38.6. X хаусдорфовий, $A \subset X$ - ретракт $\Rightarrow$ A замкнена.

Нехай $f: X \to A$ - ретракція. $\forall x \notin A$ $f(x) \in A$, тому $f(x) \neq x$. За хаусдорф., $\exists$ відкр. $U \ni x$, $V \ni f(x)$: $U \cap V = \varnothing$. f - непер. $\Rightarrow f^{-1}(V)$ - відкр. окіл $x \Rightarrow U \cap f^{-1}(V)$ - відкр. окіл x. $\forall$ $y \in U \cap f^{-1}(V)$ $f(y) \in V \Rightarrow f(y) \notin U \Rightarrow f(y) \neq y$, тобто $U \cap f^{-1}(V) \subset X \setminus A$. Т.ч., $X \setminus A$ відкр. $\Rightarrow A$ замкн.

39.2. $X \sim Y \Rightarrow X$ та Y мають однакову кількість компонент лінійної зв'язності

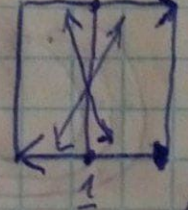
Отже, $\exists$ $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$; $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$.

Якщо A - компонента лін. зв-сті X, то $f(A)$ - лін. зв. за неперервністю $f \Rightarrow$ міститься у деякій комп. лін. зв. Y. Позначимо її $\tilde{f}_0(A)$. Т.ч., коректно визначене $\tilde{f}: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, де $\pi_0(X)$, $\pi_0(Y)$ - множини компонент

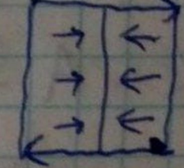
лін. зв-сті X, Y відп. Аналогічно визначене $\tilde{g}: \pi_0(Y) \to \pi_0(X)$.
$\forall$ комп. лін. зв. $A \subset X$ $\tilde{g} \circ \tilde{f}(A)$ – це комп. лін. зв. точки $g(f(x))$, де $x \in A$ – будь-яка точка. Але $g \circ f \sim id_X$, тому $g(f(x)) \in A$. Т.ч., $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{\pi_0(X)}$. Ан-но, $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{\pi_0(Y)}$.
Т.ч. це біекції, тому $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$.
взаємно обернені

39.5. Лист Мебіуса гомот. екв. колу S^1.

Лист Меб. $X = I \times I / \sim$:



$(x,0) \sim (1-x, 1)$.



Тоді $A := \{\frac{1}{2}\} \times I / \sim \subset X$ – відрізок зі склеєними кінцями $(\frac{1}{2}, 0) \sim (\frac{1}{2}, 1)$, тобто $A \cong S^1$.
Ортог. проекція $f : (x,y) \mapsto (\frac{1}{2}, y)$ на $\{\frac{1}{2}\} \times I$ $\overbrace{\text{факторизується}}^{\text{непер. і}}$ у $\tilde{f} : X \to A$ (бо $(x,0) \mapsto (\frac{1}{2}, 0)$, $(1-x; 1) \mapsto (\frac{1}{2}, 1)$) – неперервне і $\tilde{f}([(\frac{1}{2}, y)]) = [(\frac{1}{2}, y)]$, тобто ~~та~~ $\tilde{f}|_A = id_A$ – ретракція.
$F : I \times I \times I \to I \times I : (x, y, s) \mapsto (\frac{1}{2}s + x(1-s), y)$ – непер.,

і $F(1-x, 1, z) = (\frac{1}{2}z + (1-x)(1-z), 1) = (1 - \frac{1}{2}z - x(1-z), 1) \sim$
$\sim (\frac{1}{2}z + x(1-z), 0) = F(x, 0, z)$ $\forall x, z$, тому F факторизується у неперервне $\tilde{F} : X \times I \to X$. Оскільки $F(x,y,0) = (x,y)$ і $F(x,y,1) = (\frac{1}{2}, y) = f(x,y)$, $\tilde{F}(\cdot, 0) = id_X$, $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{f}$. Отже, $\tilde{f} \sim id_X \Rightarrow A$ - деформ. ретракт $X \Rightarrow$ $X \sim A \cong S^1$.

<u>39.13(3)</u> Побудувати деформаційну ретракцію $S^3 \setminus S^1 \to S^1$.

Раніше будували деф. ретракцію $f : \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \to S^1$.

Оберемо $x_0 \in S^1 \subset S^3$. Нехай $\Phi : S^3 \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^3$ - стереогр. проекція. Тоді Φ переводить $S^1 \setminus \{x_0\}$ у пряму $\mathbb{R}^1 \Rightarrow \Phi|_{S^3 \setminus S^1} : S^3 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$ - гомеоморфізм.

$\Phi^{-1}(S^1) \cong S^1$ - підмножина $S^3 \setminus S^1$, і $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ - ретракція. Якщо F - гомотопія f і $id_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1}$, то $\tilde{F} : S^3 \setminus S^1 \times I \to S^3 \setminus S^1 : (x, z) \mapsto \Phi^{-1}(F(\Phi(x), z))$ -

rozumowania $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ i $id_{S^3 \setminus S^1}$.

39.17. (1,5,6). Згадаємо, що X стягний $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X: id_X \sim x_0$ (пост. на x_0)

1-5 X стягний $\Leftrightarrow \forall Y \ \forall f \in C(Y,X) \ f \sim$ постійному.

$\Leftarrow$. Застосуємо умову до $Y = X$ і $f = id_X$.

$\Rightarrow$. $id_X \sim x_0 \Rightarrow f = id_X \circ f \sim x_0 \circ f = x_0$ – постійне.

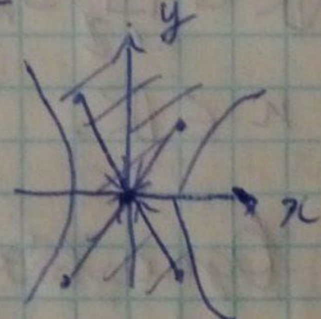
1-6. X стягний $\Leftrightarrow \forall Y \ \forall f \in C(X,Y) \ f \sim$ постійному

$\Leftarrow$. Знову застосуємо до $Y = X$ і $f = id_X$.

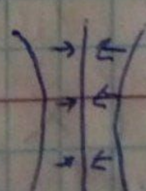
$\Rightarrow$. $id_X \sim x_0 \Rightarrow f = f \circ id_X \sim f \circ x_0 = f(x_0)$ – постійне.

39.19(3). Чи стягний $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$.

Так



Бо вона зірчата відн. $(0,0)$. Або: будуємо деф. ретр. на $(0,0)$: $(x,y) \mapsto (0,0)$, лінійно гомотопна id_X.

Або спочатку на $\mathbb{R}$: , потім $\mathbb{R} \sim \{0\}$.

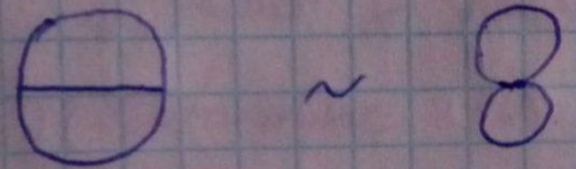
39.20 $X \times Y$ стягний $\Longleftrightarrow$ X і Y стягні.

$\Leftarrow$ З доведеного вище: $X \sim \{x\}$, $Y \sim \{y\}$ $\Rightarrow$ $X \times Y \sim \{x\} \times \{y\}$.

$\Rightarrow$ Як відомо з лекцій, $\exists$ $(x_0, y_0) \in X \times Y$: постійне $f: X \times Y \to (x_0, y_0)$ гомотопне $id_{X \times Y}$. Нехай F – гомотопія. Тоді, аналогічно доведеному вище, $F_X : (x, s) \mapsto P_X(F(x, y_0, s))$ – непер.,
$F_X(x, 0) = P_X(F(x, y_0, 0)) = P_X((x_0, y_0)) = x_0$ і $F_X(x, 1) = P_X(F(x, y_0, 1)) =$
$= P_X((x, y_0)) = x$, тобто це гомотопія пост. на x_0 і id_X $\Rightarrow$
X стягний. Ан-но Y.

39.I. $x, y \in S^1$, $x \neq y$. Тоді $S^1 \cup [x,y] \sim S^1 \vee S^1$.

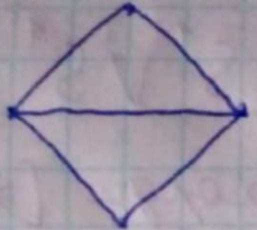
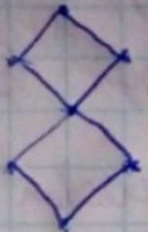
Можемо без обм. загальності вважати хорду $[x,y]$ діаметром:

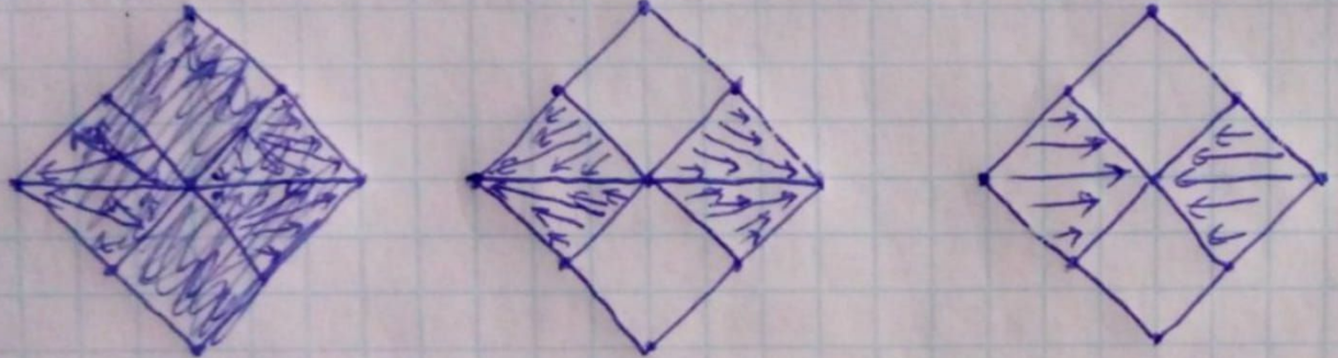


Розглянемо $X \subset \mathbb{R}^2$:

X

Тоді

$X_1 =$  і $X_2 =$  – його деформаційні ретракти. Ретракції мають вигляд:



(гомотопії $f_1 \sim id_X$, $f_2 \sim id_X$ теж можна побудувати лінійно)

$f_1 : X \to X_1$ $\qquad$ $f_2 : X \to X_2$

Отже, $S^1 \cup [x,y] \cong X_1 \sim X \sim X_2 \cong S^1 \vee S^1$.

39.6. Класифікувати літери латинського алфавіта з точністю до гомотопічної еквівалентності.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

$-$ — стягнені

$=$ $\sim S^1$

$\equiv$ $\sim S^1 \vee S^1$.