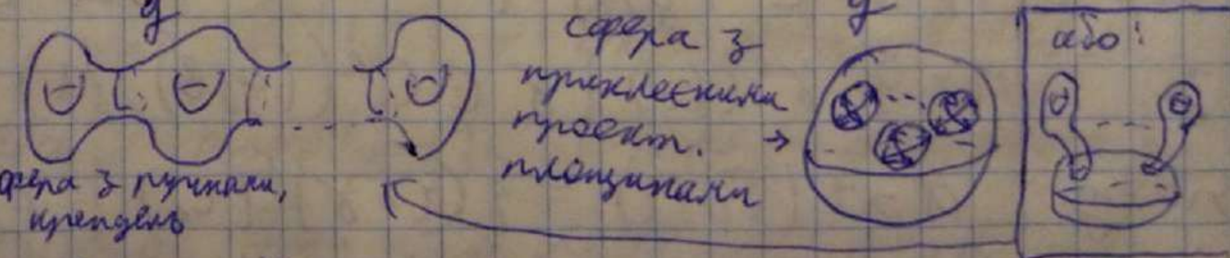
Теореми про занурення і вкладення

Th. (Уітні) Нехай M – n-вимірний k-гладкий многовид, $k \geq 1$, $n \geq 2$. Тоді існують k-гладкі занурення $M \to \mathbb{R}^{2n-1}$ і вкладення $M \to \mathbb{R}^{2n}$.

Rem. Тобто $\forall$ многовид можна вважати підмноговидом $\mathbb{R}^N$.

Ex. При $n=2$ і компактному зв'язному M: M k-дифеоморфний S^2 або $\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g}$ або $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$ (зв'язні суми), g наз. родом M.



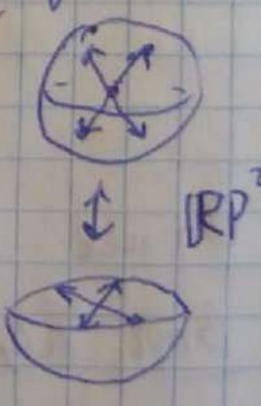
Зазвичай операції зв'язної суми і ця теорема розглядаються у топології у неперервному випадку, але це працює і $\forall$ гладкості k (див. Рохлін-Фукс або Уоллес).

Для S^2 і $T^2\#\ldots\#T^2$ $\exists$ вкладення в $\mathbb{R}^3$ (максимальної гладкості). Занурення і вкладення $\mathbb{RP}^2\#\ldots\#\mathbb{RP}^2$ будуються за допомогою зан. і вкл. $\mathbb{RP}^2$. Вкладення в $\mathbb{R}^3$ не існує, але існують занурення макс. гладкості (для $\mathbb{RP}^2$ – поверхня Боя, для $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$ – пляшка Клейна).

Нарешті, побудуємо ∞-гл. вкладення $\mathbb{RP}^2$ у $\mathbb{R}^4$:

$\mathbb{RP}^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 = \{(u:v:w) \mid u^2+v^2+w^2=1\}$, де $(u:v:w) = \{(u,v,w),(-u,-v,-w)\}$ – пара діам. протилежних точок S^2. Отже, визначимо $\varphi: \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$:

$$(u:v:w) \mapsto (uv, uw, vw, u^2-v^2),$$



воно коректно визначене ((u,v,w) і $(-u,-v,-w)$ переходять в одну точку) і неперервне як факторизація неперервного $S^2 \to \mathbb{R}^4$.

На $\{w \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^2$ введемо лок. коорд. (u, v)

[$u^2 + v^2 < 1$, тобто образ карти - не $\mathbb{R}^2$, а B^2_1],

а сама карта - ~~[illegible]~~ індукована орт. проекцією на $\underbrace{\text{точок з пари } (u:v:w), \text{ де } w > 0,}$

площину Ouv). Лок задання φ:

$(u, v) \mapsto \underbrace{(uv, u\sqrt{1-u^2-v^2}, v\sqrt{1-u^2-v^2}, u^2 - v^2)}_{\text{Воно л-и.}}$. М-ця

Якобі: $\begin{pmatrix} v & u \\ \frac{1-2u^2-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{1-u^2-2v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$. Мінор 1 і 4 рядку дає $-2(u^2+v^2) \neq 0$ при $(u, v) \neq (0,0)$. При $(u, v) = (0,0)$ мінор 2 і 3 рядку дає $1 \neq 0$.

Отже, $\forall p$ $\mathrm{rank}_p \varphi = 2$, тобто φ - занурення на $\{w \neq 0\}$.

<u>Впр.</u> Перевірити у інших картах ($\{u \neq 0\}$ і $\{v \neq 0\}$).

В силу одного з <u>Рч.</u> вище, щоб перевірити, що φ - вкладення, залишилося перевірити, що φ - ін'є, бо $\mathbb{R}P^2$ - компакт.

Отже, нехай $\varphi(u:v:w) = \varphi(\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$:

$$\left.\begin{array}{l} uv = \tilde{u}\tilde{v} \\ u^2 - v^2 = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

піднесимо друге у квадрат, додаємо квадрат першого $\cdot 4$

$$(u^2+v^2)^2 = (\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u^2+v^2 = \tilde{u}^2+\tilde{v}^2 \\ u^2 - v^2 = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u^2 = \tilde{u}^2 \\ v^2 = \tilde{v}^2 \end{array}\right]$$

Якщо $u = \pm\tilde{u} \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} uv = \tilde{u}\tilde{v} \\ uw = \tilde{u}\tilde{w} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \pm\tilde{v} \\ w = \pm\tilde{w} \end{array}\right\} \Rightarrow (u, v, w) = \pm(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}),$$

тобто $(u:v:w) = (\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$.

Якщо $u = \tilde{u} = 0$ і $v = \pm\tilde{v} \neq 0$, то ан-но

$$vw = \tilde{v}\tilde{w} \Rightarrow w = \pm\tilde{w} \Rightarrow (\underset{0}{u}, v, w) = \pm(\underset{0}{\tilde{u}}, \tilde{v}, \tilde{w}).$$

Нарешті, якщо $u = \tilde{u} = v = \tilde{v} = 0$, то $(u, v, w) = (0, 0, \pm 1)$ і $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = (0, 0, \pm 1)$. У будь-якому випадку $(u:v:w) = (\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$.

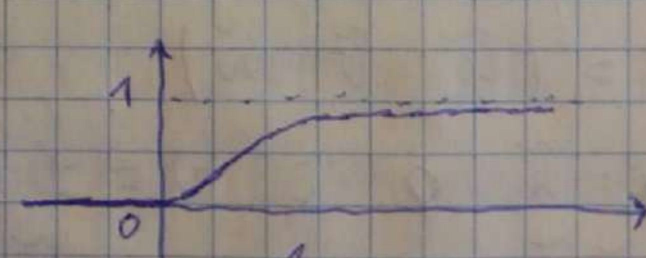
Доведення "слабкої" теореми про вкладення

Лем. Нехай M – k-м. многовид, $k \geq 0$, $p \in M$, $U \subset M$ – відкрита, $p \in U$. Тоді існують відкриті $V, W \subset M$: $p \in W$, $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ і $\varphi \in C^k(M)$: $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi(q) = 1 \Leftrightarrow q \in \overline{W}$ і $\varphi(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M \setminus V$.

Rem. Зокрема, φ є ф-цією Урисона пари замкнених множин $(M \setminus V, \overline{W})$ в M. Тому ми будемо її називати гладкою ф-цією Урисона.

▷ Почнемо з функції

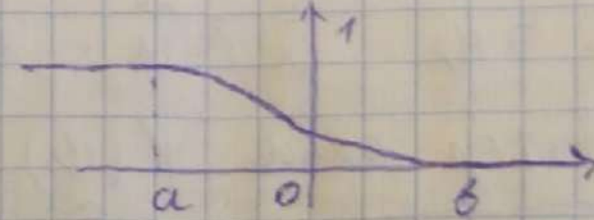
$$\alpha(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$



Оскільки $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ похідна $\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)^{(k)} = e^{-\frac{1}{t}} P_k\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \to +0]{} 0$ (де P_k – деякий поліном), $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Крім того, $\alpha(+\infty) = 1-0$.

Для $a < b \in \mathbb{R}$ визначимо

$$\beta_{a,b}(t) := \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t)+\alpha(t-a)}$$



З властивостей α:

$\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\beta(\mathbb{R}) = [0,1]$, $\beta(t) = 0 \Leftrightarrow t \geq b$, $\beta(t) = 1 \Leftrightarrow t \leq a$.

Отже, дані p і $U \ni p$. Нехай $(\tilde{U}, \psi)$ - карта M з $p \in \tilde{U}$.

Тоді $\psi(\tilde{U} \cap U)$ - відкр. окіл $\psi(p)$ у $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(\psi(p)) \subset$

$\subset \psi(\tilde{U} \cap U)$ (евклідова куля, як завжди, $n = \dim M$).

Позначимо $\tilde{B}_{r'}(p) := \psi^{-1}(B_{r'}(\psi(p)))$ - відкритий окіл p,

$\tilde{B}_{r'}(p) \subset U \cap \tilde{U}$ $\forall r' \in (0, r]$; $\tilde{D}_{r'}(p) := \psi^{-1}(D_{r'}(\psi(p)))$.

Оскільки $D_{r'}(\psi(p))$ - компакт в $\mathbb{R}^n$ і ψ - гомеоморфізм,

$\tilde{D}_{r'}(p)$ - компакт (у індукованій топ. $\tilde{U}$, а отже і у M),

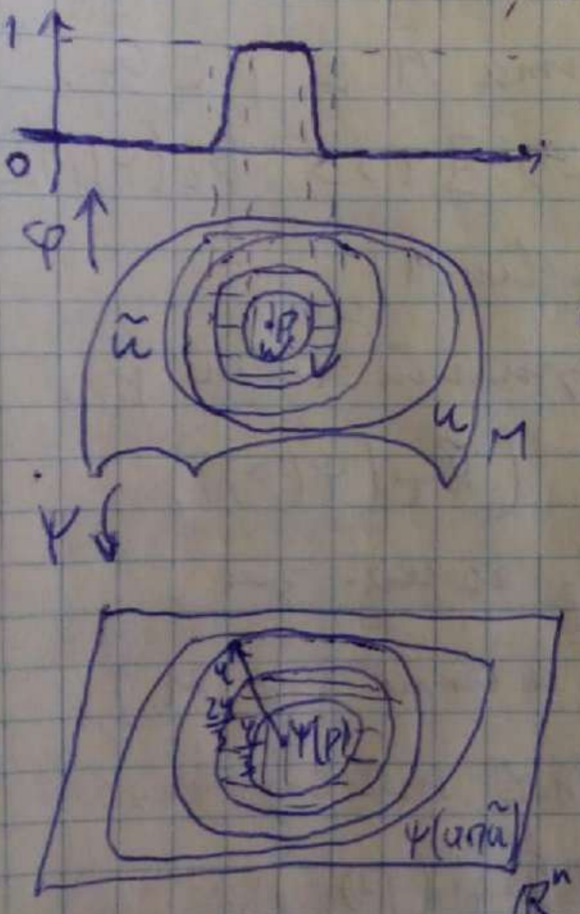
в силу хаусдорфовості, $\tilde{D}_{r'}(p)$ - замкнена, тому

$\overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{D}_{r'}(p)$ (бо, звичайно, $\tilde{B}_{r'}(p) \subset \tilde{D}_{r'}(p)$).

Доведено обернене включення: $\forall q \in \tilde{D}_{r'}(p)$ і

∀ відкр. $\tilde{\tilde{U}} \ni q$ $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}$ - відкр. окіл q, тому $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U})$ - відкр. окіл $\psi(q) \in D_{r'}(\psi(p))$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки $D_{r'}(\psi(p)) = \overline{B_{r'}(\psi(p))}$, $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}) \cap B_{r'}(\psi(p)) \neq \varnothing$, застосовуючи ψ^{-1}, отримаємо $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U} \cap \tilde{B}_{r'}(p) \neq \varnothing$. Оскільки

$\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{B}_{r'}(\psi(p))$



$\tilde{\tilde{U}}$ - довільний відкр. окіл q, це і означає $q \in \overline{\tilde{B}_{r'}(p)}$.

Отже, $\forall r' < r$ $\tilde{D}_{r'}(p) = \overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{B}_r(p) \subset U \cap \tilde{U}$.

Покладемо:

$$W := \tilde{B}_{\frac{r}{3}}(p), \quad V := \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p).$$

За побудовою, вони відкриті, $p \in W$ і $\overline{W} = \tilde{D}_{\frac{r}{3}}(p) \subset \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p) = V$, $\overline{V} = \tilde{D}_{\frac{2r}{3}}(p) \subset U$.

Нарешті, побудуємо $\varphi : M \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(q) := \begin{cases} \beta_{\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}}\left(|\psi(q) - \psi(p)|\right), & q \in \tilde{U}, \\ 0, & q \notin \tilde{U} \end{cases}$$

$|\cdot|$ - евкл. норма

Оскільки $\tilde{U}$ і $M \setminus \overline{V}$ утворюють відкр. покриття M, φ k-гладка на $\tilde{U}$ (бо ψ - k-гладкий дифео-зм, а β і $|\cdot|$ - ∞-гладкі) і $\varphi = 0$ на $M \setminus \overline{V}$ за побудовою - тож макс. гладкості k, φ неперервна і k-гладка на M (бо це локальні властивості). З властивостей β випливає, що $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi = 1$ в точності на $\tilde{D}_{\frac{4}{3}}(p) = \overline{W}$ і $= 0$ в точності на $M \setminus \tilde{B}_{\frac{2\cdot4}{3}}(p) = M \setminus V$. $\blacktriangle$

<u>Th.</u> (про вкладення). Нехай M - k-гл. многовид, $k \geq 1$. Тоді $\exists$ k-гл. вкладення $M \to \mathbb{R}^N$ для деякого $N \in \mathbb{N}$.

<u>Rem.</u> При $k=0$ доведення теж працює і дає топологічне вкладення.

$\triangleright$ Будемо доводити (як і <u>Th.</u> Уітні далі) для випадку компактного M. У загальному випадку потрібна ско-ристатися, наприклад, розбиттям одиниці.

$\forall p \in M\ \exists$ карта (U_p, ψ_p) з $p \in U_p$. Застосуємо лем. до p і U_p: $\exists$ відкр. V_p, W_p : $p \in W_p$, $\overline{W_p} \subset V_p$, $\overline{V_p} \subset U_p$ і ф-ція Урисона $\varphi_p \in C^k(M)$: $\varphi_p(M) = [0,1]$, $\varphi_p(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M \setminus V_p$ і $\varphi_p(q) = 1 \Leftrightarrow q \in \overline{W_p}$.

$\{W_p\}_{p \in M}$ – відкр. покриття M. $\exists$ скінченне підпокриття $\{W_{p_i}\}_{i=1}^m$. Перепозначимо $W_i := W_{p_i}$, $V_i := V_{p_i}$, $U_i := U_{p_i}$, $\varphi_i := \varphi_{p_i}$, $\psi_i := \psi_{p_i}$, $i = \overline{1,m}$.

$\forall i = \overline{1,m}$ визначимо $F_i : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ (де $n = \dim M$):

$$F_i(q) := \begin{cases} (\varphi_i(q)\psi_i(q), \varphi_i(q)), & q \in U_i; \\ 0, & q \notin U_i. \end{cases}$$

Ан-но до доведення леми, оскільки U_i і $M \setminus \overline{V_i}$ утв. відкр. покриття M, $F_i \in C^k(U_i, \mathbb{R}^{n+1})$ за побудовою і $F_i = 0$ на $M \setminus \overline{V_i}$, $F_i \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+1})$.

Покладемо $F := (F_1, \ldots, F_m)$, тоді $F \in C^k(M, \mathbb{R}^{m(n+1)})$.

$\forall p \in M \ \exists i = \overline{1,m} : p \in W_i \ ; \ F_i|_{W_i} = (\psi_i, 1)$. Оскільки $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ – k-дифеоморфізм, F_i має максимальний ранг n в околі $\underbrace{p}_{W_i \ni}$. Тоді і $F|_{W_i}$ – ранга n. Тобто, F – занурення в p.

Отже, F – занурення. Оскільки M – компакт, за Pч. вище, достатньо показати, що F – ін'є, для перевірки вкладеності F.

Дійсно, нехай $F(p) = F(q)$. $\exists i = \overline{1,m} : p \in W_i \subset U_i$. Тоді $1 = \varphi_i(p) = \varphi_i(q)$ (це і $(n+1)$-ша коорд. ф-ція F), за вл. ф-цій $\mathcal{Y}$, тоді $q \in \overline{W_i} \subset U_i$. Тоді з $F_i(p) = F_i(q)$ і $\varphi_i(p) = \varphi_i(q) = 1$ випливає $\psi_i(p) = \psi_i(q)$. Оскільки ψ_i – бієкція на U_i, $p = q$. $\blacktriangle$

<u>Ідея доведення теореми Уітні</u>

Отже, $\forall$ k-м. M (тут вважаємо $k \geqslant 1$) $\exists$

к-гл.

вкладення $\varphi: M \to \mathbb{R}^N$ для деякого $N \in \mathbb{N}$.

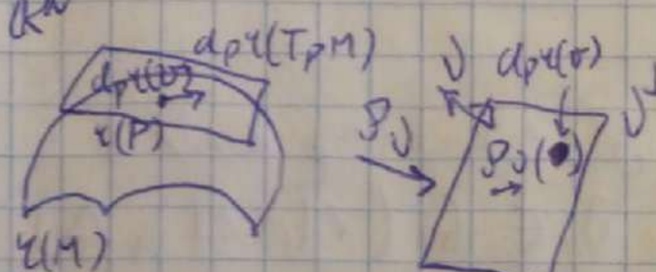
Ідея полягає у зниженні вимірності: розглянемо $p_\nu \circ \varphi$, де p_ν – ортогональне проектування $\mathbb{R}^N$ на гіперплощину $\nu^\perp$ для $\nu \in \mathbb{R}^N$ з $|\nu| = 1$ (евкл. модуль), тобто $\nu \in S^{N-1}$, тобто для евкл. скал. добутку $\langle \cdot , \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^N$

$$p_\nu(x) = x - \langle x, \nu \rangle \nu.$$

Ототожнивши $\nu^\perp$ з $\mathbb{R}^{N-1}$, можемо вважати, що $p_\nu \circ \varphi: M \to \mathbb{R}^{N-1}$. Це k-гл. відобр. для k-гладкого φ, бо p_ν – ∞-гладке (лінійне). Коли це відобр. буде вкладенням чи хоча б зануренням?

1. $p_\nu \circ \varphi$ – занурення $\Leftrightarrow \forall p \in M$ $d_p(p_\nu \circ \varphi) = \left[\substack{\text{ланц.} \\ \text{правило}}\right] = d_{\varphi(p)} p_\nu \circ d_p \varphi$ – ін'єкт. $\Leftrightarrow$ [φ – занурення $\Rightarrow d_p\varphi$ – ін'єкт.] $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$ $d_{\varphi(p)} p_\nu : d_p \varphi(T_pM) \to T_{p_\nu \circ \varphi(p)} \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \mathbb{R}^N$ – ін'єкт. $\Leftrightarrow$ [при такому ототожненні p_ν – лінійне] $\Leftrightarrow \forall p \in M$

$\rho_\nu : d_p\varphi(T_pM) \to \mathbb{R}^N$ - ін'ю (лінійна) $\Leftrightarrow \forall p \in M \ \forall\, 0 \neq v \in T_pM$



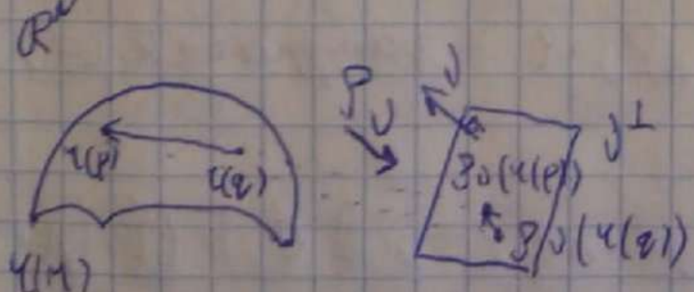
$0 \neq \rho_\nu(d_p\varphi(v)) = d_p\varphi(v) - \langle d_p\varphi(v), \nu \rangle \nu \overset{\text{(попередньо)}}{\Longleftrightarrow} \forall p \in M \ \forall\, 0 \neq v \in T_pM$

$$\frac{d_p\varphi(v)}{|d_p\varphi(v)|} \neq \pm \nu \Leftrightarrow \nu \notin F(\hat{T}M),$$ де

$\hat{T}M$ - множина усіх ненульових дотичних векторів M,

а $F : \hat{T}M \to S^{N-1} : v \mapsto \dfrac{d_p\varphi(v)}{|d_p\varphi(v)|}$.

2 Якщо обмежитися випадком компактного M і якщо вже відомо, що $\rho_\nu \circ \varphi$ - занурення, знову ж з Пр. вище випливає, що $\rho_\nu \circ \varphi$ - вкладення $\Leftrightarrow \rho_\nu \circ \varphi : M \to \mathbb{R}^N$ - ін'ю.



Отже, нехай для $p, q \in M$

$$\rho_\nu(\varphi(p)) = \rho_\nu(\varphi(q)),$$

$$\varphi(p) - \langle \varphi(p), \nu \rangle \nu = \varphi(q) - \langle \varphi(q), \nu \rangle \nu,$$

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \langle \varphi(p) - \varphi(q), \nu \rangle \nu.$$

Тобто знову є колінеарність ϑ і, нормуючи, отримаємо:

$$\frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|} = \pm\vartheta.$$

Оскільки φ - inj це означає, що $\rho_\vartheta \circ \varphi$ - inj $\Leftrightarrow$ $\forall\, p \neq q \in M$ $\frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|} \neq \pm\vartheta \Leftrightarrow \vartheta \notin G(M\times M \setminus \Delta)$, де $\Delta := \{(p,p) \in M\times M \mid p \in M\}$ - діагональ $M\times M$, а $G: M\times M\setminus\Delta \to S^{N-1}: (p,q) \mapsto \frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|}$. Оскільки Δ - замкнена з хаусдорфовості M, $M\times M\setminus\Delta$ - відкр. підмножина $2n$-вимірного многовида $M\times M$, тобто $2n$-вимірний k-гл. многовид. Нарешті, $G \in C^k(M\times M\setminus\Delta, S^{N-1})$ за побудовою (Впр.).

Сл. Якщо $\varphi: M \to \mathbb{R}^N$ - занурення, то $\rho_\vartheta \circ \varphi$ - занурення $\Leftrightarrow$ $\vartheta \notin F(\hat{T}M) \subset S^{N-1}$

Якщо φ - вкладення, то $\rho_\vartheta \circ \varphi$ - вкладення $\Leftrightarrow \vartheta \notin F(\hat{T}M) \cup G(M\times M\setminus\Delta) \subset S^{N-1}$ (для компактного M).

Отже, треба встановити, за яких достатніх умов образ гладкого відображення неповний за область значень (а також чи є $\hat{T}M$ гладким многовидом (і якої вимірності), а F - гл. відображенням). Тоді ми можемо ітерувати цю процедуру і, проходячи від ч до 80 ч, знижувати N доки це можливо.

Теорема Сарда

<u>Def.</u> Нехай M - n-вимірний многовид. Говорять, що $A \subset M$ - множина (лебегової) міри 0, якщо $\forall p \in A\ \exists$ карта (U, φ) така, що $p \in U$ і $\varphi(U \cap A)$ - лебегової міри 0 в $\mathbb{R}^n$, тобто $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \leq$ злічення множина куль $\{B_{r_i}(x_i)\}$ (евклідових) таких, що $\varphi(U \cap A) \subset \bigcup_i B_{r_i}(x_i)$ і сума їхніх евклідових об'ємів $\sum_i \mathrm{Vol}\, B_{r_i}(x_i) < \varepsilon$.

<u>Rem</u> Очевидно, замість умови на суму об'ємів можна брати $\sum_i r_i^n < \varepsilon$, а замість евкл куль - відкриті куби

(кулі еквівалентної метрики ρ_∞) $\prod_{j=1}^{n} (x_i^j - r_i, x_i^j + r_i)$ з тією ж умовою.

<u>Rem.</u> Оскільки M - з $\leq$ злічн. базою, в силу теореми Ліндельофа, з покриття A носіями карт (U, φ) з <u>Atl.</u> можна виділити $\leq$ злічене підпокриття $\{U_i\}$.

З цього, зокрема, можна вивести:

<u>Pr. 1.</u> Якщо $\{A_i\}$ - $\leq$ злічений набір множин M міри 0, то і $\bigcup_i A_i$ - міри 0.

<u>2.</u> Якщо $A \subset B$ і B - міри 0, то і A - міри 0.

▷ <u>Впр.</u> ◭

<u>Rem.</u> Звичайно, <u>Pr</u> також випливає з загальних властивостей міри. На M можна побудувати "повноцінну" борелівську міру аналогічно до міри Лебега на $\mathbb{R}^n$ за допомогою ріманової метрики, "продовжуючи" рімманів об'єм.

$Vol(A) = \int_A dV$ на борелівських A (де $dV = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ локально).
Зокрема, множини міри 0 будуть мати міру 0 у цих мірах.

<u>Th.</u> (Sard). Нехай M і N — ∞-гладкі многовиди і $F \in C^\infty(M, N)$; C — множина критичних точок F. Тоді множина критичних значень $F(C)$ — міри 0 в N, і $\underbrace{N \setminus F(C)}_{\text{є перетином зліч. кількості відкритих всюди щільних множин}}$ всюди щільна у N (зокрема, $\neq \emptyset$).

<u>Rem</u> Далі ми побачимо, що гладкість можна тут знизити до деякої скінченної.

<u>Rem</u> Згадаємо, що критична точка p — це та, у якій $\operatorname{rank}_p F < \dim N$. Але якщо $\dim M < \dim N$, це автоматично виконується $\forall p \in M$. Тому у цьому випадку маємо (разом з ослабленням умови на гладкість, яке, як ми побачимо пізніше, тут допустиме):

<u>Cor.</u> Нехай M і N — k-гл. многовиди і $F \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$. Якщо $\dim M < \dim N$, то $F(M)$ — міри 0 в N.

тонкіше, перетин ...

і $N \setminus F(M)$ – всюди щільна (зокрема, $\neq \emptyset$).

<u>Rem.</u> З цього випливає, що у індуктивному кроці <u>2.</u> з доведення <u>Th.</u> Уітні для $G \in C^k(M \times M \setminus \Delta, S^{N-1})$ $(k \geq 1)$ при $2n < N-1$ завжди $\exists\, \nu \in S^{N-1}$, що не належить образу G. Тобто (якщо довести аналогічним чином, що крок <u>1.</u> з занурення також працює) можна зменшувати вимірність N, зберігаючи ін'єктивність, поки не стане $N = 2n+1$. Зауважимо, що це на 1 вимірність "гірше", ніж у нашому формулюванні – ми доведемо "послаблену" <u>Th.</u> Уітні (до того ж, лише для компактного M).

Доведення теореми Сарда

перетин ≤ зл. кількості

відкритих

▷ Спочатку доведемо, що $N \setminus F(C)$ всюди щільна, якщо відомо, що $F(C)$ – міри 0,

і тому всюди щільна

Отже, $C = \{p \in M \mid \text{ранк}_p F < n\}$, де знову $m = \dim M$, $n = \dim N$.

З теореми про ранг, якщо $\text{ранк}_p F = n$, то $\exists$ відкр. $U \ni p$: $\forall q \in U$ $\text{ранк}_q F = n$ (бо n - max ранг). Тому $M \setminus C$ відкрита $\Rightarrow$ C замкнена.

<u>Lem.</u> $\forall$ замкненої $C \subset M$ $\exists$ $\leq$ зліченний набір компактів $\{C_i\}$: $C = \bigcup_i C_i$.

$\triangleright$ $\forall p \in C$ розглянемо карту (U_p, φ_p), $p \in U_p$ і, аналогічно до <u>Lem.</u> вище, відкр. окіл p вигляду $\tilde{B}_{r_p}(p) := \varphi_p^{-1}(B_{r_p}(\varphi_p(p)))$ (де $r_p > 0$ <u>може бути будь-яким</u>) і $\tilde{\mathcal{D}}_{r_p}(p) := \varphi_p^{-1}(\mathcal{D}_{r_p}(\varphi_p(p))) = \overline{\tilde{B}_{r_p}(p)}$ - компакт (аналогічно до доведення <u>Lem</u> вище).

C замкнена $\Rightarrow$ $\forall$ p $C \cap \tilde{\mathcal{D}}_{r_p}(p)$ компакт як замкнена підмножина компакта.

$\{\tilde{B}_{r_p}(p)\}_{p\in C}$ – відкр. покриття C. Оскільки M – з $\leq$ злічч. базою, за Т. Ліндельофа, $\exists$ $\leq$ злічене підпокриття $\{\tilde{B}_{r_{p_i}}(p_i)\}$. Тоді для компактів $C_i := C \cap \tilde{\mathcal{D}}_{r_{p_i}}(p_i)$ $C = \bigcup_i C_i$. $\blacktriangle$ (Лем.)

Отже, $C = \bigcup_i C_i \Rightarrow F(C) = \bigcup_i F(C_i)$ ($\leq$ злічене об'єднання). F неперервне $\Rightarrow$ $\forall i$ $F(C_i)$ – компакт $\Rightarrow$ [N-хаусд.] $\Rightarrow$ $\forall i$ $F(C_i)$ – замкнена.

Якщо $F(C)$ – міри 0, то і $\forall i$ $F(C_i) \subset F(C)$ – міри 0. Тоді $\forall i$ $\operatorname{Int} \overline{F(C_i)} = \operatorname{Int} F(C_i) = \varnothing$, тобто $F(C_i)$ – ніде не щільна. Дійсно, $\exists$ $p \in \operatorname{Int} F(C_i)$, тобто $\exists$ відкр. V : $p \in V \subset F(C_i)$. Тоді $\forall$ карти (U, φ) мн. N з $p \in U$ $\varphi(U \cap V)$ – відкр. в $\mathbb{R}^n$, тому $\exists r > 0$: $B_r(\varphi(p)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \varphi(U \cap F(C_i))$. Оскільки $B_r(\varphi(p))$

має додатню міру Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(U \cap F(C_i))$ не може мати міру 0; оскільки це так $\forall$ карти в околі p, $F(C_i)$ – теж не міри 0 у.

Отже, $\forall i$ $\overline{N \setminus F(C_i)} = N \setminus \operatorname{Int} F(C_i) = N$, тобто $M \setminus F(C_i)$ – всюди щільна (і відкрита). Оскільки N – хаусдорфовий і локально компактний (у $\forall p \in M$ $\exists$ окіл $\tilde{B}_r(p)$ з комп. замиканням $\tilde{D}_r(p)$ як вище), за Th. Бера, $N \setminus F(C) = \bigcap_i (N \setminus F(C_i))$ – теж всюди щільна.

Rem. Зокрема, ми можемо вивести такий наслідок з Th. C.:

Cor. В умовах теореми Сарда якщо M – компакт, то C і $F(C)$ – компакти, $F(C)$ – замкнена і ніде не щільна в N.

▷ C замкнена в комп. $M \Rightarrow C$ – комп. $\Rightarrow$ [F – неп.] $\Rightarrow F(C)$ – комп. $\Rightarrow$ [N – хаусд.] $\Rightarrow F(C)$ – замкн. $\Rightarrow$ [$F(C)$ міри 0] $\Rightarrow \operatorname{Int} \overline{F(C)} = \operatorname{Int} F(C) = \varnothing$ ◁ (Cor.)

Залишилося довести "аналітичну" частину $\underline{Th}$. Сарда: встановити, що $F(C)$ — міри 0.

$\forall$ $p \in C$ оберемо карти (U, φ), (V, ψ) : $p \in U$, $F(p) \in V$. Лок. задання F: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^{\infty}(\varphi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n)$; його крит. точки — образи крит. точок F, $\mathbb{R}^m$ тобто множина крит. точок $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ має вигляд $\varphi(U \cap F^{-1}(V) \cap C)$, а крит. значень — $\psi(F(U \cap F^{-1}(V) \cap C))$. Якщо $\underline{Th}$ Сарда вірна для $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, це множина міри 0, [redacted] і [redacted] $\psi(F(U \cap F^{-1}(V) \cap C)) \subset \psi(F(F^{-1}(V) \cap C)) \subset \psi(V \cap F(C))$. З іншого боку, $\forall$ $F(q) \in V \cap F(C)$ (тобто $q \in C$ і $F(q) \in V$) $\exists$ карта (U_q, φ_q) : $q \in U_q$, і тому $\psi(F(q)) \in \psi(F(U_q \cap F^{-1}(V) \cap C))$ — мн. міри 0. Обираючи $\leq$ зліченне підпокриття $\{U_i\}$ (відкрите) множини $F^{-1}(V) \cap C$ з носіїв таких карт, отримуємо тоді $\psi(F(C)\cap V) = \bigcup_i \psi(F(U_i \cap F^{-1}(V)\cap C))$ - міри 0.

За def., тоді $F(C)$ - міри 0.

Отже, Th. Сарда достатньо довести для $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, де $U \subset \mathbb{R}^m$ - відкрита.

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо через C_k множину $p \in U$, у яких усі част. похідні усіх коорд. ф-цій F до k-того порядку включно нульові. Очевидно, тоді

$C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \ldots$

<u>1</u> Доведемо, що $F(C \setminus C_1)$ - міри 0. Доводимо індукцією за m:

<u>$m=0$</u> - очевидно ($\mathbb{R}^0$, U і C - одноточкові)

<u>$m-1 \to m$</u>. $\forall p \in C \setminus C_1$ за def $\operatorname{rank}_p F < n$ і $\exists$ част. похідна якоїсь коорд. ф-ції F, що у $p \neq 0$.
Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що