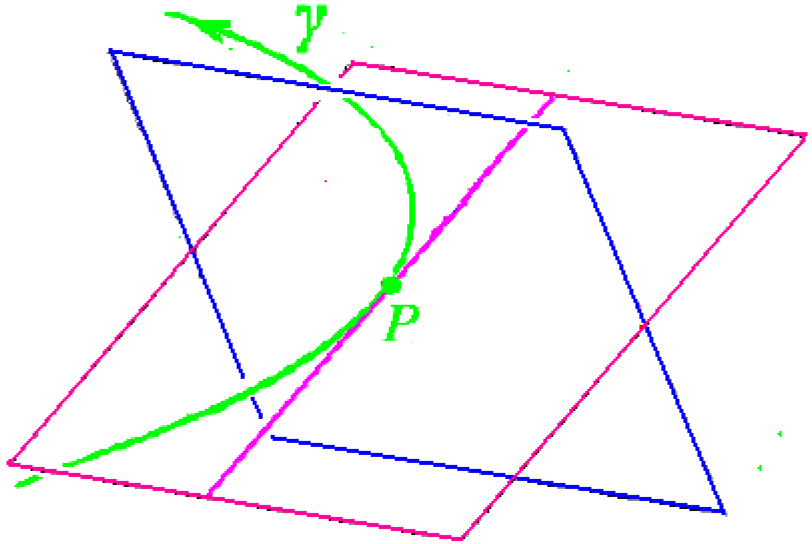
Нехай в точці $P(t_0)$ на кривій γ вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$ є лінійно незалежними, $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$.

Тоді в точці P існує і є єдиною *щільнодотична* площина кривої γ – вона проходить через точку P і натягнута на вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$

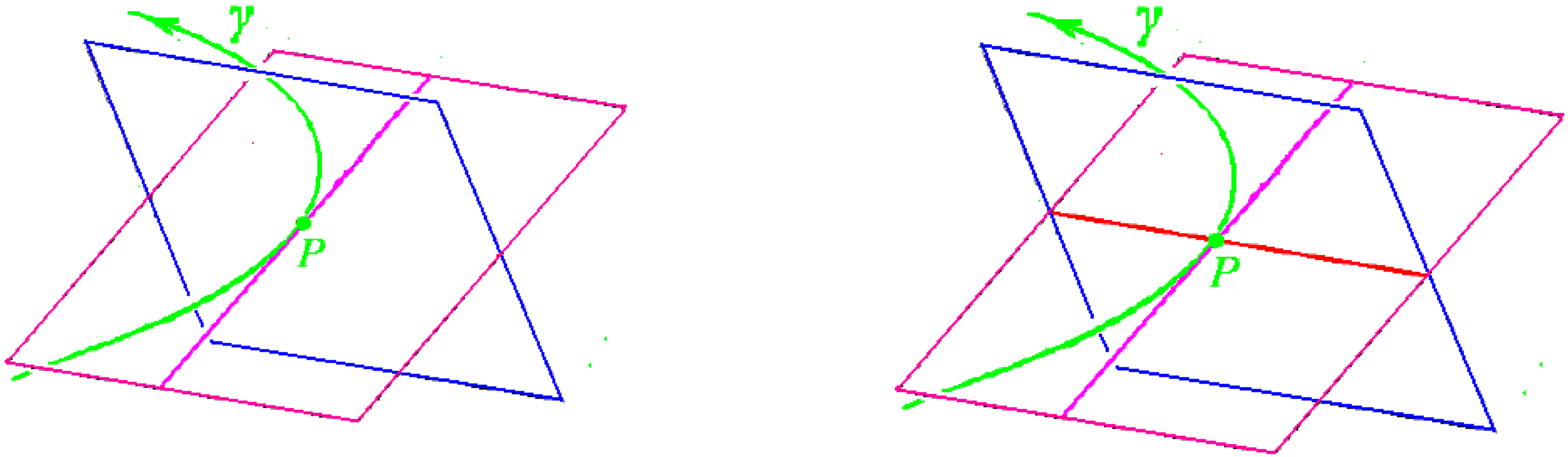


Твердження. *Щільнодотична і нормальна площини кривої γ в точці P є взаємно ортогональними.*

Доведення. Щільнодотична площина містить дотичну пряму, а нормальна площина ортогональна дотичній прямій. Значить, щільнодотична і нормальна площини кривої γ в точці P є взаємно ортогональними.



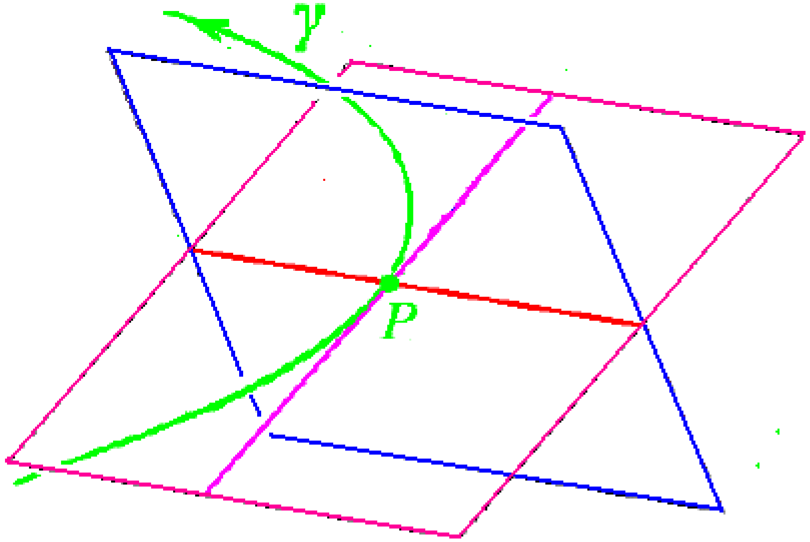
Визначення. Пряма, що є перетином шільнодотичної і нормальної площин кривої γ в точці P, називається *головною нормаллю* кривої γ в точці P.

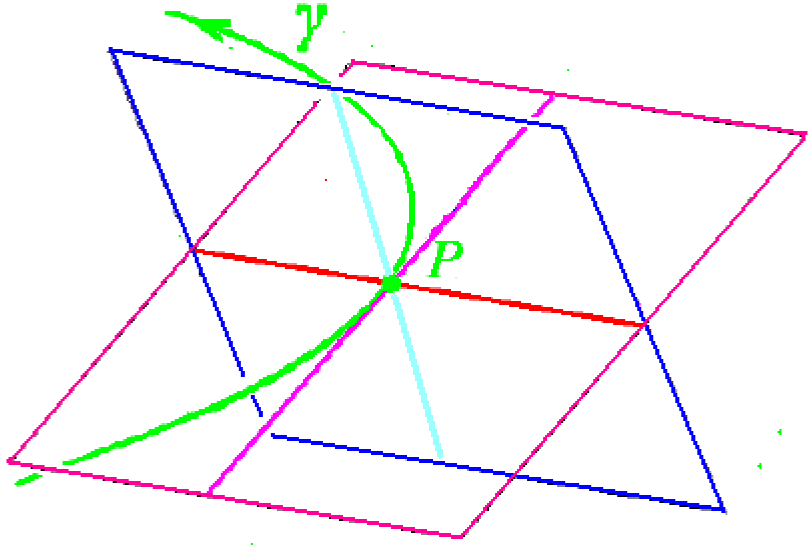


Твердження. *Головна нормаль ортогональна до дотичної прямої.*

Доведення. Головна нормаль належить нормальній площині. А дотична пряма ортогональна нормальній площині. Значить, дотична пряма і головна нормаль взаємно ортогональні.

Визначення. Пряма в нормальній площині кривої γ в точці P, яка проходить через точку P ортогонально до головної нормалі кривої γ в точці P, називається *бінормаллю* кривої γ в точці P.





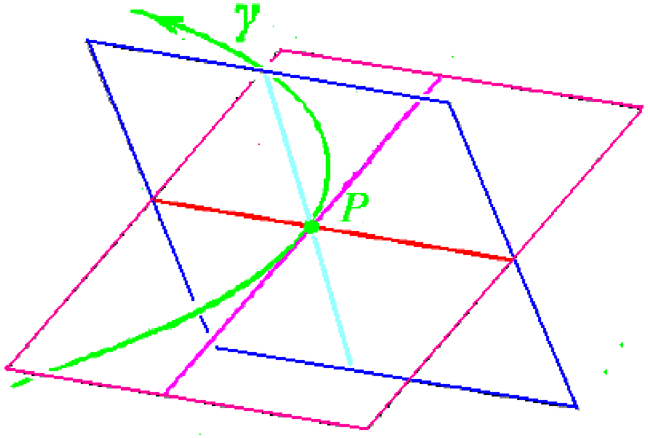
Твердження. *Бінормаль ортогональна до дотичної прямої і головної нормалі.*

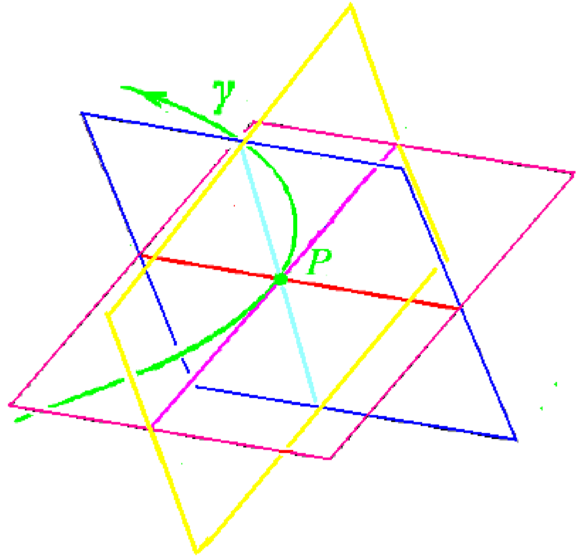
Доведення. Бінормаль ортогональна до головної нормалі за визначенням.

Бінормаль належить нормальній площині, а дотична пряма ортогональна нормальній площині. Значить, бінормаль ортогональна до дотичної прямої.

Наслідок. *Три прямі – дотична пряма, головна нормаль і бінормаль в точці P – є взаємно ортогональними.*

Визначення. Площина, що проходить через дотичну пряму і бінормаль кривої γ в точці P, називається *спрямною площиною* кривої γ в точці P.





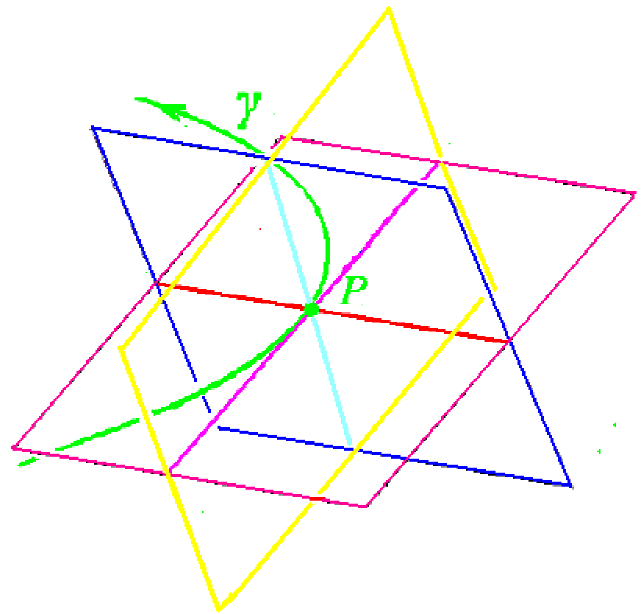
Твердження. *Спрямна площина є ортогональною до головної нормалі, до щільно дотичної площини і до нормальної площини.*

Доведення. Спрямна площина містить дотичну пряму і бінормаль. А головна нормаль ортогональна дотичній прямій і бінормалі. Значить, спрямна площина ортогональна головній нормалі.

Щільнодотична площина і нормальна площина містять головну нормаль. А спрямна площина ортогональна головній нормалі. Значить, спрямна площина ортогональна щільнодотичній площині і нормальній площині.

Наслідок. *Три площини – щільнодотична, нормальна і спрямна площини в точці P – є взаємно ортогональними.*

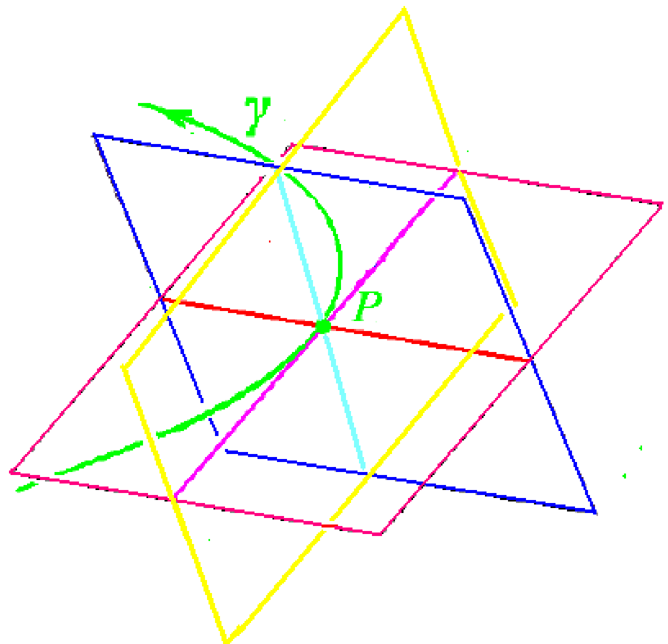
Три взаємно ортогональні прямі – дотична пряма, головна нормаль і бінормаль в точці P – і три взаємно ортогональні площини – щільно дотична, нормальна і спрямна площини в точці P – утворюють *тригранник Френе* кривої γ в точці Р.



Дотична пряма	$\subset$	*Щільнодотична площина*
	$\subset$	*Спрямна площина*
	$\perp$	*Нормальна площина*
Головна нормаль	$\subset$	*Щільнодотична площина*
	$\perp$	*Спрямна площина*
	$\subset$	*Нормальна площина*
Бінормаль	$\perp$	*Щільнодотична площина*
	$\subset$	*Спрямна площина*
	$\subset$	*Нормальна площина*

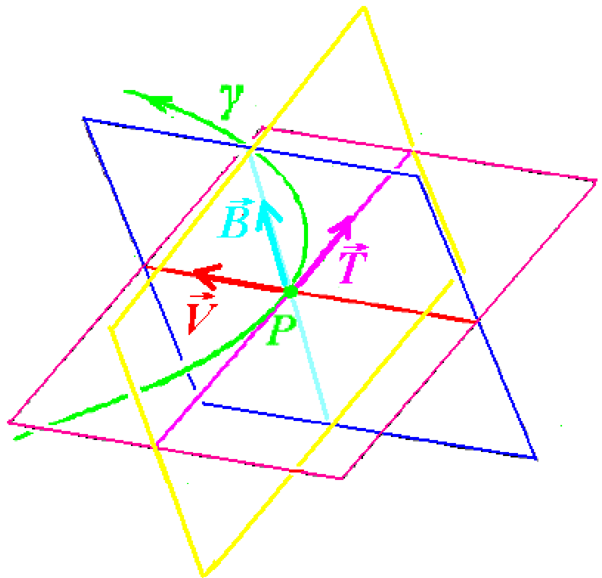
Зауваження 1. В кожній точці P кривої γ, де $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, тригранник Френе визначений однозначно.

Зауваження 2. В кожній точці P кривої γ, де $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, визначається свій окремий тригранник Френе. Коли точка P рухається по кривій γ, тригранник Френе буде, взагалі кажучи, змінюватись.



Як задати елементи тригранника Френе в термінах радіус-вектора кривої?

Позначимо:



$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt}$$

$$\vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]$$

$$\vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}]$$

Вектори $\vec{T}(t_0)$, $\vec{V}(t_0)$, $\vec{B}(t_0)$ є напрямними векторами відповідно дотичної прямої, головної нормалі і бінормалі кривої γ в точці $P(t_0)$.

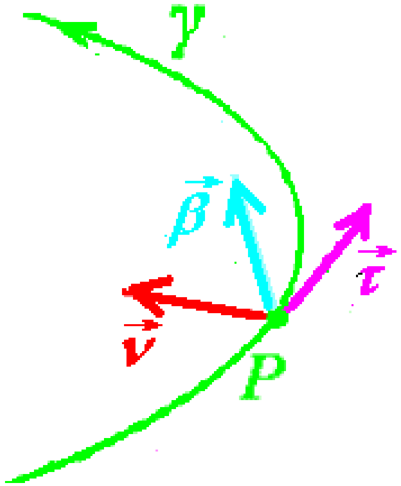
Вектори $\vec{T}(t_0)$,$\vec{V}(t_0)$,$\vec{B}(t_0)$ є нормальними векторами відповідно нормальної, спрямної і щільнодотичної площин кривої γ в точці $P(t_0)$.

Ортонормовані вектори:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{|\frac{d\vec{f}}{dt}|} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} \quad , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|} \cdot [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \quad , \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{|[\vec{B}, \vec{T}]|} \cdot [\vec{B}, \vec{T}]$$

Для параметрично заданої кривої γ в кожній її точці P, де $[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]\neq 0$, ортонормовані вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$, визначаються однозначно.

Вони утворюють додатно орієнтований ортонормований базис в $I\!R^3$, який називається *натуральним базисом* або *базисом Френе* кривої γ точці P.



Коли точка P рухається по криві γ, ортонормований базис $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ буде змінюватись, утворюючи *рухомий базис Френе вздовж кривої* γ.

Алгебраїчні властивості базису Френе $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$:

1) $<\vec{\tau},\vec{\tau}>\equiv 1, \quad <\vec{\nu},\vec{\nu}>\equiv 1, \quad <\vec{\beta},\vec{\beta}>\equiv 1,$
$<\vec{\tau},\vec{\nu}>\equiv 0, \quad <\vec{\tau},\vec{\beta}>\equiv 0, \quad <\vec{\nu},\vec{\beta}>\equiv 0$

2) $[\vec{\tau},\vec{\nu}]=\vec{\beta}, \quad [\vec{\nu},\vec{\beta}]=\vec{\tau}, \quad [\vec{\beta},\vec{\tau}]=\vec{\nu}$

3) $(\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta})\equiv 1$

Базис Френе – це система відліку, прив’язана до кривої γ

Як виглядає базис Френе в натуральній параметризації ?

Якщо параметр t є *натуральним* параметром, позначимо $s=t$, то

$$\left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right| \equiv 1,$$

тобто,

$$<\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d\vec{f}}{ds}> \equiv 1$$

Продиференціюємо:

$$<\frac{d^2\vec{f}}{ds^2},\frac{d\vec{f}}{ds}> + <\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}> \equiv 0,$$

тобто,

$$<\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}> \equiv 0$$

Значить, $\frac{d\vec{f}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ взаємно ортогональні.

Далі, маємо

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right]\right|^2 = \left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right|^2 \left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right|^2 - <\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}>^2 = \left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right|^2$$

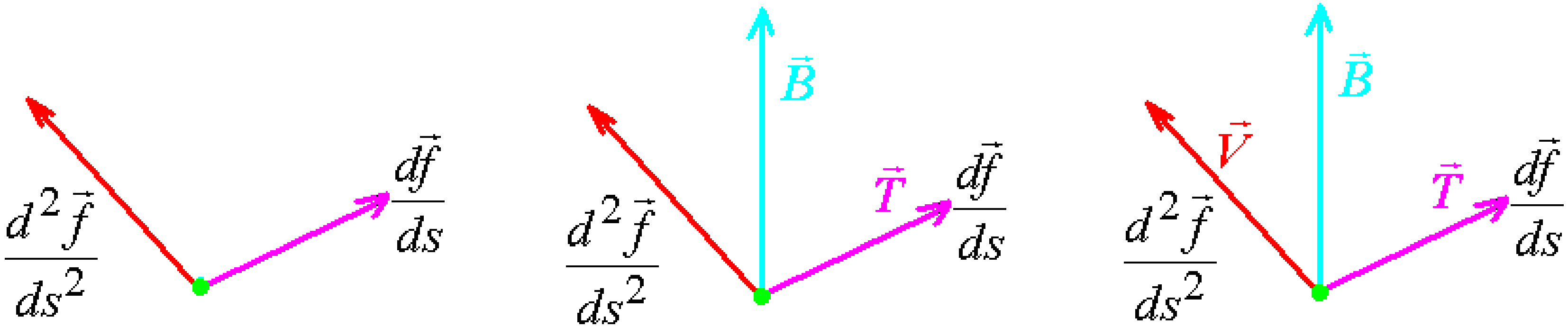
Для базиса Френе отримуємо:

$$\vec{T}=\frac{d\vec{f}}{ds}\,,\quad \vec{B}=[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}]\,,\quad \vec{V}=[\vec{B},\vec{T}]=[[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}],\frac{d\vec{f}}{ds}]=\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$$

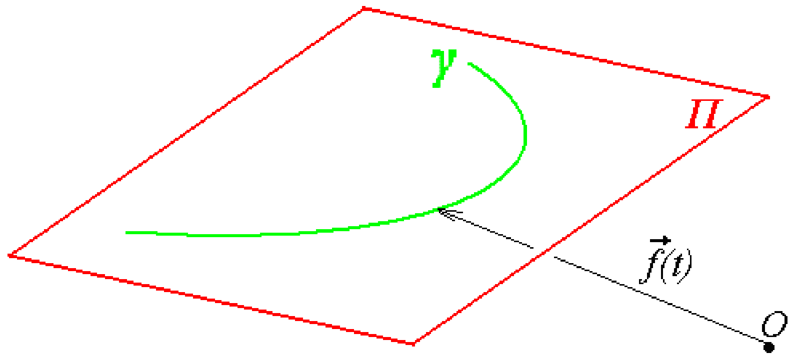
$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{f}}{ds}\,,\qquad \vec{\beta}=\frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|}\cdot[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}]\,,\qquad \vec{\nu}=\frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$$

Таким чином, в натуральній параметризації маємо:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{f}}{ds}\,,\qquad \vec{\nu}=\frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\,,\qquad \vec{\beta}=\frac{1}{|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}|}\cdot[\frac{d\vec{f}}{ds},\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}]=[\vec{\tau},\vec{\nu}]$$



3. Плоскі криві як частковий випадок просторових кривих



Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$.

Припустимо, що крива γ є *плоскою*, тобто, належить деякій двомірній площині Π в $\mathbb{R}^3$.

Твердження. Для довільної точки P кривої γ, де виконано $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$ і, як наслідок, визначено тригранник Френе, має місце наступне:

1) щільнодотична площина кривої γ в точці P співпадає з площиною Π;

2) бінормаль кривої γ в точці P є прямою, ортогональною площині Π;

3) спрямна площина кривої γ в точці P ортогональна площині Π;

4) нормальна площина кривої γ в точці P ортогональна площині Π;

5) головна нормаль кривої γ в точці P належить площині Π і є нормальною прямою кривої $\gamma \subset \Pi$ в точці P.

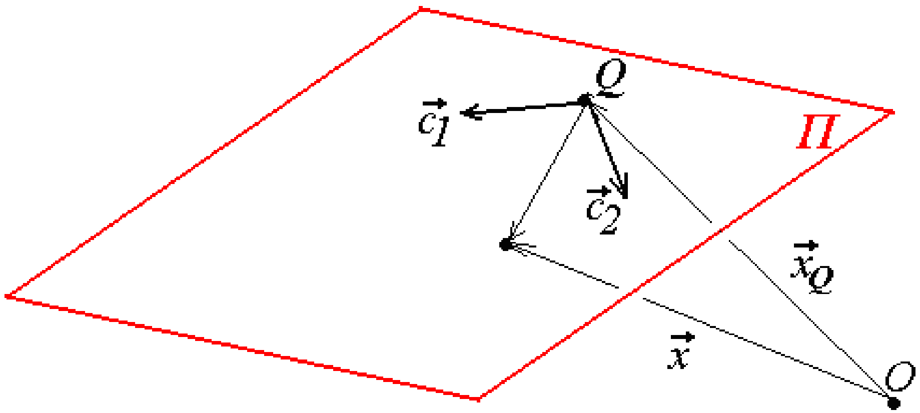
Наслідок. Для плоскої кривої маємо:

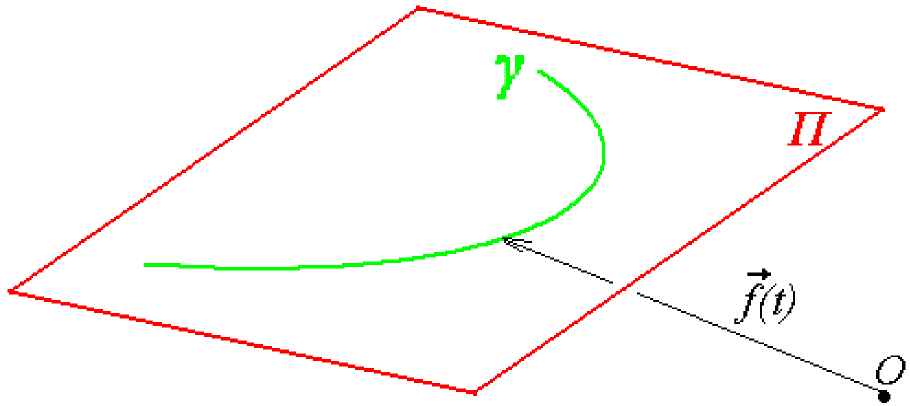
1) усі щільнодотичні площини співпадають: $\vec{\tau}, \vec{\nu} \in \Pi \ \forall P \in \gamma$

2) усі бінормалі паралельні друг другу: $\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_0$.

Доведення. Нехай площина Π проходить через якусь точку Q і натягнута на пару векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$. Довільна точка площини Π має радіус-вектор

$$\vec{x} = \vec{x}_Q + u \cdot \vec{c}_1 + v \cdot \vec{c}_2$$





Оскільки крива γ лежить в площині Π , маємо

$$\vec{f}(t) = \vec{x}_Q + u(t) \cdot \vec{c}_1 + v(t) \cdot \vec{c}_2$$

Обчислимо похідні радіус-вектора кривої:

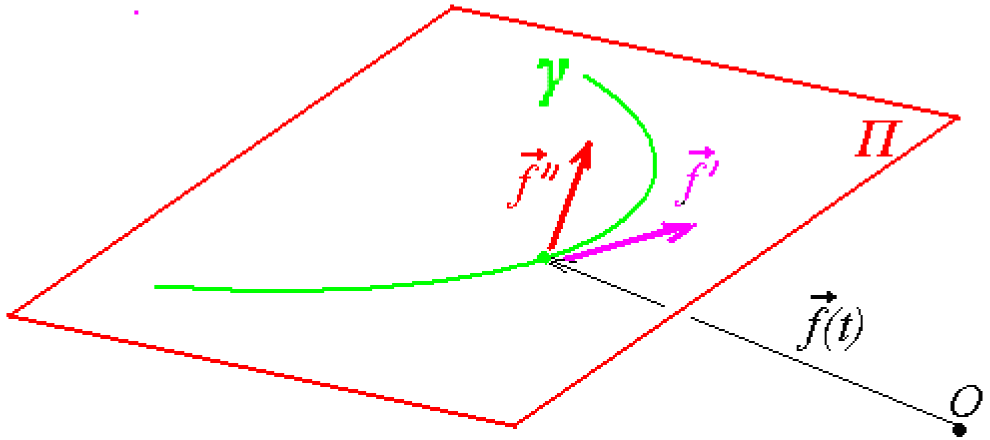
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \vec{c}_1 + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{c}_2$$

$$\frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot \vec{c}_1 + \frac{d^2 v}{dt^2} \cdot \vec{c}_2$$

Як наслідок, вектори $\dfrac{d\vec{f}}{dt}$ і $\dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2}$ є лінійними комбінаціями векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$.

Значить, щільнодотична площина в кожній точці кривої натягнута на вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, тобто, на ті ж вектори, що і площина *П,* і проходить вона через точку кривої, що лежить в площині *П.*

Звідси випливає, що усі щільнодотичні площини кривої γ співпадають з площиною *П*.



Пункт 1) доведено. Інші пункти твердження довести самостійно, використовуючи пункт 1) і визначення елементів тригранника Френе за допомогою умов ортогональності та приналежності прямих і площин.

Важливе зауваження – наслідок.

Для регулярної кривої γ в $\mathbb{R}^{2}$ виникає рухомий базис Френе $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ і рухомий базис $\vec{\tau}, \vec{n}$ вздовж кривої γ, обидва базиси ортонормовані.

В кожній точці на кривій вектори $\vec{\nu}$ і $\vec{n}$ ортогональні дотичному вектору $\vec{\tau}$. Значить, $\vec{\nu} = \pm \vec{n}$.

Причина різниці між $\vec{\nu}$ і $\vec{n}$:

базис $\vec{\tau}, \vec{n}$ є додатно орієнтованим в площині $\mathbb{R}^2$, існує завжди;

базис $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ орієнтований так само, як базис з векторів $\frac{d\vec{f}}{dt}$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$, він існує коли вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$ є лінійно незалежними.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Задача 4.1. Розглянемо коло γ в площині $I\!R^2$, задане параметрично

$$\begin{cases} x^1 = c^1 + r\cos t \\ x^2 = c^2 + r\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння дотичної та нормальної прямих кривої γ в точці $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 4.2. Розглянемо параметрично задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$ і точку P на цій кривій. Знайдіть вектори базису Френе в довільній точці кривої γ. Запишіть рівняння дотичної та нормальної прямих кривої γ в точці P:

0) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=t_0)$

1) $\begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=0)$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=\ln 2)$

3) $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=t_0)$

Задача 4.3. Розглянемо гвинтову лінію γ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

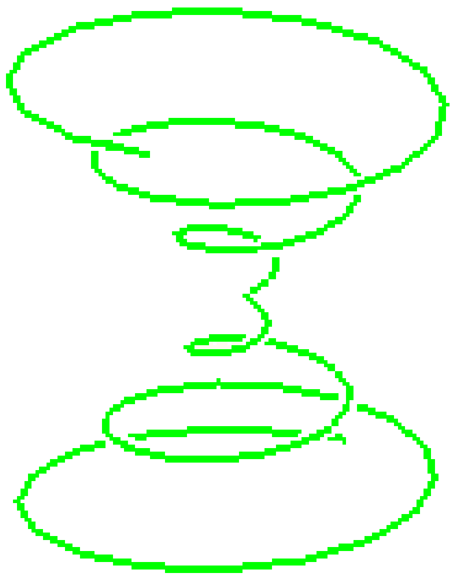
Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої γ в точці $t=\dfrac{2\pi}{3}$.

Задача 4.4. Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = t\cos t \\ x^2 = t\sin t\,, \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої γ в точці $t=\pi$.



Задача 4.5. Розглянемо гвинтову лінію γ в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t, \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Доведіть (або спростуйте), що усі головні нормалі гвинтової лінії перетинають координатну вісь x^3.

** Доведіть (або спростуйте), що якщо у регулярної кривої γ в $\mathbb{R}^3$ усі головні нормалі перетинають фіксовану пряму E, то тоді крива γ представляє собою або гвинтову лінію з віссю E, або коло, розташоване в площині $E^\perp$, ортогональній прямій E, і з центром в точці перетину площини $E^\perp$ та прямої E.

Задача 4.6.1. Довести, що при зміні орієнтації на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\beta}$ змінюють напрям на протилежний, а вектор $\vec{\nu}$ не змінюється:

$$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} \quad \rightarrow \quad -\vec{\tau}, \vec{\nu}, -\vec{\beta}$$

Задача 4.6.2. Довести, що при паралельному переносі кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ не змінюються.

Задача 4.6.3. Довести, що при обертанні кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}, \vec{\beta}$ змінюються відповідно до того ж обертання.

Задача 4.6.4. Довести, що при гомотетії кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}, \vec{\beta}$ не змінюються.

Задача 4.7.

1) Доведіть, що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$ проходять через фіксовану точку O, то крива γ є прямою.

2) Доведіть, що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$ є паралельними деякій фіксованій прямій, то крива γ є прямою.

3) Доведіть, що якщо усі нормальні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^2$ проходять через фіксовану точку O, то крива γ є колом.

Питання 4.8.*

1) Нехай γ – це регулярна крива з радіус-вектором $\vec{f}(t)$. Припустимо, що $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq \vec{0}$ в усіх точках кривої, крім деякої точки P. Чи можна визначити щільнодотичну площину кривої γ в такій точці P? Якщо можна, то як багато різноманітних щільнодотичних площина матиме крива γ в такій точці P?

2) Нехай γ – це пряма, P – довільна її точка. Чи можна визначити щільнодотичну площину кривої γ в точці P? Якщо можна, то як багато різноманітних щільнодотичних площина матиме пряма γ в точці P?